Universidad Autónoma de Madrid Curso 2007-08

ÁLGEBRA LINEAL Primero de Matemáticas

Hoja 7. Espacio dual.

1.- Encontrar la base dual de la siguiente base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,2,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,1,1)\}$.

2.- Encontrar la base dual de la siguiente base de $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, $\mathcal{B} = \{1, x+1, x^2-2, x^3-x^2\}$.

3.- Sea $E = \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}$ la base canónica de E. Se consideran las forma lineales

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3, \qquad f_2(x_1,x_2,x_3) = x_2, \qquad f_3(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2.$$

(i) Demostrar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de E^*.
(ii) Calcular las coordenadas de f_1, f_2 y f_3 respecto de la base $\mathcal{B}^*$, dual de $\mathcal{B}$.
(iii) Hallar la base de E respecto de la cual $\{f_1, f_2, f_3\}$ es base dual.

4.- Sea E el espacio vectorial $\mathbb{R}^{\leq 1}[x]$. Se define

$$f_1[p(x)] = \int_0^1 p(x)dx, \qquad f_2[p(x)] = \int_{-1}^0 p(x)dx.$$

Se pide:
(i) Probar que $f_1, f_2 \in E^*$.
(ii) Hallar las coordenadas de f_1, f_2 en la base dual de la base $\{1, x\}$ de $\mathbb{R}^{\leq 1}[x]$.

5.- En $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ consideramos las formas lineales dadas por:

$$D^0(p(x)) = p(0), \qquad D^1(p(x)) = p'(0), \qquad D^2(p(x)) = p''(0),$$

para cada $p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$.
(i) Comprobar que $\{D^0, D^1, D^2\}$ es base del espacio dual de $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$.
(ii) Calcular la base de $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ de la cual $\{D^0, D^1, D^2\}$ es dual.

6.- En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $\mathcal{B} = \{(1,-1,1), (-1,2,-1), (-1,1,0)\}$.

i) Comprobar que $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ es base dual de $\mathcal{B}$, donde $\left.\begin{array}{rcc} f_1(x,y,z) & = & x+y+z \\ f_2(x,y,z) & = & x+y \\ f_3(x,y,z) & = & -x+z \end{array}\right\}.$

ii) Calcular las coordenadas del vector (1,2,3) en la base $\mathcal{B}$.

7.- Hallar las coordenadas de $f(x,y,z) = x+2y+3z \in (\mathbb{R}^3)^*$ respecto de la base dual de la base $\mathcal{B} = \{(1,-1,1), (1,1,0), (0,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$

8.- Se considera la siguiente base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$. Sea f la forma lineal de $\mathbb{R}^3$ de coordenadas (2,-1,1) respecto a la base dual de $\mathcal{B}$. Hallar una base del núcleo de f.

9.- Hallar el anulador de cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$.

i) $W_1\colon \left.\begin{array}{ll} x_1 - 2x_2 + 3x_4 & = 0 \\ x_2 + x_4 & = 0 \end{array}\right\},$

ii) $W_2\colon \left.\begin{array}{ll} x_1 - x_2 + 4x_4 & = 0 \\ x_1 + x_3 & = 0 \end{array}\right\},$

iii) $W_1 \cap W_2$ y
iv) $W_1 + W_2$.

10.-(**) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sea W un subespacio de V. Demostrar que el espacio vectorial cociente $V^*/an(W)$ es isomorfo a W.