

Hoja 2. Espacios vectoriales: Bases y dimensión. Coordenadas.

1.- Se considera el espacio vectorial real \mathbb{R}^4 .

i) Probar que los vectores que verifican $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$ forman un subespacio vectorial y determinar una base de él.

ii) Hallar una base del subespacio $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = -x_3\}$.

2.- Se consideran los siguientes subespacios de \mathbb{R}^4 .

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

$$V_2 = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4) \rangle \text{ y}$$

$$V_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = \alpha + \beta, x_2 = \alpha + \gamma, x_3 = \gamma + \delta, x_4 = \alpha + \delta, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

¿Pertenece el vector $(1, 0, -1, -2)$ a dichos subespacios? En caso afirmativo calcular las coordenadas de dicho vector con respecto a alguna base de dichos subespacios (la elección de dicha base es arbitraria).

3.- El vector v del espacio vectorial \mathbb{R}^3 tiene coordenadas $(1, 2, 3)$ respecto de la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Hallar las coordenadas de v en la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ sabiendo que

$$u_1 = 3v_1 + 2v_2 - v_3; \quad u_2 = 4v_1 + v_2 + v_3; \quad u_3 = 2v_1 - v_2 + v_3.$$

4.- En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ se considera el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

i) Demostrar que los polinomios $p(x), p'(x), p''(x)$ y $p'''(x)$ constituyen una base del espacio $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

ii) Si $p(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, hallar en la base $B = \{p(x), p'(x), p''(x), p'''(x)\}$ las coordenadas del vector $q(x) = 15x^3 - 21x^2 - 18x + 37$.

5.- Dados los polinomios $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = (x + 1)^2$, $p_3(x) = x$, $p_4(x) = x^3$, probar que constituyen una base de $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Hallar las coordenadas de $q(x) = (x + 1)^3$ respecto de dicha base.

6.- Considerar las inclusiones $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Demostrar que cada uno de estos cuerpos es un espacio vectorial sobre el anterior y determinar sus dimensiones. Demostrar que en \mathbb{C}^2 puede definirse una estructura de espacio vectorial real ¿cuál es la dimensión de este espacio?

7.- Estudiar si los siguientes conjuntos son bases de espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$.

i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

8.- Encontrar una base de \mathbb{R}^4 que contenga a los vectores $(0, 0, 1, 1)$ y $(1, 1, 0, 0)$.

9.- Se considera el espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$. ¿Qué dimensión tiene el subespacio $T = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$? (Véase el ejercicio 9 de la hoja 1 para la definición de traza).

10.- Demostrar que el conjunto $S = \{x + 1, x - 1, x^2 - 1, x^2 + 1\}$ es un sistema de generadores del espacio vectorial real $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$. Encontrar un subconjunto S_1 de S que sea base de $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$.

11.- Los siguientes subconjuntos y familias de vectores de algunos espacios vectoriales son subespacios y bases de estos. Verificar la verdad o falsedad de esto en los ejemplos siguientes:

i) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 1\}$; $\{(2, 1)\}$.

ii) $\{p(x) \in \mathbb{C}^{\leq 3}[x] : (x - 1) \text{ divide a } p(x)\}$; $\{x - 1, x^2 - 1\}$.

iii) $Com(D) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : DA = AD\}$ con $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

12.- (***) Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Demostrar que los vectores

$$1 + 2x - x^2 - 2x^3, \quad 2 + 3x - x^3, \quad 1 + 3x - x^2 \quad \text{y} \quad x^3$$

forman base de $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ y hallar las coordenadas de $7 + 14x - x^2 + 2x^3$ respecto de dicha base.