

EXAMEN DE ÁLGEBRA LINEAL (9/02/07)

Primero de Matemáticas

APELLIDOS:..... **NOMBRE:**..... **GRUPO:**...

1.- Contesta razonadamente a las siguientes preguntas.

(1.1)[0'5 puntos] Sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^2 . Sean B_1 y B_2 bases de \mathbb{R}^2 tales que la matriz de f respecto a estas bases $M(f; B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es f necesariamente la aplicación identidad en \mathbb{R}^2 ?

(1.2)[0'5 puntos] Sean f y g dos endomorfismos de \mathbb{R}^3 . ¿Es $Im(f \circ g)$ subespacio de $Im(f)$?

(1.3)[0'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. ¿Puede ser f inyectiva?

(1.4)[0'5 puntos] Sea $A \in M_3(\mathbb{C})$ una matriz *no* diagonal tal que su polinomio característico tiene una raíz triple. ¿Puede ser A diagonalizable?

2.- Se considera el \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^4 y sus subespacios V y W , donde

$$V = \langle (1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 0) \rangle \quad \text{y} \quad W : \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Se pide hallar:

(2.1)[1'5 puntos] Bases de $V \cap W$ y de $V + W$.

(2.2)[Un punto] Una base de \mathbb{R}^4/V .

3.-[1'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R}^{\leq 2}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[X]$ la aplicación lineal determinada por las condiciones:

(i) $f(3X + X^2) = 3X - X^2$, y

(ii) todos los polinomios $p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 2}[X]$ que verifican $p(1) = p(2)$ están en el núcleo de f .

Halla la matriz de f respecto de la base $B = \{1, X, X^2\}$.

4.-[Un punto] Se consideran la base $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (1, 2, -1)\}$ de \mathbb{R}^3 y la forma lineal $\omega \in (\mathbb{R}^3)^*$, $\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2$. Halla las coordenadas de ω respecto a la base dual de B .

5.- Se consideran las siguientes matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se pide hallar:

(5.1)[Un punto] Bases del núcleo y de la imagen del endomorfismo f de \mathbb{R}^3 ,

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(5.2)[Un punto] Formas de Jordan de A y C .

(5.3)[Un punto] Una matriz de paso para la forma de Jordan de A .