Universidad Autónoma de Madrid — Curso 2007-08

ÁLGEBRA LINEAL — Primero de Matemáticas

Hoja 5. Aplicaciones lineales: Núcleo e imagen. Cambios de base.

1.- Se consideran las aplicaciones lineales $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3, x_1+x_2, x_3)$ y $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2, x_1+x_3)$.

i) Calcular su núcleo y su imagen.

ii) Siendo V el subespacio $\langle (1,-1,0),(1,1,1)\rangle$ calcular $f(V)$ y $g(V)$. Calcular también $f^{-1}(0,0,0)$ y $f^{-1}(2,2,1)$.

iii) Calcular $f^{-1}(W)$, siendo $W = \{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1 = 3\lambda,\ x_2 = 2\lambda,\ x_3 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2.- Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y una aplicación lineal f de E en F. Considerando el espacio vectorial producto $E\times F$, demostrar que la aplicación g, donde $g(u,v) = (u, v-f(u)), u\in E$ y $v \in F$ es un endomorfismo de $E\times F$. Estudiar si es automorfismo.

3.- Caracterizar los endomorfismos de $\mathbb{R}^2$ tales que el núcleo y la imagen son subespacios complementarios.

4.- Sean E, F y G tres espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo. Sean f y g aplicaciones lineales $f\colon E\to F$ y $g\colon F\to G$. Demostrar que $Nuc(g\circ f) = f^{-1}[Nuc\, g \cap Im\, f]$.

5.- Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida mediante $f(1,3,5) = (1,0)$, $f(0,1,1) = (1,0)$ y $f(0,0,1) = (0,0)$. Hallar la matriz de f y las ecuaciones del subespacio transformado del de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

6.- Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y) = (x+y, x-y, x+2y)$. Se pide

i) Ecuaciones paramétricas del núcleo de f e ímplicitas de la imagen de f.

ii) La matriz de f respecto de las bases $B_1 = \{(1,2),(2,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B_2 = \{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

7.- Sea $E = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\colon c = a+b\right\}$. Consideremos el endomorfismo $f\colon E\to E$ dado por $f\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3c+3a \\ -2a-b & a-b+3c\end{pmatrix}$. Hallar una base de E, la matriz de f en esa base y sendas bases de $Nuc\, f$ e $Im\, f$.

8.- ¿Cuál es la matriz de cambio de base entre $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ y $\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$ como bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^{\le n}[x]$? Utilizarla para probar la fórmula de Taylor:

$p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}p''(a)(x-a)^2 + \cdots \frac{1}{n!}p^{(n)}(x-a)^n$.

9.- Sabiendo que el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ lleva los vectores $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$ y $u_3 = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ en los vectores $(2,1,2)$, $(3,1,2)$ y $(6,2,3)$ respectivamente, encontrar la matriz de f en la base canónica y la matriz de f en la base $\{u_1,u_2,u_3\}$.

10.- Encontrar las matrices de los siguientes endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ realizando cambios de base adecuados.

i) Simetría con respecto a la recta $(x,y,z) = t(1,1,1),\ t\in\mathbb{R}$.

ii) Proyección sobre el plano $x-y+z = 0$.

iii) Giro de $90°$ respecto a la recta $x+y = 0,\ \ z = 0$.

11.- Dadas las siguientes aplicaciones lineales encontrar las ecuaciones paramétricas del núcleo y la imagen comprobando en cada caso la ecuación $dim(Nuc\, f) + dim(Im\, f) = dim(espacio\ inicial)$ e indicar si son inyectivas o suprayectivas:

i) $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_3, x_2, x_1+x_2+x_3)$.

ii) $f\colon \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, $f(z_1,z_2) = (iz_1+z_2, z_1+iz_2)$.

iii) $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ $f(x_1,x_2) = (x_1, x_1+x_2, 2x_1, x_1+2x_2)$.

iv) $f\colon \mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ tiene como matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ i & -1 & 0\end{pmatrix}$.

12.-(**) Se define el endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ que verifica las condiciones siguientes: f^2 es el endomorfismo nulo y los vectores $(1,1,1,1)$ y $(1,1,1,0)$ se transforman, respectivamente, en los vectores $(1,1,0,0)$ y $(1,0,0,0)$. Calcular la matriz del endomorfismo, así como su núcleo y su imagen.