Tema II: Aplicaciones lineales

- Definiciones y ejemplos. Matriz asociada a una aplicación lineal.
- Núcleo e imagen. Cambios de base.
- Espacio vectorial cociente.Teoremas de isomorfía. El espacio de las aplicaciones lineales.

Ejemplos de aplicaciones lineales

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f es el giro de 90^o (en sentido inverso de las agujas del reloj). Para cada $v \in \mathbb{R}^2$, $f(v)$ es el vector obtenido girando v un ángulo de 90^o.
- $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, g es la proyección en el plano $x+y+z=0$. Para cada $v \in \mathbb{R}^3$, $g(v)$ es la proyección de v sobre el plano dado.
- $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

  $h(x,y) = (x+2y, -x+3y, -3x-y)$.

¿Qué es una aplicación lineal?

Dados dos espacios vectoriales $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ una función $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una aplicación lineal si preserva la dependencia lineal. Es decir, si un vector v de $\mathcal{V}$ depende linealmente de $v_1, \dots v_s \in \mathcal{V}$ entonces su imagen tiene la misma dependencia lineal de las imágenes de $v_1, \dots v_s$. En símbolos,

si $v = a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s$ entonces $f(v) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_s f(v_s)$

Definición de aplicación lineal

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Una función $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una aplicación lineal (o una transformación lineal u homomorfismo de espacios vectoriales) si

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in \mathcal{V} \qquad f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2)$$

Propiedades básicas

Sea $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. Entonces

1. $f\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i f(v_i)$.
2. $f(\bar{0}_{\mathcal{V}}) = \bar{0}_{\mathcal{W}}$.
3. $f(-v) = -f(v)$.
4. Si E es subespacio de $\mathcal{V}$ entonces $f(E) = \{f(v) \in \mathcal{W} \colon v \in E\}$ es subespacio de $\mathcal{W}$.
5. Si F es subespacio $\mathcal{W}$ entonces $f^{-1}(F) = \{v \in \mathcal{V} \colon f(v) \in F\}$ es subespacio de $\mathcal{V}$.
6. $v_1, \ldots v_m$ l.d. implica $f(v_1), \ldots, f(v_m)$ l.d. (pero $f(u_1), \ldots, f(u_s)$ l.d. no implica $u_1, \ldots, u_s$ l.d.).
7. Si $\mathcal{U}$ es otro $\mathbb{K}$-e.v. y $g\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ es una aplicación lineal, entonces $f \circ g\colon \mathcal{U} \to \mathcal{W}\colon u \mapsto f(g(u))$ también es una aplicación lineal.

Ejemplo típico de aplicación lineal

Se consideran los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$. La aplicación

$$f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

y definida por

$$f(X) = AX$$

ó

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ó

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

es una aplicación lineal.

Más ejemplos de aplicaciones lineales

La aplicación "coordendas"

Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sea B una base de $\mathcal{V}$. La aplicación $f\colon \mathcal{V} \to \mathbb{K}^n$ definida por: Para cada $v \in \mathcal{V}$

$$f(v) = \text{coordenadas de } v \text{ respecto a } B,$$

es una aplicación lineal.

La aplicación "proyección"

Se consideran los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathbb{K}^{n+s}$ y $\mathbb{K}^n$. La aplicación $f\colon \mathbb{K}^{n+s} \to \mathbb{K}^n$ y definida por

$$f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+s}) = (x_1, \ldots, x_n)$$

es una aplicación lineal.

Ejemplos de aplicaciones no lineales

1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x, y) \mapsto (x, y^2)$
2. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x, y) \mapsto (x, e^y)$
3. $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon (x, y, z) \mapsto (x + 1, y)$

Proposición 2.1

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathcal{V}$ y sean $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vectores de $\mathcal{W}$. Entonces, existe una única aplicación lineal

$$f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

tal que

$$f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, \ldots, f(v_n) = w_n$$

Observaciónes:

- Una aplicación lineal queda determinada conociendo las imágenes de los vectores de una base.
- Los $w_1, w_2, \ldots, w_n$ no necesitan ser distintos ni ser distintos de $\bar{0}_{\mathcal{W}}$ ni ser l.i.

Matriz de una aplicación lineal

Definición

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Sean $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ respectivamente. Sea $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, sean $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ las coordenadas de $f(v_j)$ respecto B_2.

La matriz de f respecto de las bases B_1 y B_2 es

$$M(f; B_1, B_2) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

Es decir, es la matriz que tiene por columnas las coordenadas respecto a B_2 de las imágenes mediante f de los vectores de la base B_1

Matriz de una aplicación lineal

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Sean B_1 y B_2 bases de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ respectivamente. Sea $f\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal y $A = M(f; B_1, B_2)$. Sea v un vector de $\mathcal{V}$. Sean

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ las coordenadas de v respecto a B_1 y sean

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ las coordenadas de $f(v)$ respecto de B_2.

La expresión matricial de f respecto de B_1 y B_2

$$AX = Y$$