

Hoja 1

1.- Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple

(a) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$ (ley del paralelogramo).

(b) $\|x - y\| \cdot \|x + y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(c) $\langle x, y \rangle = 0$ si y sólo si $\|x + y\| = \|x - y\|$.

(d) $\langle x, y \rangle = 0$ si y sólo si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Interpretar estos hechos geoméricamente en términos del paralelogramo formado por los vectores x e y .

2.- (a) Hallar todos los valores de a y b para los que los vectores $x = (4, b, 1)$ e $y = (a, b, 0)$ de \mathbb{R}^3 , son ortogonales. ¿Cuál es el lugar geométrico del plano determinado por tales a y b ?

(b) Hallar dos vectores ortogonales a $(1, 1, 1)$ que no sean paralelos.

3.- Sean $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determinar el ángulo entre los vectores $u = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $v = \sqrt{5/3}\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(b) Explicar la diferencia entre los valores $\|3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\| \cdot \|2\mathbf{j} + \mathbf{k}\|$ y $|(3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} + \mathbf{k})|$. ¿Es posible que sean iguales? ¿Puede decidirse eso sin calcular sus valores exactos?

4.- Comprobar que las siguientes funciones tienen todas las propiedades que se requieren de una métrica:

(a) En \mathbb{R} : $d(x, y) = |x - y|/(1 + |x - y|)$ y también $d(x, y) = \arctg |x - y|$.

(b) En \mathbb{R}^n : $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$ y también $d_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$.

5.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ en \mathbb{R}^2 cuando

$$x_k = \left(\frac{\log k}{k}, k^{1/k}\right), \quad x_k = \left(\sqrt{k^2 + 2} - k, \frac{1}{k^k}\right), \quad x_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}\right), \quad x_k = \left(\cos \frac{k\pi}{2}, \frac{1}{k} \sin \left(k^2 + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

6.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{x_k\}_k$ en \mathbb{R}^2 cuando

$$x_k = \left(a_k, \frac{1}{a_k - 2}\right)$$

y la sucesión $\{a_k\}_k$ de números reales está definida mediante

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad 7a_{k+1} = a_k^3 + 6, \quad \text{para cada } k \geq 1.$$

(Indicación: demostrar que $\{a_k\}_k$ es creciente y que cada $a_k < 1$.)

7.- Para cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 , determinar su frontera y si son abiertos o cerrados.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 < 6\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\},$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, |z + 1| \leq 4\},$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\},$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0\},$$

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\},$$

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

8.- Calcular el cierre, el interior y la frontera de los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < 1\},$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

9.- (a) Sea A el conjunto de \mathbb{R}^2 formado por la unión del segmento horizontal $I_0 = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$ y los segmentos verticales cerrados I_n de altura 1 y de extremo inferior $P_n = (1/n, 0)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Demostrar que A no es cerrado (Indicación: falta el segmento vertical en $x = 0$).

(b) Sea

$$B = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}.$$

Demostrar que B no es cerrado. (Indicación: utilizar la caracterización de cerrados por medio de sucesiones).

10.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son compactos?

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}.$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \leq 9\}.$$

11.- Demostrar que la unión arbitraria de abiertos es abierta. Mediante un ejemplo, comprobar que aunque sea abierto cada A_i de una familia infinita $\{A_i\}_i$, la intersección $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ no es necesariamente un conjunto abierto. ¿Qué ocurre con las familias de conjuntos cerrados?

12.- Demostrar que toda unión finita de conjuntos compactos es compacta y que toda intersección arbitraria de compactos es compacta.

13.- Decimos que x es un *punto de acumulación* de $E \subset \mathbb{R}^n$ si toda bola abierta de centro x contiene un punto de E distinto de x . Escribimos E' para denotar al conjunto de puntos de acumulación de E .

(a) Dado el subconjunto de \mathbb{R} definido por $A = \left\{ \frac{1}{k} : k = 1, 2, \dots \right\}$, hallar A' . Lo mismo para $A = \mathbb{Q}$.

(b) Probar que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.

(c) Probar que $\bar{E} = E \cup E'$.

14.- Probar que \mathbb{R}^n es completo, (es decir, que toda sucesión de Cauchy es convergente) siguiendo los siguientes pasos:

(a) Probar que $\max\{|a_1|, \dots, |a_n|\} \leq \|a\| \leq \sqrt{n} \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$ donde $a = (a_1, \dots, a_n)$. (Compárese con un ejercicio anterior sobre las distintas métricas.)

(b) Sea $\{v_k\}_k$ una sucesión en \mathbb{R}^n tal que $v_k = (v_k^1, \dots, v_k^n)$. Probar que $\{v_k\}_k$ es de Cauchy si y sólo si las sucesiones de números reales $\{v_k^1\}_k, \dots, \{v_k^n\}_k$ son de Cauchy en \mathbb{R} .

(c) Usando que \mathbb{R} es completo, concluir que \mathbb{R}^n es completo.