Universidad Autónoma de Madrid — Curso 2007-08

ÁLGEBRA LINEAL — Primero de Matemáticas

Hoja 3. Espacios vectoriales: Operaciones con subespacios.

1.- En cada uno de los siguientes casos hallar la intersección y la suma de los subespacios de $\mathbb{R}^3$.
i) $V_1 = \langle (1,0,1),(1,1,0)\rangle$ y $V_2 = \langle (1,2,3),(0,0,1)\rangle$.
ii) $V_1 = \{(0,\alpha.\beta)\colon \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ y $V_2 = \langle (1,1,1),(1,2,3)\rangle$.

2.- Se consideran los subespacios V y W del espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$. Las ecuaciones paramétricas de V son

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda+\gamma \\ x_2 & = & \mu+\gamma \\ x_3 & = & \lambda+\mu+2\gamma \end{array} \qquad \lambda,\mu,\gamma\in\mathbb{R},$$

siendo $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ la ecuación (implícita) de W. Hallar
i) Bases de V, $V+W$ y $V\cap W$.
ii) Ecuaciones (implícitas) de $V\cap W$.
iii) Una base de un complementario de $V+W$.
iv) Las coordenadas de $(2,3,5)$ respecto de la base de $V+W$ obtenida en i).

3.- Se consideran los subespacios vectoriales V y W de $\mathbb{R}^4$ donde $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1 = x_2 = x_3\}$ y las ecuaciones parametrícas de W son

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda+\mu+\beta \\ x_2 & = & \lambda+\mu \\ x_3 & = & \lambda \\ x_4 & = & \lambda+\beta \end{array} \qquad \lambda,\mu,\beta\in\mathbb{R}.$$

i) ¿Está $W\subset V$?
ii) Calcular $V\cap W$.

4.- Hallar en cada uno de los ejemplos siguientes la suma y la intersección del par de subespacios dados y comprobar que se verifica la ecuación $dim\,V_1 + dim\,V_2 = dim(V_1+V_2) + dim(V_1\cap V_2)$:
i) $V_1 = Com\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $V_2 = Com\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$. (Véase el ejercicio 11 de la hoja 2 para la definición de Com.)
ii) $V_1 = \{p(x)\in\mathbb{C}^{\leq 3}[x]\colon x+1 \text{ divide a } p(x)\}$, $V_2 = \{p(x)\in\mathbb{C}^{\leq 3}[x]\colon x-1 \text{ divide a } p(x)\}$.

5.- Decir cuáles de los siguientes pares subespacios se suman directamente y cuál es su suma (directa o no) en cada caso.
i) $V_1 = \{A\in M_n(\mathbb{R})\colon A = A^t\}$ (matrices simétricas) y $V_2 = \{A\in M_n(\mathbb{R})\colon A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas).
ii) $V_1 = \{f\colon[-1,1]\to\mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}$ (funciones pares) y $V_2 = \{f\colon[-1,1]\to\mathbb{R} \mid \colon f(-x) = -f(x)\}$ (funciones impares).
iii) $V_1 = \{f\colon[-1,1]\to\mathbb{R} \mid f(x) = 0,\ x\geq 0\}$ y $V_2 = \{f\colon[-1,1]\to\mathbb{R} \mid \colon f(x) = 0,\ x\leq 0\}$.

6.- Sean $V_1, V_2, \ldots, V_n$ subespacios vectoriales de un espacio vectorial V. Demostrar que si $n\geq 3$ las siguientes condiciones son equivalentes:
a) $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$
b) $V = \sum_{i=1}^n V_i$ y $V_i \bigcap \left(\sum_{i\neq k} V_k\right) = \{\vec{0}\}$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$.

7.- Sean F, G y H subespacios de un espacio vectorial V. Demostrar o dar contraejemplos de las siguientes afirmaciones.
i) $F\cap(G+H) = (F\cap G) + (F\cap H)$.
ii) $F + (g\cap H) = (F+G)\cap(F+H)$.
iii) $dim(F\cap(G+H)) = dim(F\cap G) + dim(F\cap H) + dim(F\cap H\cap G)$.

8.- Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $V = \langle a,b,c\rangle$ y $W = \langle d,e\rangle$, donde $a = (1,2,3,4)$, $b = (2,2,2,6)$, $c = (0,2,4,4)$, $d = (1,0,-1,2)$ y $e = (2,3,0,1)$. Determinar las dimensiones de $V, W, V\cap W$ y $V+W$ y dar una base de cada espacio.

9.- (**) Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ y sus subespacios V y W, donde

$$V = \langle 8 - 10x + x^2 + x^3, 1+x\rangle \qquad \text{y} \qquad W = \{p(x)\in\mathbb{R}^{\leq 3}[x] \mid p(1) = p(2) = 0\}.$$

Hallar una base de cada uno de los siguientes subespacios: W, un complementario de V, $V\cap W$ y $V+W$.