

Hoja 6. Aplicaciones lineales: Espacio vectorial cociente. El espacio de las aplicaciones lineales.

1.- Calcular el espacio vectorial cociente del espacio vectorial \mathbb{R}^4 módulo el subespacio V , siendo:

- i) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = x_3 - x_4 = 0\}$.
- ii) $V = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 5, 6) \rangle$.
- iii) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = x_3 - x_4\}$.
- iv) $V = \langle (1, 2, 3, 4), (2, 2, 2, 6), (0, 2, 4, 4) \rangle$.
- v) $V = \langle (1, 0, -1, 2), (1, 0, -1, 2) \rangle$.

2.- Sea f el endomorfismo de \mathbb{R}^3 definido por $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + 2y + z)$. Hallar la descomposición canónica de f .

3.- Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^{\leq 1}[x]$ que verifica las siguientes condiciones:

- a) $f(1 + x) = 2 - x$, y
- b) $Nuc f = Im f$.

Se pide:

- i) Hallar la matriz de f respecto a la base $B = \{1, x\}$.
- ii) Calcular una base de $f(W)$, siendo W el subespacio de ecuación $x_1 + 2x_2 = 0$, donde (x_1, x_2) son coordenadas respecto a la base B .
- iii) Hallar la imagen inversa del conjunto $\{1 + x, 0\}$.

4.- Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ definido mediante las siguientes condiciones:

- a) los polinomios sin término independiente se transforman en sí mismos, y
- b) el núcleo de f es el subespacio de los polinomios de $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ que tienen los tres coeficientes iguales.

Se pide:

- i) Hallar la matriz de f en la base $B = \{1, x, x^2\}$.
- ii) Hallar una base del subespacio transformado del subespacio de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \lambda, \end{cases}$$

donde (x_1, x_2, x_3) son coordenadas respecto a la base B .

- iii) La matriz de f respecto a las bases $B' = \{1 + x + x^2, 1 + x, 1\}$ y B .

5.- Un endomorfismo $f: E \rightarrow E$ se llama *proyector* si $f^2 = f$. Se pide

- i) Demostrar que f es proyector si y solamente si $I - f$ lo es.
- ii) Demostrar que si f es proyector, $E = Nuc f \oplus Im f$.
- iii) Si f y g son proyectores, determinar condiciones necesarias y suficientes para que $f + g$ también lo sea.

6.- Sea $f \in End(E)$ tal que $f^2 + f + I = 0$. Demostrar que f es un automorfismo y determinar su inverso.

7.- Siendo f un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita E , demostrar

- i) $Nuc f \subset Nuc f^2 \subset \dots \subset Nuc f^h \subset Nuc f^{h+1} \subset \dots$ y
- ii) $f(E) \supset f^2(E) \supset \dots \supset f^h(E) \supset f^{h+1} \supset \dots$.

8.- Dado un endomorfismo f de un espacio vectorial E de dimensión finita n , demostrar que los conjuntos $V = \{g \in End(E) : f \circ g = 0\}$ y $W = \{g \in End(E) : g \circ f = 0\}$ son subespacios vectoriales de $End(E)$ y determinar sus dimensiones.

9.- Sea $f \in End(E)$. Demostrar que $Nuc f = Im f$ si y solamente si $dim E$ es par, $f^2 = 0$ y $rg f = n/2$.

10.-(**) Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- (i) Hallar el núcleo y la imagen de f .
- (ii) Hallar una base de $\mathbb{R}^4/Nuc f$.
- (iii) Hallar las imágenes de los vectores de la base de $\mathbb{R}^4/Nuc f$ (hallada en (ii)) mediante el isomorfismo canónico $\bar{f}: \mathbb{R}^4/Nuc f \rightarrow Im f$.