

**Hoja 10. Estructura de los endomorfismos: Diagonalización.**

1.- Dada  $A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ , calcular  $A^{1438}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ .

2.- Sea  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  una base del  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $E$  y  $f \in \text{End}(E)$  tal que  $f(\mathbf{e}_1) = \dots = f(\mathbf{e}_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i$ , donde  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ . Demostrar que  $f$  es diagonalizable si y sólo si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ .

3.- Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  cuyos elementos son números reales y nilpotente de orden  $p$ , es decir  $A^p = \mathbf{0}$  y  $A^{p-1} \neq \mathbf{0}$  con  $p \in \mathbb{N}$ . Probar que el único autovalor de  $A$  es el 0.

4.- Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & f & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Determinar los valores propios de  $A$ .
- b) Discutir las condiciones que deben cumplir  $a, b, c, d, e, f$  para que  $A$  sea diagonalizable.
- c) En las condiciones para las que  $A$  es diagonalizable, obtener los subespacios propios asociados a los dos valores propios existentes.
- d) Calcular la matriz de paso a forma diagonal.

5.- Demostrar o dar un contraejemplo para decidir la veracidad de las siguientes afirmaciones.

- a) Toda matriz invertible es diagonalizable.
- b) Si  $A$  es diagonalizable, entonces  $A^n$  es diagonalizable para  $n \in \mathbb{N}$ .
- c) Si  $A$  y  $B$  son diagonalizables, entonces  $A + B$  y  $AB$  son diagonalizables.

6.- Sea  $f$  un endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  definido en la base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  por  $f(\mathbf{e}_1) = (\alpha + 1)\mathbf{e}_1 - \alpha\mathbf{e}_2 + \alpha\mathbf{e}_3$ ;  $f(\mathbf{e}_2) = (\alpha + \beta)\mathbf{e}_1 - \alpha\mathbf{e}_2 + (\alpha - 1)\mathbf{e}_3$ ;  $f(\mathbf{e}_3) = \beta\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- a) Determinar los valores propios de  $f$  comprobando que no dependen ni de  $\alpha$  ni de  $\beta$ .
- b) Calcular el valor de  $\alpha$  para el que el endomorfismo  $f$  sea diagonalizable. Obtener en estas condiciones una base formada por vectores propios.

7.-(\*) En el espacio  $\mathbb{R}^3$  se considera el endomorfismo  $f$  dado por  $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ ;  $f(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ ;  $f(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ , en la base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_2 = (-1, 0, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ .

- a) Calcular las matrices de  $f$  en la base  $\mathcal{B}$  y en la base canónica.
- b) Calcular el núcleo de la aplicación.
- c) Buscar una base de vectores en la que la aplicación  $f$  tenga una matriz diagonal.

8.- Sea la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

- a) Probar que 1 es valor propio. Calcular sus multiplicidades algebraica y geométrica. Dar una base del subespacio propio asociado a este valor propio.
- b) Estudiar si es diagonalizable y, en caso afirmativo, encontrar una base de  $\mathbb{R}^4$  formada por vectores propios.

9.- Probar que si una matriz  $A \in M_2(\mathbb{R})$  tiene un sólo valor propio  $\lambda$  de multiplicidad algebraica 2, entonces  $(A - \lambda I)^2 = 0$ .

10.- Determinar para qué valores de  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}$  la matriz  $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  es diagonalizable en  $\mathbb{R}$ .

11.- Estudiar para qué valores de  $c$  la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 - c \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  es diagonalizable.

12.- Sea  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  que verifica: a)  $f(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$  y b) 2 y 3 son valores propios de  $f$ . ¿Es  $f$  diagonalizable?

13.- Encontrar los valores de  $a, b \in \mathbb{R}$  para que la matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$  sea diagonalizable sobre  $\mathbb{R}$ .