Universidad Autónoma de Madrid Curso 2007-08

ÁLGEBRA LINEAL Primero de Matemáticas

Hoja 8. Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

1.- Se consideran las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Hallar una matriz $X \in M_3(\mathbb{K})$, $X \neq C$ tal que $AX = AC$.

2.- Una matriz $n \times n$ $A = (a_{ij})$ se llama antisimétrica si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, j. Probar que si A es antisimétrica, $\det A = (-1)^n \det A$. Deducir de ello que las matrices antisimétricas de orden impar tienen determinante cero.

3.- Sea A una matriz $n \times n$ y sea *adj* A la matriz adjunta de A, es decir, la matriz que se obtiene a partir de A sustituyendo cada elemento por su adjunto. Demostrar

a) $\det(adj\ A) = (\det\ A)^{n-1}$, *b*) Si rang $A = n-1$ entonces rang $(adj\ A) = 1$.

4.- Demostrar que si A es invertible, entonces $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

5.- Sea $f\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ la aplicación lineal cuya matriz es $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar $f^{-1}(1,1,1)$.

6.- (**) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mediante $f(x,y,z) = (x+by+az, ax+by+z, x+aby+z)$, decidir para qué valores de a y de b el punto $(1,a,b) \in \mathbb{R}^3$, pertenece a $Im\ f$. Para estos a, b hallar $f^{-1}(1,a,b)$.

7.- Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Comprobar que $A^2 - (a+d)A + det(A)I_2 = 0$. ¿Cuándo es A su propia inversa?

8.- Sea una matriz real $n \times n$ A tal que rang $A < n$. Demostrar que existe, como mínimo, una matriz real $n \times n$ B tal que $AB = 0$. Decir cual es el rango máximo de una tal matriz B.

9.- Hallar la solución por el método de Gauss y por el método de Cramer del siguiente sistema,

$$\begin{cases} x+y+z+w & = 10 \\ x-y+2z+w & = 9 \\ 2x+z+w & = 9 \\ 4x+2u-z+2w & = 13 \end{cases}$$

10.- Sea $a \in \mathbb{R}$. Sea la siguiente aplicación lineal $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f_a(x_1,x_2,x_3,x_4) = (y_1,y_2,y_3,y_4)$ donde $y_1 = ax_1+x_2+x_3+x_4$; $y_2 = x_1+(2-a)x_2+x_3+x_4$; $y_3 = (1+a)x_1+(3-a)x_2+2x_3+2x_4$; $y_4 = x_1+x_2+x_3+x_4$. Estudiar los valores de a para los que f_a no es un automorfismo y calcular el núcleo para dichos valores de a. Además, para $a = 1$ hallar los vectores que se transforman en los vectores $(1,1,2,1)$ y $(1,1,1,1)$.

11.- Hallar el $\det A$, donde A es la siguiente matriz $n \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

A este determinante se le llama determinante de Vandermonde de orden n.

12.- Utilizar la regla de Laplace para calcular los siguientes determinates:

$$i) \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 2 & -9 \\ 0 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad ii) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$