Universidad Autónoma de Madrid — Curso 2007-08

ÁLGEBRA LINEAL — Primero de Matemáticas

Hoja 4. Aplicaciones lineales: Matriz de una aplicación lineal.

1.- Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

i) $f_1\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_1(A) = AB$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ii) $f_2\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_2(A) = A + B$, con $B \in M_2(\mathbb{R})$ fija.

iii) $f_3\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_3(A) = AB - BA$, donde $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

iv) $f_4\colon M_2(\mathbb{C}) \to V$ dada por $f_4(A) = A + A^t$, donde $V = \{A \in M_2(\mathbb{C})\colon A = A^t\}$.

v) $f_5\colon M_2(\mathbb{R}) \to W$ dada por $f_5(A) = AA^t$, donde $W = \{A \in M_2(\mathbb{R})\colon A = A^t\}$.

vi) $f_6\colon \mathbb{R}^{\leq n}[x] \to \mathbb{R}^{\leq n}[x]$ dada por $f_6(p(x)) = p(x + 1)$.

vii) $f_7\colon \mathbb{R}^{\leq n}[x] \to \mathbb{R}^{\leq n}[x]$ dada por $f_7(p(x)) = p(x) + 1$.

viii) $f_8\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_8(v) = \lambda_0 v$ con $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ fijo.

ix) $f_9\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_9(v) = v_0 - v$ con $v_0 \in \mathbb{R}^3$ fijo.

x) $f_{10}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_{10}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 1, x_3)$.

xi) $f_{11}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_{11}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, 0, 0)$.

xii) $f_{12}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_{12}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$.

xiii) $f_{13}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f_{13}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$.

xiv) $f_{14}\colon \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ dada por $f_{14}(p(x)) = \frac{\int_0^x p(t)dt}{x} + p'(x)$.

2.- Encontrar la matriz respecto a las bases canónicas de cada una de las siguientes aplicaciones lineales.

i) $g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $g_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_3)$.

ii) $g_2\colon \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^4$ dada por $g_2(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$.

iii) $g_3\colon \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ dada por $g_3(p(x)) = p(x + 1)$.

iv) $g_4\colon \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $g_4(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

3.- Encontrar la matriz respecto a las bases que se indican de cada una aplicaciones lineales del ejercicio 2.

i) Matriz de g_1 respecto a las bases $B_1 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, -1, 0)\}$ y B_2 la canónica de $\mathbb{R}^3$.

ii) Matriz de g_2 respecto a las bases $B_1 = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$ y B_2 la canónica de $\mathbb{R}^4$.

iii) Matriz de g_3 respecto a las bases $B_1 = B_2 = \{1 + x + x^2, -x^2, x^3, 1 - x\}$.

4.- Respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$ hallar las matrices de las siguientes aplicaciones lineales:

i) Giro de α grados respecto del eje z.

ii) Simetría con respecto a la recta $x = 0$, $y = 0$.

iii) Simetría con respecto a la recta $x = y$, $z = 0$.

iv) Proyección sobre el plano $x - y + z = 0$.

v) Simetría con respecto a la recta $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

5.- Demostrar que la aplicación $T\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $T(A) = traza(A)$ es lineal. Dar una base de $M_n(\mathbb{R})$ y encontrar la matriz de T con respecto a esa base y a la base canónica de $\mathbb{R}$.

6.- Dadas $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$ y $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2)$. Calcular $f^n = f \circ f \circ \overset{n}{\cdots} \circ f$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $g \circ f$.

7.- Hallar si es posible una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ que verifique $T(1) = x^2 + 1$, $T(1 + x) = x^2 + x$, $T(x - 1) = 0$.

8.- Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de él. Se define el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ de la forma $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_1$, $f(u_3) = 3u_1 + 2u_2$ y $f(u_4) = u_1 + u_2 + u_3$.

Calcular

i) La matriz A del endomorfismo respecto a la base B.

ii) Calcular A^2 y A^3 y demostar que A es nilpotente sin efectuar producto de matrices. (Una matriz cuadrada A es *nilpotente* si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$.)

9.-(**) Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$. $W_1 = \langle (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$ y $W_2 : \left.\begin{array}{rcrl} x_1 & + & 2x_2 & = 0 \\ x_1 & + & x_3 & = 0 \end{array}\right\}$.

Sea $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que verifica $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$ y $f(v) = -v$ para todo $v \in W_1 + W_2$. Hallar la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.