Universidad Autónoma de Madrid — Curso 2007-08

ÁLGEBRA LINEAL — Primero de Matemáticas

Hoja 11. Estructura de los endomorfismos: Formas de Jordan.

1.- Cada una de las siguientes matrices J es una forma de Jordan de una cierta matriz A. Para cada una de ellas se pide: a) hallar el polinomio característico de A y b) los diagramas de los subespacios maximales $M(\lambda_i)$ para cada uno de los autovalores λ_i de A.

$$(1)\ J = \begin{pmatrix} 5&1&0&0&0&0\\ 0&5&1&0&0&0\\ 0&0&5&0&0&0\\ 0&0&0&5&1&0\\ 0&0&0&0&5&0\\ 0&0&0&0&0&6 \end{pmatrix} \qquad (2)\ J = \begin{pmatrix} 2&1&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0\\ 0&0&2&1&0&0\\ 0&0&0&2&1&0\\ 0&0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \qquad (3)\ J = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

2.- Hallar una forma de Jordan y la correspondiente matriz de paso de las siguientes matrices.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4&0&-4&11\\ -6&3&-3&9\\ 5&0&5&-7\\ -1&0&-1&5 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1&0&2&-6\\ 0&1&-1&3\\ 0&0&1&3\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1&2&3&0&0\\ 0&1&2&0&0\\ 0&0&1&2&0\\ 0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 6&-9&5&4\\ 7&-13&8&7\\ 8&-17&11&8\\ 1&-2&1&3 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 3&1&-1&-1\\ 0&2&0&1\\ 1&1&1&0\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 2&0&0&-2\\ 5&2&-2&2\\ 3&1&0&-3\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&-1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 1&3&2&0\\ 0&1&0&0\\ 0&2&-2&0\\ 6&6&-3&4 \end{pmatrix} \qquad A_9 = \begin{pmatrix} 2&0&1&2\\ -1&3&0&-1\\ 2&-2&4&6\\ -1&1&-1&-1 \end{pmatrix}$$

3.- Para cada $a, b \in \mathbb{C}$ se considera la siguiente la matriz $A_{a,b} = \begin{pmatrix} 5&0&0\\ 0&-1&b\\ 3&0&a \end{pmatrix}$. Se pide:

a) estudiar para qué parámetros a y b la matriz $A_{a,b}$ es diagonalizable,

b) hallar una forma de Jordan y la correspondiente matriz de paso, para los valores $a = -1$ y $b = -1$, y hallar $(A_{1,10})^{129}$.

4.- Calcular una forma de Jordan de la matriz A según los valores de a, así como la correspondiente matriz de paso, donde $A = \begin{pmatrix} a&a&0&0\\ 0&a&-2a+1&-2a+1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$.

5.- Sea f un endomorfismo de $\mathbb{K}^5$ que verifica lo siguiente:

a) $f(0,1,0,0,0) = (0,-1,0,0,0)$, $f(0,0,1,1,0) = (0,0,1,1,0)$ y $f(0,0,0,0,1) = (1,-1,0,0,2)$, y

b) las ecuaciones de $Nuc(f - 2Id)$ son $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0. \end{cases}$

Calcular una forma de Jordan de f y la matriz de f (respecto de la base canónica).

6.- Sea $f \in End(\mathbb{K}^6)$ que verifica lo siguiente: a) f no es inyectiva; b) 5 es un autovalor de f de multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 2, y c) 4 y 7 son autovalores de f. Hallar una matriz de Jordan de f.

7.- Sea $f \in End(\mathbb{K}^{10})$ que verifica lo siguiente: a) el polinomio característico de f es $p(\lambda) = (2-\lambda)^4(3-\lambda)^6$; b) $dim\, E^3(2) = 3$ y $dim\, E^1(3) = 5$. Hallar una matriz de Jordan de f.

8.- Expresar las inversas de las matrices A_2 y A_8 (del ejercicio 2) como polinomios matriciales en A.