BOLETÍN DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. MATARRAÑA – Número 9 – SEPTIEMBRE 2.009

$4^{10} + 6^{10} + 7^{10} + 9^{10} + 3^{10} + 0^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 4^{10} = 4679307774$

Quienes hayan leído nuestros números anteriores sabrán lo que es un *número narcisista* y entenderá el "extraño" título de este artículo. Se trata de un número que puede ser expresado como suma de sus cifras elevadas a una cierta (siempre la misma) potencia. El ejemplo más conocido es 153, que puede expresarse como $1^3+5^3+3^3$.

No existe ningún número narcisista de dos cifras. Se han encontrado narcisistas de hasta 39 cifras. En base diez la mayor cantidad *n* de cifras de este tipo de números es 60 ya que si n > 60 se da que $n \cdot 9^n < 10^{n-1}$.

Hay otro tipo de números similares pero que tienen una pequeña variante. Son aquellos que tienen la propiedad de ser iguales a la suma de sus dígitos cada uno elevado a la potencia igual al dígito. Es decir son números en los que se cumple :

$$abcd = a^a + b^b + c^c + d^d$$

No hay muchos de estos números. Sólo se conocen tres en base diez, ellos son: 1, 438579088 y … falta uno ¿cuál es?

Un *número narcisita salvaje* es un número (entero y positivo) que puede ser expresado mediante sus cifras (cada cifra puede usarse una única vez y en el orden en que aparezca en el número) y las operaciones: suma (+), resta (–), multiplicación (×), división (÷), potencia (^), radical (√) y factorial (!).

Un ejemplo sencillo es 360 = 3! × 60, pero hay muchos más. Aquí van 3 ejemplos:

$$456 = 4 \cdot (5! - 6);$$

$$1944 = 1 \cdot \sqrt{9^4} \cdot 4!$$

$$1296 = \sqrt{\sqrt[\sqrt[-1]{2^{\sqrt{9}}}]{6}}$$

Además es *narcisista radical* si el radical (√) es imprescindible en esta descomposición y no requiere el factorial, por ejemplo:

$$729=(7+2)^{\sqrt{9}} = (\sqrt{(7+2)}!!+9 = 7+2+(\sqrt{9})!!.$$

(Entiéndase x!! como (x!)!.)

En la web http://www.numq.com/pwn/, Collin Rose muestra los números narcisistas salvajes de 2, 3 y 4 cifras. En algunos (pocos) casos, la concatenación de cifras es única, por ejemplo *360=3!×60*.

Si se restringe la cantidad de operaciones permitidas a + – × ÷ ^, el número de formas en que pueden combinarse los dígitos de cualquier entero es finito. Sólo hay 14 enteros narcisistas menores que 10.000 que pueden obtenerse con esta restricción, se conocen como *'nice' Friedman numbers*, y son:

$127 = -1 + 2^7$;	$343 = (3 + 4)^3$;
$736 = 7 + 3^6$	$1285 = (1 + 2^8)5$
$2187 = (2 + 1^8)^7$	$2502 = 2 + 50^2$
$2592 = 2^5\ 9^2$	$2737 = (2 \times 7)^3 - 7$
$3125 = (3^1 + 2)^5$	$3685 = (3^6 + 8)5$
$3864 = 3(-8 + 6^4)$	$3972 = 3 + (9 \times 7)^2$
$4096 = 4^{0/9+6}$	$6455 = (6^4 - 5)5$

Menores que 10.000 también hay sólo 14 narcisistas radicales. Son los siguientes:
729, 1296, 1764, 2378, 2744, 2746, 3645, 4372, 4374, 4913, 5184, 6495, 6859, 8192.

Lamentablemente no hay sitio para escribir sus descomposiciones, el lector puede intentar deducirlas o consultar la web de Collin Rose.

Y para acabar, algo bonito: cuatro narcisistas salvajes primos

$$127 = -1 + 2^7;\ 719 = -\sqrt[7]{1} + \sqrt{9}!!;$$

$$727 = \sqrt{7+2}!!+7 = 7 + \sqrt{2+7}!!\ ;\ 733 = 7+3!+3!!$$

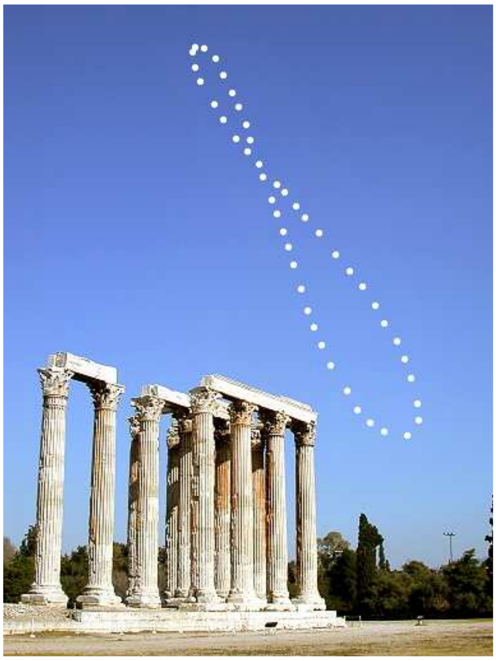
Y un cuadrado y de Fibonacci:

$$144 = (1+4)!+4! = \left(\sqrt{1+4!}\right)!+4! =$$

$$= (-1+4)! \cdot 4! = (1+\sqrt{4})! \cdot 4!$$

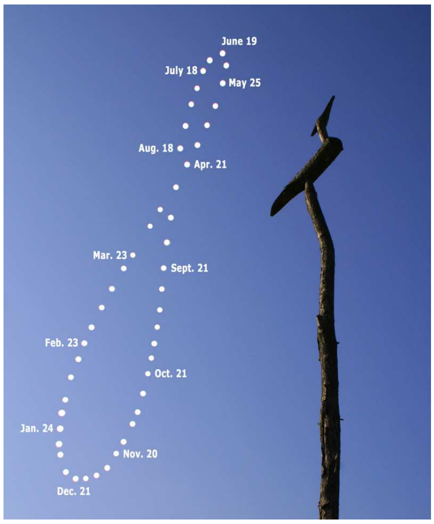
Analemas

En nuestro suplemento al Materraña de junio de 2.009 ya se habló del analema.Si se registra cada día la posición del Sol en el cielo durante un año, a la misma hora solar y desde el mismo lugar, el trazo obtenido es el analema.



Pueden observarse analemas en todos planetas del Sistema Solar, pero poseen una forma diferente al observado en la Tierra, pudiendo llegar a ser curvas diferentes (en Marte es similar a una gota de agua), aunque poseen como característica común ser siempre cerradas.

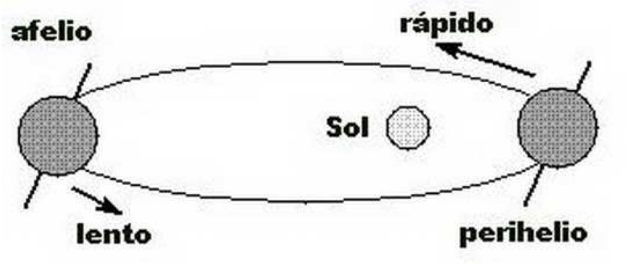
Para el terrestre se puede deducir que el punto superior corresponde al solsticio de verano (cuando el sol está más alto en el cielo, aproximadamente el 21 de junio), el punto inferior al solsiticio de invierno (en torno al 21 de diciembre) y que el corte se produce a diferentes alturas dependiendo de la latitud terrestre en la que se tomen las fotografías.



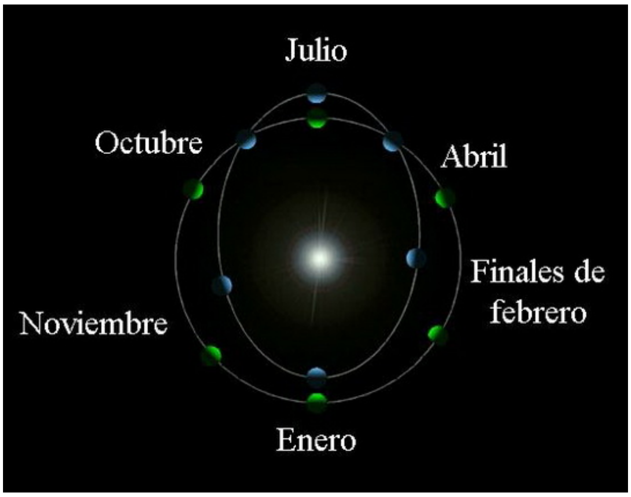
La luna también forma su analema:

El analema y la Ecuación del tiempo son resultado de la suma de los efectos de la elipticidad de la órbita terrestre y de la inclinación del eje de giro de nuestro planeta respecto al plano de la órbita en torno al Sol.

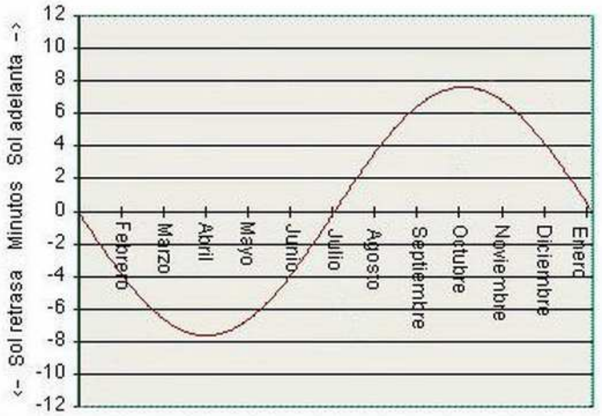
La Tierra, como el resto de planetas, en su movimiento de traslación alrededor del Sol se mueven siguiendo una elipse, tal como descubrió el astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler en el siglo XVII. Kepler también descubrió que los planetas no giran alrededor del Sol con la misma velocidad siempre, sino que van más rápido en el perihelio (cuando están más cerca del Sol), y más despacio en el afelio (cuando están más lejos).



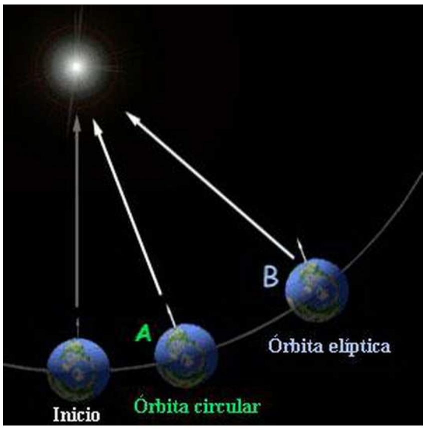
Para ver cómo afecta al analema la forma de la órbita, vamos a imaginar que hay dos Tierras, una la real, moviéndose en una elipse con velocidad variable, y otra ficticia que se moviera en una circunferencia siempre a la misma velocidad –que es la que viene representada por nuestros relojes-.



Podemos ver que a principios de enero las dos Tierras están alineadas con el Sol. Según avanza el año la Tierra real, al moverse más rápido puesto que está más cerca del Sol, va adelantando a la Tierra ficticia, hasta principios de abril, momento en que la Tierra real empieza a estar más lejos del Sol que la Tierra ficticia, por lo que se mueve más despacio, con lo que la diferencia comienza a disminuir. Llegamos a principios de julio, donde ambas Tierras vuelven a estar alineadas con el Sol. Ahora se da el caso contrario, la Tierra real se atrasa con respecto a la Tierra ficticia hasta que llegamos a principios de octubre, instante en el que la Tierra real empieza a ir más rápido hasta que llegamos otra vez a enero donde vuelven a estar alineadas. Esta diferencia en las posiciones hace que el Sol pase por el meridiano (el punto donde alcanza mayor altura) a veces antes del mediodía, y a veces después, con una diferencia máxima de unos ocho minutos a principios de los meses de abril y octubre, según vemos a continuación.

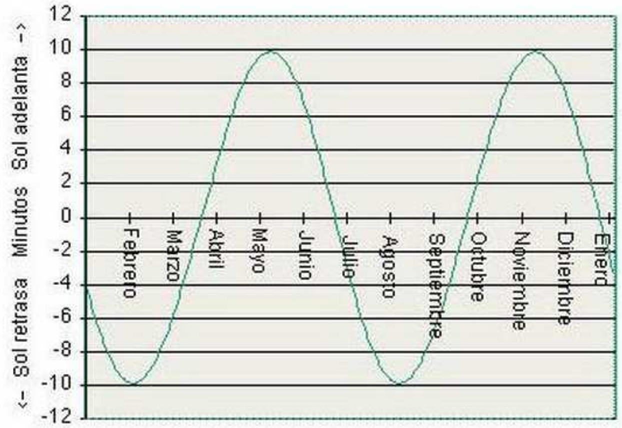


Podréis pensar: pero si la Tierra va más rápido al principio del año, ¿por qué el Sol se retrasa? La explicación es la siguiente: La Tierra gira sobre sí misma siempre a la misma velocidad, por lo que cuando va más deprisa alrededor del Sol, tiene que compensar esa diferencia de velocidad; en otras palabras: tiene que dar tiempo al Sol a que llegue al meridiano, es decir a su culminación. En verano ocurre lo contrario: al ir más despacio, el Sol llega “antes de lo previsto”.

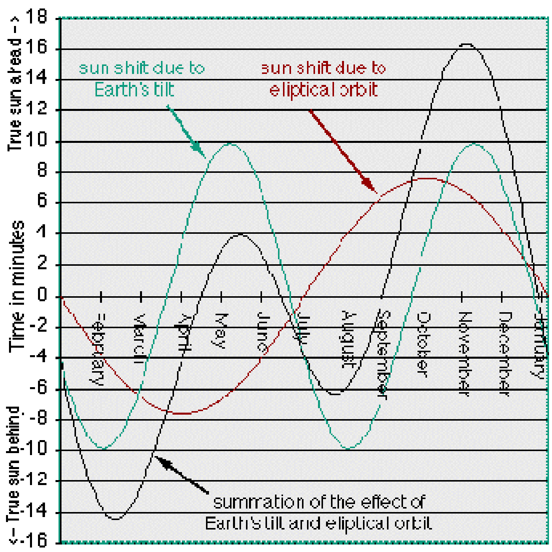


Veamos a continuación como afecta la inclinación del eje de rotación de la Tierra respecto a su órbita en torno al Sol. Aunque sabemos que es la Tierra la que gira alrededor del Sol, vamos a suponer como en el caso anterior que hay 2 Soles, uno real, moviéndose en el cielo según su órbita aparente, y otro ficticio que se moviera como si la Tierra no estuviera inclinada. En ambos casos, vamos a suponer que se mueven en órbitas circulares, siempre con la misma velocidad.

A finales de marzo, cuando comienza la primavera, ambos Soles están alineados. Debido a la inclinación en la órbita, el Sol va retrasando poco a poco hasta principios de mayo, cuando empieza a recuperar el terreno hasta llegar a finales de junio (comienzo del verano) en que vuelven a estar alineados. De junio a septiembre ocurre lo contrario: el Sol real va por delante del ficticio. De finales de septiembre a finales de marzo el ciclo se repite: el Sol real atrasa, se iguala con el ficticio en diciembre, lo vuelve a adelantar hasta que vuelven a estar igualados en primavera. Esta diferencia de posición se traduce en una diferencia de tiempos, según el gráfico siguiente:

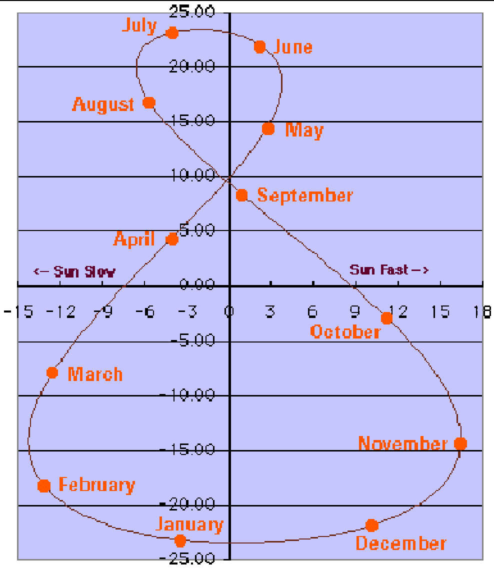


Si juntamos ambos gráficos en uno sólo, tenemos lo siguiente:



EQUATION-OF-TIME

La siguiente figura recoge esta misma información:



ANALEMMA CURVE

Aquí se muestra la posición verdadera del Sol en el cielo a lo largo del año. El eje Y representa la declinación del Sol en el cielo, que va de -23’45º (en invierno) a +23’45º (en verano). El eje X representa la diferencia en tiempo entre lo que marca nuestro reloj y la posición real del Sol (es la ecuación del tiempo). En él se ve que el día más largo del año cae alrededor del 21 de junio y que el ocaso más avanzado sucede unos días después. Lo contrario ocurre alrededor del 21 de diciembre.

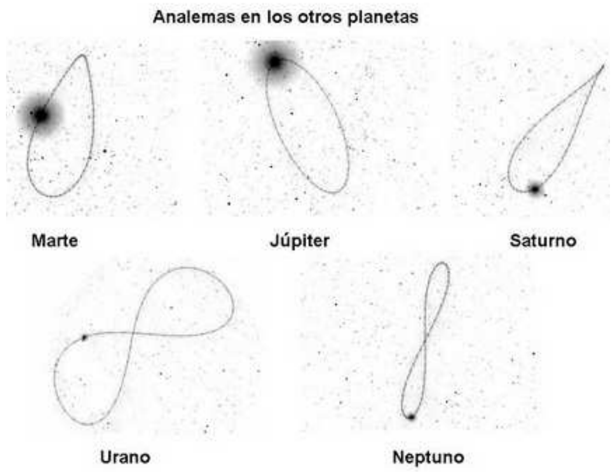
EL ANALEMA EN OTROS PLANETAS

Como la excentricidad de la órbita y la inclinación del eje de giro respecto al plano del movimiento son característicos de cada planeta, en cada uno aparece un analema diferente. En general cuanto más circular sea la órbita, más se parecerá el analema a un ocho y cuanto más alargada sea, más se parecerá a un óvalo; por otro lado, cuanto más inclinado esté, más deformado quedará el analema. En realidad Mercurio y Venus no presentan analema alguno. De la tierra y Marte ya hemos hablado. Para Júpiter, la forma de su analema es un óvalo, dado que está muy poco inclinado con respecto a su órbita.

El de Saturno está a medio camino entre el terrestre y el marciano.

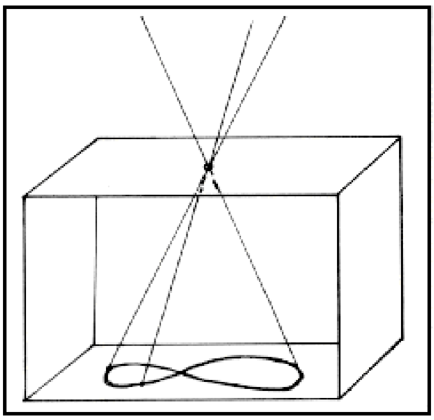
Urano tiene eje de rotación muy inclinado con respecto a su órbita, por lo que no podemos hablar de un analema propiamente dicho. Si estuviéramos en el ecuador (único sitio donde sí se puede ver el analema), veríamos un ocho inclinado.

El analema de Neptuno presenta la forma de un ocho casi perfecto (más que en la Tierra), pero ligeramente inclinado. Plutón tiene analema muy parecido al de Urano, al tener ambos una inclinación relativamente parecida.



¿Cómo obtener una analema?

Se construye una caja, preferiblemente de madera, pues dado el tiempo que dura la experiencia, si el material fuese, por ejemplo, cartón puede terminar estropeándose.



1. En el centro de la cara superior se abre un agujero de 3 o 4 mm. de diámetro. Interesa que esa cara sea de un material fino para que permita que un rayo de Sol pase limpiamente a través del agujero.

2. Una cara lateral se deja sin tapa a fin de ver el punto de luz reflejado en el fondo de la caja, en el que se ha fijado una cartulina blanca.

3. Con la ayuda de una brújula, todos los días a las doce hora solar (13h en invierno y 14h en verano) se orienta la caja siempre de la misma forma y se marca con un lápiz la situación del punto de luz, datándose el mismo.

El movimiento del Sol, hace que ese punto luminoso se desplace cada día. Al mes empieza a notarse ya la formación de una curva que una vez completado el ciclo es similar a un ocho panzudo.

Por cierto, si realiza un analma con una cámara de fotos y tiene suerte y recoge un eclipse solar, entonces obtendrá un tutulema.

Un programilla (250 Kb) para dibujar anatemas introduciendo la excentricidad de la órbita y la inclinación del eje de giro se puede escargar en: http://www.analemma.com/Graphics/other_Analemmas/Analemma.zip

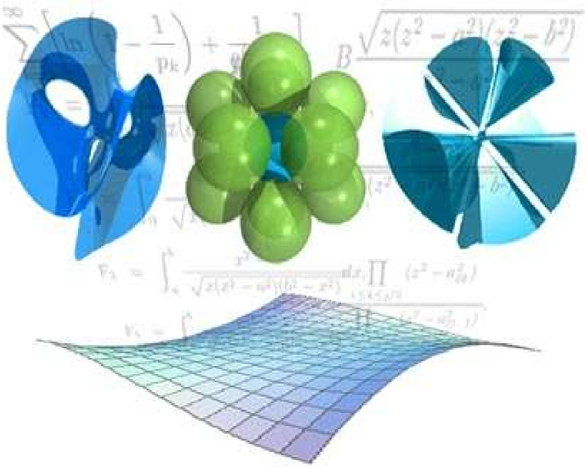
Toda una vida dedicada a las Matemáticas

Entrevistamos en este número de nuestro boletín al profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza D. José Garay. Dedica todos sus esfuerzos a la investigación y a la docencia de las Matemáticas. Tenemos el honor de que haya dedicado unos minutos a responder a nuestras preguntas, estamos seguros de que el lector descubrirá una personalidad muy interesante, lleno de sabiduría, amor por su trabajo y con un fino sentido del humor.

¿Qué cualidades debe tener un estudiante de Matemáticas?
Tiene que sentir gusto al estudiarlas y que no le resulten una tarea pesada. También debe sentir curiosidad por los futuros temas previsibles e incluso tratar de adelantarse a algunas cuestiones.

¿Qué ofrece la Facultad de Matemáticas a sus alumnos?
La Facultad ofrece al estudiante que quiera cursar la carrera de Matemáticas varias opciones a la hora de elegir asignaturas, pudiendo así inclinarse según sus gustos por materias más teóricas o de contenido más práctico. Y dentro de esta segunda posibilidad también tiene diversas opciones.

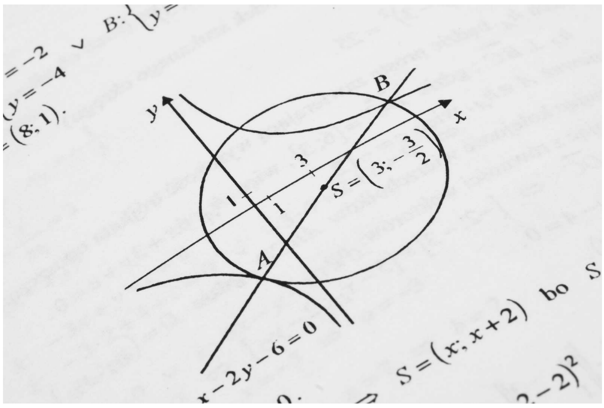
Más tarde, una vez terminada la Licenciatura, se le ofrece la posibilidad de ampliar sus conocimientos matemáticos y ahora sí que el alumno debe elegir entre un abanico amplio de especialidades. Claro que ya juega con la ventaja de que ahora conoce mejor por dentro lo que son las Matemáticas. Finalmente una vez ampliada con éxito su formación, la propia Universidad le brinda la posibilidad de integrarse en su estructura, concursando a alguna plaza docente e investigadora. He utilizado intencionadamente la palabra "ampliada" al referirme a la formación, ya que en ningún momento la podemos dar por terminada. Por muchos años que viviésemos y por mucha dedicación que tuviésemos nunca podríamos llegar a pensar que conocemos todas las Matemáticas existentes, y esto por la sencilla razón de que al mismo tiempo que nosotros estudiamos hay un verdadero ejército de matemáticos que están creando nuevas teorías llevando la frontera de esta Ciencia a lugares cada vez más lejanos.



¿Qué actitud hay que tomar ante las Matemáticas?
Creo que un profesor debe hacer disfrutar a sus alumnos con las Matemáticas. Y esto es posible dada la belleza intrínseca que éstas poseen. En las Matemáticas hay teorías que son auténticas obras de arte lo mismo que lo son muchas composiciones literarias o musicales. Y así como cada obra de arte requiere una cierta sensibilidad para que pueda ser captada su belleza, para disfrutar del encanto de las Matemáticas hemos de comenzar porque nuestra razón nos permita entender su contenido.
De acuerdo con lo anterior, el profesor debe ir presentando cada nueva cuestión como una aventura que el alumno tendrá que ir descubriendo con sus razonamientos.

¿Qué aprenden los profesores de los alumnos?
El profesor que quiera siempre tiene cosas que aprender de sus alumnos. Limitándome a mi caso, siempre he estado atento a observar cuáles son los puntos más difíciles que encuentra el alumno en cada concepto o demostración. Y esto, evidentemente para procurar mejorar la exposición de los temas, detallando más los puntos difíciles o pensando algún ejemplo ilustrativo.
Para lograrlo no hay que hablar a las paredes. Hay que mirar las caras y expresiones de los oyentes y a veces también hacer alguna pregunta para ver si nos siguen.
Hace ya muchos años en que al final del curso, los alumnos hacen una encuesta enjuiciando la labor del profesor. Pues yo siempre suelo decir al principio de cada curso que me parecerá muy bien que al final hagan esa encuesta, pero que será más útil que cualquiera que observe algo en mi actuación que se pueda mejorar me lo diga ya sin esperar al final, y de esta manera el fruto se pueda recoger ese mismo curso.

¿Dónde encuentran *trabajo los estudiantes de Matemáticas?*
Hace años prácticamente todos los matemáticos se dedicaban a la enseñanza en sus distintos niveles. Pero hace ya algún tiempo que además del importante grupo que se dedica a esta misma actividad, hay otros que trabajan en otros campos. Hay muchos que trabajan como informáticos en entidades bancarias, compañías de seguros y otras empresas. Suele decirse que el matemático tiene la mente preparada para aprender cualquier cosa que suponga razonar y que por ello enseguida se recicla para otras actividades no necesariamente matemáticas.



¿Se plantean las Matemáticas actuales algún reto que todos podamos *comprender?*
Me voy a permitir responder a esta pregunta tomando unas ideas que mi buen amigo y compañero de la Academia de Ciencias, Javier Sesma, acaba de exponer en el número 3 de la Revista digital de la Facultad de Ciencias (http://ciencias.unizar.es/aux/conCIENCIAS/numero3.pdf). Dice Javier Sesma que los grandes avances en la Física han sido precedidos por nuevas teorías matemáticas y pone varios interesantes ejemplos. Pues ante el hecho de que

existe una rama de la Física, la llamada Física Subnuclear que trata de explicar las componentes últimas de la materia y sus interacciones, que no está suficientemente desarrollada, aboga Sesma por la posible necesidad de alguna nueva teoría matemática que ayude a esclarecer estas cuestiones físicas.

Nombra usted la Real Academia de Ciencias de Zaragoza, de la que es miembro, ¿qué hace esta institución?

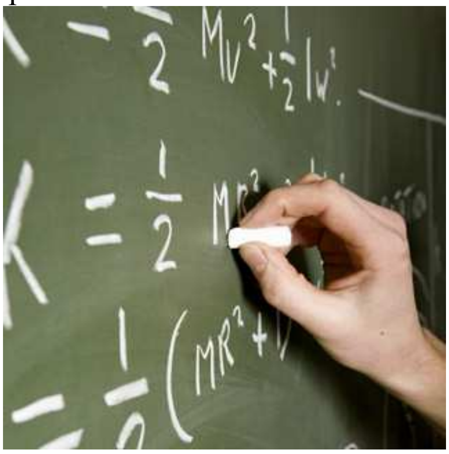
La Real Academia, con sus cuatro secciones de Matemáticas, Física, Química y Naturales, promueve la creación y la difusión de la Ciencia. Para ello tiene una serie de actividades entre las cuales citaremos:

a) Publicación de una Revista científica de aparición periódica y de números sueltos monográficos.
b) Organización de diversos ciclos de conferencias. Esto lo suele hacer en colaboración con la Facultad de Ciencias y algunas veces con otras Academias. Este año ha organizado un ciclo sobre Darwin y su teoría de la evolución.
c) Institución de dos premios de investigación anuales, alternando las cuatro ramas antes citadas.

Además de todo esto, celebra sesiones solemnes cada vez que entra un nuevo miembro o con motivo de la investidura de algún académico corresponsal.

Profesionalmente ¿de qué se siente más satisfecho?

En primer lugar me siento satisfecho de haber podido contribuir, aunque haya sido de manera muy modesta con algunas de mis investigaciones, a la construcción de este enorme y hermoso edificio que son las Matemáticas. También me produce especial alegría el haber podido comunicar mis conocimientos a los miles de alumnos que he tenido durante el más de medio siglo que he vivido con la tiza en la mano. Y siento una alegría especial al ver que muchos de estos alumnos me han superado en sus conocimientos y actividad investigadora. Creo que el verdadero progreso consiste en esto, que cada generación vaya superando a la anterior.



De todas las personas que ha conocido en su vida profesional, ¿cuál le ha impactado más?

Solo quiero citar al primero y al último de mis profesores. El primero fue D. Gumersindo Mediavilla, agricultor de mi pueblo en la provincia de Burgos. A falta de maestros digamos oficiales, fue propuesto por el Ayuntamiento para que nos enseñase a leer y a hacer cuentas a los chicos del pueblo, y por eso siempre diré que D. Gumersindo es el que me enseñó a sumar números. Pues el segundo profesor de quien quiero hablar, D. Baltasar Rodríguez-Salinas también me enseñó a sumar, pero en vez de sumar números, teníamos que integrar funciones sobre espacios localmente compactos. Y como sabemos la integración es una suma generalizada.

D. Baltasar no solamente fue mi profesor en dos asignaturas de la carrera sino que además fue luego mi director de tesis y quien me introdujo en el maravilloso mundo de la investigación matemática. Era un hombre totalmente entregado al mundo de las matemáticas y si digo que soñaba con ellas me quedo corto. En una ocasión me confesó que no había dormido ya que había pasado toda la noche pensando en una cuestión que nos había surgido en el trabajo. Contó con numerosos discípulos tanto aquí en Zaragoza como más tarde en la Universidad Complutense de Madrid.

¿Puede contarnos algún recuerdo de su vida estudiantil?

Voy a contar solo una anécdota. Aprovechando que en mi curso éramos pocos (solo cuatro) y bien avenidos y que uno de nuestros profesores era un poco despistado, logramos poner en un examen alguna pregunta elegida previamente por nosotros mismos. Habitualmente los profesores llevan preparadas las preguntas que van a formular, las llevan escritas y se guardan los enunciados para cuando vayan a corregir. Pero teníamos un profesor que era tan sabio como desorganizado. Cuando llegaba al examen se ponía a pensar en las preguntas, y a veces una vez que las habíamos escrito nos hacía cambiar alguna. Pues en una ocasión había un teorema, llamémosle A, que nos resultaba un poco difícil, y los cuatro nos pusimos de acuerdo en que si por casualidad el profesor nos lo proponía para el examen, los cuatro lo cambiaríamos por un cierto teorema B, que nos resultaba más asequible. Pues así ocurrió y cuando pasado algún tiempo nos trajo los exámenes corregidos, el profesor hizo el comentario: "La pregunta mejor respondida en el examen ha sido el teorema B, pero hubiera sido preferible que les hubiese preguntado el teorema A que es más interesante."

¿Existe contacto entre un profesor y sus antiguos alumnos (aparte del profesional)?

Tengo buen recuerdo de mis numerosos alumnos y he podido comprobar con satisfacción que muchos de ellos también lo tienen mío. Podría citar multitud de anécdotas, pero me limitaré solamente a dos.

Hace ya años pedí hora con un dentista que había sido alumno mío en Bachillerato. Pues como conocía mis gustos musicales se molestó en llevar un tocadiscos a la consulta y mientras me atendía me puso la quinta sinfonía de Beethoven.

Como caso más reciente citaré a varias alumnas que tuve hace unos 20 años, que me escriben con mucha frecuencia e incluso una de ellas me envía regularmente las calificaciones de sus dos niñas para tenerme informado.

Dos preguntas para acabar: ¿le gustaría dar algún consejo a los estudiantes de secundaria?

Solo me permitiré aconsejarles que disfruten sanamente de la vida, procuren no hacer nada de lo que tengan que arrepentirse de mayores, y tomen el estudio como la obligación que tienen a esa edad, que ya cuando sean mayores tendrán otras. Todo lo que ahora aprendan es semilla que más tarde recogerán.

¿Puede recomendarnos algún libro o algún disco que le guste especialmente?

Para pasar un rato entretenido viendo la cómica situación que se vive en la Academia Francesa cuando admite en su seno a un curioso personaje que no sabe leer, aconsejo leer *Le Fauteuil Hanté* de Gaston Leroux.

Y si quiere uno sumergirse en un mar de sosiego y tranquilidad le recomiendo escuchar el tercer movimiento de la novena sinfonía de Beethoven. Desde que se inician los primeros compases de este *Adagio* queda uno sumido en un sueño, envuelto en una atmósfera de paz interior, sueño del que nos despiertan poco antes del final los acordes de las trompetas que intervienen por dos veces y nos vuelven al mundo de la realidad.

Tres problemas fáciles

1. ¿ Cuánto vale $(0'25)^{2009}\cdot 2^{2010}$?

2. En un triángulo rectángulo un cateto mide 18 cm., los otros dos lados miden x+3 cm y x-3 cm. ¿cuánto vale x?

3. Si escribes 1/7 como número decimal, ¿qué cifra ocupa el lugar 2009 detrás de la coma?

Tres problemas un poco difíciles

1. Un libro de Matemáticas es el 50% más caro que uno de Física. ¿Qué tanto por ciento de descuento habría que hacer en el precio del libro de Matemáticas para que su precio sea igual al de Física ?

2. Calcula: $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{9\cdot 10}$

3. Los números naturales se escriben en la tabla de siete filas de la figura, siguiendo el orden de la flecha. ¿En qué cuadrado estará el número 2009?

	1	2	3	4	5	6
K	1	14	15	28		
L	2	13	16	27		
M	3	12	17	26		
N	4	11	18	25		
O	5	10	19	24		
P	6	9	20	23		
R	7	8	21	22		

El Profesor D. José Garay propone estos crucigramas a nuestros lectores.

	1	2	3	4	5
1					■
2				■	
3			■		
4		■			
5	■				

CRUCIGRAMA MUSICAL

Horizontales:

1. Las cuatro cuerdas al aire del violín comenzando por la más grave.
2. (Al revés) Sostenidos de una partitura en La Mayor; Nota de la tonalidad de la sexta sinfonía de Beethoven.
3. Dos primeras notas en la escala en La Mayor; Nota repetida.
4. Primera nota de la escala con un solo sostenido; Tres notas que tocadas sin alteraciones forman una tríada menor.
5. (Al revés) Los cuatro primeros bemoles.

Verticales:

1. Cuatro primeras notas del Cumpleaños Feliz cuando se canta en Do Mayor.
2. (Al revés) Tres primeras notas de la escala que tiene dos bemoles; Nota de la tonalidad del Canon de Pachelbel.
3. (Al revés) dos notas en tercera mayor; Dos notas en quinta justa.
4. Nota del violín que se toca con el segundo dedo sobre la cuerda del La en tercera posición; (Al revés) Las tres notas centrales en la escala de Do Mayor.
5. Cuatro primeras notas de la escala que tiene el Si bemol.

	1	2	3	4	5
1					
2		■		■	
3			■		
4		■		■	
5					

CRUCIGRAMA MATEMÁTICO

Horizontales:

1. El mayor número primo con 5 cifras.
2. Solución entera de la ecuación $2x^2-11x-21=0$; Sumándole 56 sale su cuadrado; Número de lados del único polígono en el cual son equivalentes las propiedades de equilátero y equiángulo.
3. Grados del ángulo cuyo seno es un medio; Tercera y cuarta cifras decimales del número π.
4. Característica del logaritmo decimal de 1111; Parte entera del número e; Su cubo está entre 300 y 500
5. La suma de las cinco cifras es 15.

Verticales:

1. El mayor cubo de 5 cifras.
2. Coincide con la suma de las cifras de su cuadrado; Valor de un determinante que tiene dos filas iguales; Número que coincide con su opuesto.
3. Años que vivió el matemático francés Jacques Hadamard; Años que tenía al morir en duelo el matemático francés Evaristo Galois.
4. Es un cuadrado que sigue a un cubo no nulo; Elemento neutro del producto; Elemento neutro de la suma.
5. Las cinco cifras están en progresión aritmética.