

**Hoja 9. Estructura de los endomorfismos: Autovalores y autovectores.**

1.- Hallar los autovalores reales y los autovectores de  $\mathbb{R}^n$  de las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} & \text{b)} & \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & \text{c)} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{d)} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \text{e)} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{f)} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{g)} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{h)} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} & \text{i)} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Además, en los casos en los que sea posible, hallar una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores, y la matriz en esa base de la aplicación lineal dada.

2.- Encontrar los autovalores y los autovectores de las aplicaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  dadas por las siguientes matrices:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Sea  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$  con  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  la matriz de  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ . Hallar los autovectores y autovalores de  $f$ .

Decidir si existe alguna interpretación geométrica del endomorfismo  $f$ .

4.- Demostrar que la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  tiene el autovalor 9.

5.- Hallar los posibles autovalores de un endomorfismo  $f$  de un espacio vectorial  $V$  tal que  $f \circ f = id_V$

6.-(\*\*) Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un endomorfismo que admite por vectores propios a  $(0, 1, -2)$ ,  $(1, 0, 4)$  y  $(1, 0, -2)$ . Sabiendo que  $f(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$  hallar los autovalores de  $f$ .

7.- Calcular el polinomio característico de  $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 11 \\ -6 & 3 & -3 & 9 \\ 5 & 1 & 5 & -7 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ .

8.- Calcular los autovalores y autovectores de la matriz  $\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$ . Decidir si es diagonalizable.

9.- Probar que si  $\lambda$  y  $\mu$  son valores propios de  $f$  distintos y  $v$  y  $w$  son vectores propios asociados a ellos respectivamente, entonces  $v + w$  **no** es vector propio de  $f$ .

10.- Hallar los valores y subespacios propios de  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^{\leq 3}[x])$ , donde  $f(p(x)) := p'(x)$ .

11.- Diagonalizar las siguientes matrices:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.- Diagonalizar si es posible las siguientes matrices  $A$  y  $C$  calculando matrices de paso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.- Hallar una matriz diagonal, si es posible, de los siguientes endomorfismos.

- a)  $f \in \text{End}(\mathbb{K}^4)$  con  $\dim(\text{Nuc } f) = 2$  y autovalores 1 y  $-1$ .
- b)  $f \in \text{End}(\mathbb{K}^4)$  con  $\dim(\text{Nuc}(f - 3Id)) = 3$  y autovalor 2.
- c)  $f \in \text{End}(\mathbb{K}^4)$  con dos autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  distintos con multiplicidad geométrica  $d_1 = d_2 = 2$ .