Universidad Autónoma de Madrid Curso 2007-08

ÁLGEBRA LINEAL Primero de Matemáticas

Hoja 1. Espacios vectoriales: Dependencia lineal y subespacios

1.- Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.

i) ¿Son los vectores $(1,2,3),(1,1,1)$ combinación lineal del sistema $S=\{(1,0,1),(0,2,2)\}$?

ii) Calcular x e y, si es posible para que el vector $(1,2,x,y)$ sea combinación lineal de los vectores $(1,2,0,2)$ y $(1,1,2,3)$.

2.- Estudiar si las siguientes familias de vectores del espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes.

i) $S=\{(1,2,3,0),(4,3,4,-16),(7,3,4,5)\}$.

ii) $S=\{(1,0,0,-1),(2,1,1,-2),(0,1,1,0),(1,-1,-1,-1)\}$.

3.- Suponer que los vectores $v_1,v_2,\dots,v_n$ de un espacio vectorial V son linealmente independientes, demostrar que también son linealmente independientes los vectores

$u_1=v_1;\qquad u_2=v_1+v_2;\qquad u_3=v_1+v_2+v_3;\qquad \cdots\qquad u_n=v_1+v_2+\cdots+v_n.$

4.- Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

i) $A=\{(3x_2,x_2,x_4+x_2,x_4)\mid x_2,x_4\in\mathbb{R}\}$.

ii) $B=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1\cdot x_2=0\}$.

iii) $C=\{(x_1,x_2,x_1,x_2)\mid x_1=1\}$.

iv) $D=\{(x_1,x_1,x_1,x_1)\mid x_1\in\mathbb{R}\}$.

v) $E=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1=t,x_2=t,x_3=2t,x_4=5t,t\in\mathbb{R}\}$.

5.- Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ y los polinomios $p_1(x),p_2(x)$ y $p_3(x)$ de $\mathbb{R}[x]$. Suponer que

$$\begin{vmatrix} p_1(a_1) & p_2(a_1) & p_3(a_1)\\ p_1(a_2) & p_2(a_2) & p_3(a_2)\\ p_1(a_3) & p_2(a_3) & p_3(a_3)\end{vmatrix}\neq 0$$

para algunos números reales a_1,a_2,a_3. Demostrar que el sistema $\{p_1(x),p_2(x),p_3(x)\}$ es linealmente independiente.

6.- Se considera el espacio vectorial V de las funciones $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Estudiar si los siguientes sistemas de vectores son linealmente independientes.

i) $S=\{sen\,x,cos\,x,1\}$.

ii) $S=\{e^x,e^{x+2}\}$.

iii) $S=\{2,x+2,x^2\}$.

iv) $S=\{0,1,x+1\}$.

7.- Se considera el espacio vectorial V de las funciones $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de V son subespacios?

i) $W_1=\{f\in V\colon f(-x)=f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}\}$.

ii) $W_2=\{f\in V\colon f(-x)=-f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}\}$.

iii) $W_3=\{f\in V\colon f \text{ es continua}\}$.

iv) $W_4=\{f\in V\colon f(0)=f(1)\}$.

v) $W_5=\{f\in V\colon f \text{ es dos veces derivable y } f''-f'+f=0\}$.

8.- Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$.

i) $V_1=\{A\in M_2(\mathbb{R})\colon rg(A)=1\}$, donde $rg(A)$ denota el rango de A.

ii) $V_2=\{A\in M_2(\mathbb{R})\colon AB=BA\}$, donde B es la matriz $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$.

iii) $V_3=\{A\in M_2(\mathbb{R})\colon a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}=0\}$.

9.- Se considera el espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$. Dada una matrix $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, se llama *traspuesta* de A a la matriz $A^t=(b_{ij})$ tal que $b_{ij}=a_{ji}$, y se llama *traza* de A al número $tr(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}$. Estudiar si los siguientes subconjuntos de $M_n(\mathbb{R})$ son subespacios.

i) $W_1=\{A\in M_n(\mathbb{R})\colon A=A^t\}$ (matrices simétricas).

ii) $W_2=\{A\in M_n(\mathbb{R})\colon A=-A^t\}$ (matrices antisimétricas).

iii) $W_3=\{A\in M_n(\mathbb{R})\colon tr(A)=1\}$.

iv) $W_4=\{A\in M_n(\mathbb{R})\colon tr(A)=0\}$.

10.- (**) Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

i) ¿Es $W_1=\{p(x)\in\mathbb{R}^{\leq 3}[x]\colon (x-1) \text{ divide } p(x)\}$ subespacio de $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$?

ii) ¿Es $W_2=\{p(x)\in\mathbb{R}^{\leq 3}[x]\colon p(2)=0\}$ subespacio de $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$?

iii) Escribir, si es posible, los polinomios $1,x,x^2,x^3$ como combinación lineal del sistema de vectores formado por $p(x)=1+x+x^2+x^3$ y sus tres primeras derivadas $p'(x),p''(x)$ y $p'''(x)$.