MatEarraña

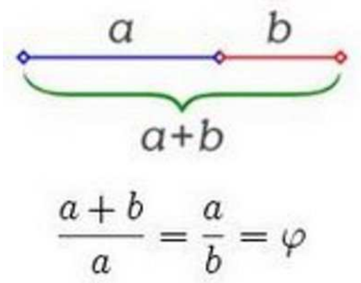
EDITORIAL

Dedicamos el reportaje de nuestro número cinco a los fractales. Preciosas imágenes multicolor que atraen la atención de cualquiera. Infinitas muestras pueden observarse en internet, pero aquí vamos a dar un paso más allá intentando escarbar un poco en la matemática subyacente. Esperamos no sólo no aburrir, sino, muy al contrario, despertar interés por conocer más respecto a esta base y a las aplicaciones más allá de la estética.
En la portada de este boletín, pese a ser 5 el número de sólidos platónicos, hemos decidido dedicárselo a un primo hermano suyo, el número aúreo. Esperamos que nuestros lectores disfruten mientras ya preparamos el siguiente boletín. ¡Ah, y regalaremos un reloj con él!

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398948482045868 34365...$$

El número áureo o razón áurea, representado por la letra griega φ (fi) en honor al escultor griego Fidias, es un número irracional y algebraico con muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad como relación o proporción. Se encuentra en algunas figuras geométricas y en la naturaleza (caracolas, nervaduras de las hojas de algunos árboles, el grosor de las ramas, etc.) Además se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la razón áurea en muchas artes, así como una importancia mística.

En 1509 el matemático Luca Pacioli publica su libro *La Proporción Divina*, en el que plantea cinco razones por las que considera divino al número φ. El astrónomo Johannes Kepler en su obra *El Misterio Cósmico* se refirió al número áureo en términos grandiosos: *"La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la proporción áurea. El primero lo podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo debemos denominar una joya preciosa"*
Su obtención es sencilla, se define como la razón que resulta al dividir una recta en dos segmentos desiguales a y b de tal manera que la proporción entre la suma de ambos y el segmento mayor sea idéntica a la del mayor respecto al pequeño.

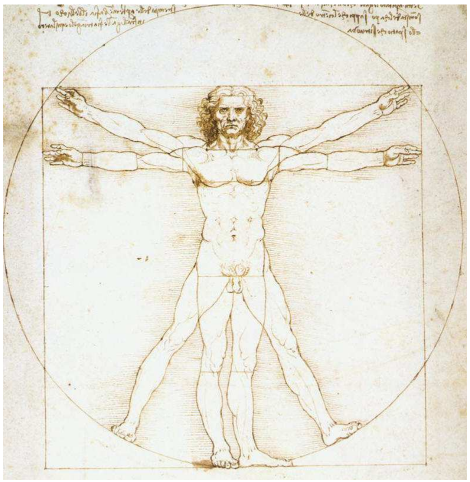


φ en el arte
Es la relación entre la base de cada uno de los lados de la Pirámide de Keops (230'32 metros) y su altura (146'6 metros).

Es la relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón en Atenas

PORTADA

En las relaciones entre altura y ancho de los objetos y personas que aparecen en las obras de Miguel Angel, Durero o Leonardo Da Vinci, especialmente en su *Hombre de Vitruvio*.

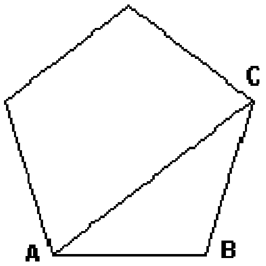


En varias sonatas para piano de Mozart, la proporción entre el desarrollo del tema y su introducción es la más cercana posible a la razón áurea.

Características de la Sonata Nº1 para piano de Mozart: El segundo tema armónico de la obra siempre es más extenso que el primero, el primer movimiento está subdividido en 38 y 62 compases y 63 / 38 = 1.6315. El segundo movimiento está subdividido en 28 y 46 compases y 46 / 28 = 1.6428

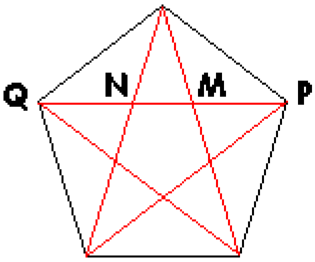
También está φ en lugares más vulgares como la relación entre el alto y el ancho de un libro, una cajetilla de tabaco, una tarjeta de crédito o el DNI.

Los griegos obtuvieron este número al hallar la relación entre la diagonal del pentágono regular y su lado.



$$\frac{AC}{AB} = \varphi$$

Al trazar las diagonales de un pentágono resulta la estrella pentagonal o estrella de Italia, era el símbolo de la escuela pitagórica y servía a los pitagóricos para reconocerse entre sí.



En ella se puede comprobar que también los segmentos QN, NP y QP están en proporción áurea.

φ en la naturaleza

En el girasol se pueden contar 21 espirales en un sentido y 34 en el otro. ¿Y cuánto es 34:21?

Algo similar ocurre con las piñas de los pinos, coge una grande, cuenta las espirales en ambos sentidos y divide.

Propiedades matemáticas

Puede verse que φ es una de las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2-x-1=0$ y también es solución de:

$$x^3 = \frac{x+1}{x-1}$$

También cumple que $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ para cualquier número real n. Y, por tanto:

$\varphi^n = \varphi^{n-2} + 2\,\varphi^{n-3} + \varphi^{n-4}$

$\varphi^n = \varphi^{n-3} + 3\,\varphi^{n-4} + 3\,\varphi^{n-5} + \varphi^{n-6}$

Y así, puede escribirse con coeficientes que son los números combinatorios del binomio de Newton.

φ también está emparentado con otro número irracional, a través de la expresión:

$$\sqrt{2} = \varphi \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}}$$

φ esotérico

Para recalcar el caracter mágico de φ, obsérvense las igualdades obtenidas en 1994:

$$\frac{\varphi}{2} = -sen\ 666^{o} = -\cos(6 \cdot 6 \cdot 6^{o})$$

que puede reescribirse como:

$$\varphi = -sen\ 666^{o} - \cos(6 \cdot 6 \cdot 6^{o})$$

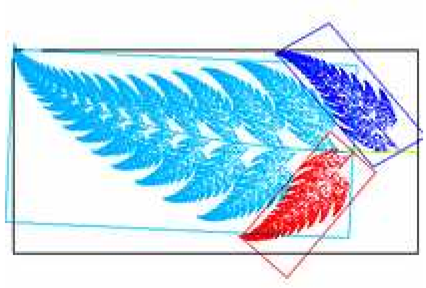
Si el número áureo, encontrado en la estrella de cinco puntas, representa la belleza y la armonía, en algunas civilizaciones, la estrella de cinco puntas invertida representa el mal, el demonio. Es creencia de ciertas personas que para echar el mal de ojo a alguien hay que pintar debajo de su cama una estrella de cinco puntas invertida. ¿Cuántas veces se han visto en el cine ritos satánicos en torno a la estrella de cinco puntas?

FRACTALES

El término *fractal* fue propuesto en 1975 por el matemático Benoît Mandelbrot, deriva del latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado.

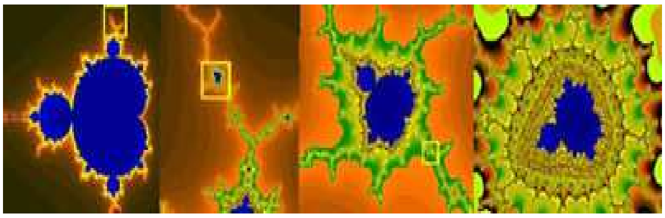
Los fractales fueron concebidos aproximadamente en 1.890 por el francés Henri Poincaré. Sus ideas fueron extendidas más tarde fundamentalmente por dos matemáticos también franceses, Gaston Julia y Pierre Fatou, hacia 1.918.

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite a diferentes escalas.



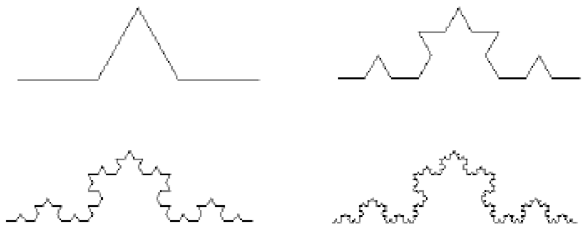
La geometría fractal ha recibido durante los últimos veinte años una atención y un auge crecientes. Lejos de ser una herramienta de generación de paisajes virtuales, viene avalada por la teoría geométrica de la medida y por aplicaciones en ciencias tales como la Física, la Química, la Economía o la Informática.

Muchos llegan al mundo de los fractales atraídos por el estallido de color de alguna representación del conjunto de Mandelbrot o de un conjunto de Julia.



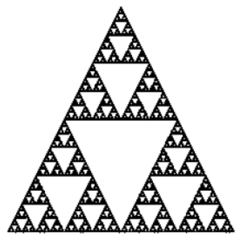
Sin embargo, una vez que se profundiza en la magia de los fractales, no se sabe qué admirar más, si las cascadas multicolor o la belleza de las matemáticas que los engendran. Quizá debido al nivel superficial con el que suele afrontarse el tema, muchas veces se desconoce la teoría que aguarda tras cada fractal. Veamos un primer ejemplo: la Curva de Koch fue construida en 1904 por el matemático Helge von Koch. Se parte del segmento unidad [0, 1] y se divide en tres partes iguales, sustituyendo la parte central por los dos segmentos que junto con dicha parte formarían un triangulo equilátero. Con cada uno de los cuatro segmentos obtenidos se repite la operación descrita.

Se procede indefinidamente de esta forma obteniendo en cada etapa k una poligonal de longitud $(4/3)^k$.

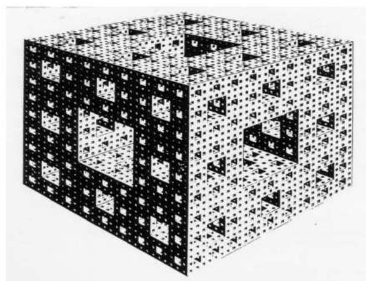


La curva de Koch se define como la curva límite a que converge la sucesión cuando *k* tiende a infinito. Se trata de una curva de longitud infinita pues $(4/3)^k$ tiende a infinito cuando *k* tiende a infinito. Más aún, la longitud de la parte de gráfica comprendida entre dos puntos cualesquiera de la misma también tiende a infinito con *k*. El área bajo la curva, por otra parte, es finita, en realidad es 9/5. Tenemos así una construcción de área finita y perímetro infinito.

Otro de estos "monstruos" matemáticos es el triángulo de Sierpinski:



Sabiendo que se parte de un triángulo equilátero relleno, el proceso de construcción es sencillo. Ocurre lo mismo con la esponja de Menger:



Ambos son herederos del Conjunto de Cantor, para construirlo se parte del intervalo unidad $E_0 = [0, 1]$. Este es dividido en tres partes iguales y se consideran los intervalos cerrados de los extremos:

$$E_{11} = [0, 1/3].\ E_{12} = [2/3, 1]$$

cada uno de ellos de longitud 1/3.

El proceso se repite sobre los nuevos conjuntos obtenidos. Cada uno de estos intervalos se divide en tres intervalos de igual longitud para prescindir del intervalo central y considerar los cuatro intervalos cerrados

$$E_{21} = [0, 1/9],\ E_{22} = [2/9, 1/3],$$
$$E_{23} = [2/3, 7/9],\ E_{24} = [8/9, 1]$$

cada uno de ellos de longitud 1/9.

Si continuamos indefinidamente de esta forma, en la etapa k-ésima tendremos 2k intervalos cerrados E_{kj} con j = 1, 2, . . . , 2k, cada uno de ellos de longitud $3^{-k.}$ El conjunto límite, cuando *k* tiende a infinito, se denomina *conjunto ternario de Cantor*.
Como se ha dicho, no podemos quedarnos en la superficie, hemos de ahondar un poco en la matemática que está detrás de estas figuras. Vamos a ello.

Dimensión topológica y dimensión fractal.

Una circunferencia y un segmento son "curvas" de longitud finita. Desde un punto de vista métrico no son la misma curva, ya que la circunferencia y el área que encierra, el círculo, son finitos, y, en cambio, el segmento, aunque es finito, no encierra con su borde un área finita.
Aparece aquí una característica de las matemáticas: intentar clasificar los objetos por lo que se conserva, los invariantes, y analizar, por otra parte, qué ocurre con lo que no se conserva.
En el ejemplo anterior, lo que se conserva es su carácter topológico, es decir, su dimensión topológica. Analicemos qué significa la dimensión topológica, término introducido Henri Poincaré.
La definición inductiva dada por él fue la siguiente:

- El conjunto vacío tiene dimensión –1.
- Si los bordes de los entornos pequeños de todos los puntos del ente son espacios (n-1)-dimensionales, decimos que el espacio que consideramos es n-dimensional.

Tal vez no se entienda muy bien, pero nos conformamos con:

conjunto vacío:	dimensión topológica: -1
punto:	dimensión topológica: 0
línea:	dimensión topológica: 1
superficie :	dimensión topológica: 2
volumen:	dimensión topológica: 3

En una curva solo podemos movernos en una dirección, adelante o hacia atrás. En una superficie podemos ir adelante, atrás, a derecha, a izquierda. En un volumen podemos movernos, además, hacia arriba y hacia abajo. La curva tiene una dimensión, la superficie tiene dos dimensiones y el volumen tiene tres dimensiones.
Una definición distinta de dimensión topológica es la **dimensión por semejanza**, llamada también de autosemejanza, fue sugerida por Felix Hausdorff en 1919 y readaptada posteriormente por Besicovich: si al obtener desde un ente H, N entes iguales, semejantes al original, con razón de semejanza r, entonces la dimensión topológica de H es el número real D que verifica: $N \cdot r^D = 1$.

O sea: $Ln\, N + D.\, Ln\, r = 0$.
Por tanto:

$$D = -\frac{Ln\, N}{Ln\, r}$$

Por extraña que parezca, esta definición se puede justificar desde la teoría de la medida. Para "convencernos" veamos unos ejemplos sencillos:
Un segmento, al dividirlo, por ejemplo, en dos partes iguales. N = 2, r = ½. Se tiene:

$$D = -\frac{Ln\, N}{Ln\, r} = -\frac{Ln\, 2}{Ln\,(1/2)}$$

Dimensión de autosemejanza: D = 1.
Un cuadrado es dividido en 4 cuadrados iguales, N = 4. r = ½. Se tiene:

$$D = -\frac{Ln\, N}{Ln\, r} = -\frac{Ln\, 4}{Ln\,(1/2)}$$

Dimensión de autosemejanza: D = 2.
Un cubo dividido en 8 cubos iguales. N = 8. r = ½. Se tiene:

$$D = -\frac{Ln\, N}{Ln\, r} = -\frac{Ln\, 8}{Ln\,(1/2)}$$

Dimensión de autosemejanza: D = 3.
La dimensión topológica en el sentido de Poincaré coincide con la dimensión por semejanza de Hausdorff-Besicovich. Pero hay ciertos objetos geométricos en los que no ocurre así, son los fractales. Diremos que la dimensión por semejanza de Hausdorff-Besicovich es su Dimensión Fractal**.**
En el conjunto de Cantor, por construcción, N = 2, r = 1/3. Su dimensión fractal es:

$$D = -\frac{Ln\, N}{Ln\, r} = -\frac{Ln\, 2}{Ln\,(1/3)} = 0'0630905$$

Para la curva de Koch, N = 4, r = 1/3.
Dimensión fractal:

$$D = -\frac{Ln\, N}{Ln\, r} = -\frac{Ln\, 4}{Ln\,(1/3)} = 1'26181$$

Para el triángulo de Sierpinski es N = 3, r = ½.
Dimensión fractal:

$$D = -\frac{Ln\, N}{Ln\, r} = -\frac{Ln\, 3}{Ln\,(1/2)} = 1'5849$$

¿Cuál es la dimensión de la esponja de Menger?
No es de extrañar que a finales del siglo XIX, el matemático Charles Hermite tildara de "plaga lamentable" la fascinación que otros matemáticos sentían por determinadas curvas que desafiaban los cimientos de la geometría de la época. Muchos como él consideraban patológicas aquel tipo de curvas, desentendiéndose de sus insólitas propiedades.

Ya hemos nombrado antes los conjuntos de Julia por su belleza, a continuación vamos a describirlos brevemente. Estos conjuntos, fruto de los trabajos de Pierre Fatou y Gaston Julia en los años 1920, surgen como resultado de la aplicación reiterada de funciones holomorfas.

En dinámica compleja, el conjunto de Julia $J(f)$ de una función holomorfa, f, es el conjunto de puntos cuyo comportamiento a largo plazo para iteraciones de f, puede cambiar drásticamente bajo pequeñas perturbaciones.

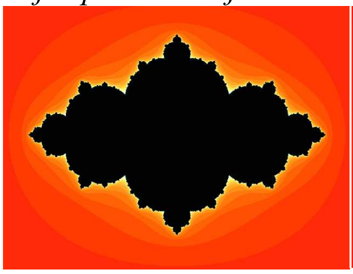
El conjunto de Fatou, $F(f)$, es el conjunto de puntos de un conjunto de Julia que muestran un comportamiento estable. Es decir, $F(f)$ es la parte estable y $J(f)$ la caótica.

Los conjuntos de Julia y Fatou son invariantes bajo f, es decir: $f^{-1}(J(f)) = f(J(f)) = J(f)$ y $f^{-1}(F(f)) = f(F(f)) = F(f)$

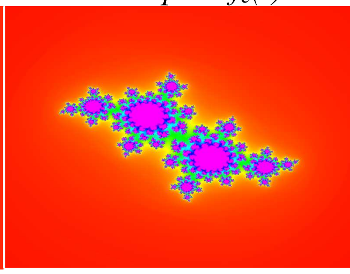
Consideremos el caso particular de funciones polinómicas de tipo $f_c(z) = z^2 + c$. Al aplicar sucesivas veces una función de este tipo, para casi todos los valores complejos, el resultado tenderá a infinito. El conjunto de valores complejos $z \in C$ para los que la iteración no escapa al infinito es el conjunto de Fatou, y su frontera el de Julia.

Estos conjuntos se representan mediante un algoritmo de tiempo de escape, en que cada pixel se colorea según el número de iteraciones necesarias para escapar. Suele usarse un color especial, a menudo el negro, para representar los puntos que no han escapado tras un número grande y prefijado de iteraciones.

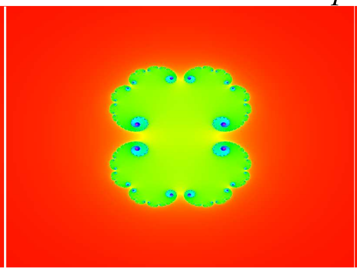
Ejemplos de conjuntos de Fatou/Julia para $f_c(z) = z^2 + c$ con c un número complejo



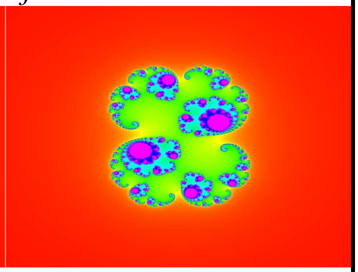
c=1−φ



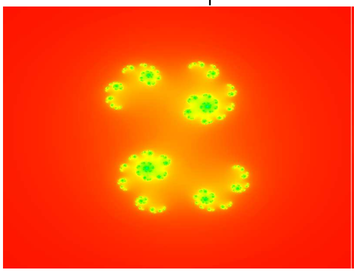
c=(φ−2)+(φ−1)i



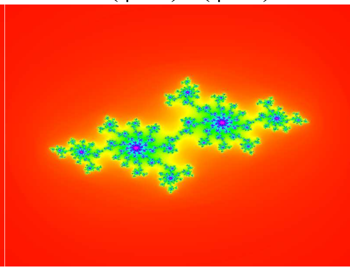
c=0.285+0i



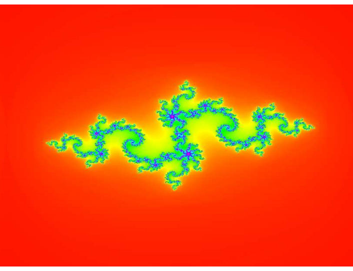
c=0.285+0.01i



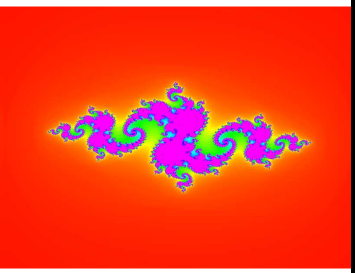
c=0.45+0.1428i



c=-0.70176-0.3842i



c=-0.835-0.2321i



c=-0.8+0.156i

¿Existen fractales en la realidad, o sólo en los ordenadores y en las teorías matemáticas?

La principal aplicación real de los fractales, en la actualidad, tiene que ver con la compresión de imágenes, campo en el que se esperan grandes avances.

Otras de las aplicaciones de los fractales son sus efectos visuales. No sólo engañan la vista, sino que también, de algún modo, confunden a la mente.

Los fractales han sido usados comercialmente en la industria cinematográfica en películas como *Star wars* y *Startrek*. Las imágenes fractales son usadas como una alternativa a los costosos decorados elaborados para producir paisajes fabulosos.

En particular, en *Star Wars*, son fractales la Superficie de la Estrella de la Muerte y la Superficie de la Luna de Endor. En *Startrek II, La ira de Khan* son fractales Superficie del planeta Génesis.

Con programas informáticos como *Apophysis* o *Ultra Fractal* se pueden hacer imágenes con técnicas diversas; cambiando parámetros, geometría de triángulos o con transformaciones aleatorias.

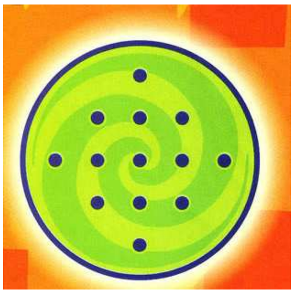
Algunas otras de las muchas aplicaciones de la geometría de fractales son:

Movimiento de las finanzas o de la moneda, codificación de señales de audio, de video o digitales, caracterización geométrica y escalamianto en minerales, medición de fronteras y costas, caracterización de agregados, análisis estructural y morfológico en polímeros, análisis espectroscópico, escalamiento de propiedades, análisis de señales, análisis y predicción de condiciones ambientales, terremotos y volcanes, análisis de fenómenos considerados caóticos como la formación de nebulosas siderales.

CONTRAPORTADA

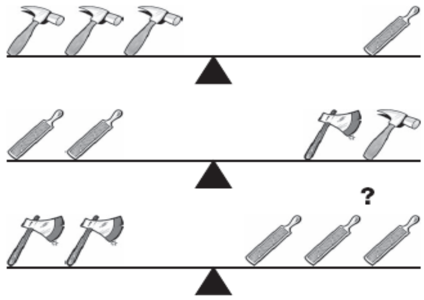
Tres problemas fáciles:

1. ¿Cuántos cuadrados se pueden obtener uniendo puntos de la figura?



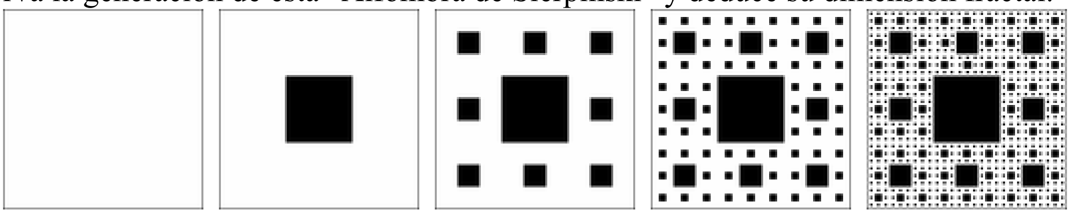
2. Coge un DNI y mide su ancho y su alto (el del papel, no el del plástico protector). ¿Por qué piensas que se decidieron esas medidas?

3. Si las dos primeras balanzas están equilibradas, ¿a qué lado se inclina la tercera? ¿O también estará equilibrada?



Tres problemas un poco difíciles:

1. Observa la generación de esta “Alfombra de Sierpinski” y deduce su dimensión fractal.



2. ¿Puedes encontrar alguna relación el número áureo y el que expresamos a continuación?

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

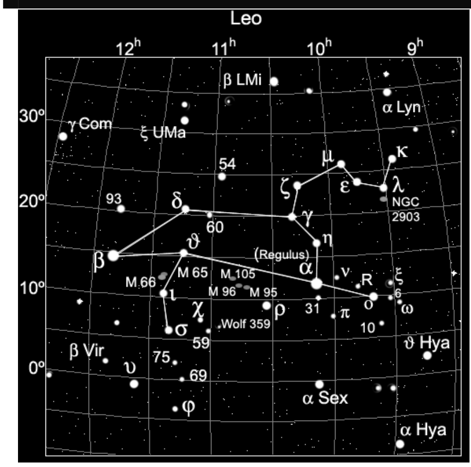
Esta fórmula fue publicada por Nathan Altshiller-Court, de la Universidad de Oklahoma, en la revista American Mathematical Monthly en1917.

3. ¿Qué número falta en la última casilla?

9			
4	3		
1	8	1	
2	1	7	?

Haznos llegar tus respuestas y razonamientos y entrarás en el sorteo trimestral de regalos.

MIRANDO EL CIELO



En mayo La Luna estará en fase de cuarto creciente el 1 de mayo en Cáncer, Luna llena el 9 en Libra, cuarto menguante el 17 en Capricornio y finalmente Luna nueva el día 24 en Tauro.

Saturno es visible durante toda la noche en Leo. Este mes marca el momento idóneo para ver sus anillos en posición casi horizontal. Está situado en los límites de la constelación de Leo, cerca de Régulo

La inclinación tan pequeña de los anillos permite efectuar una detenida inspección de las lunas del planeta, siendo visibles varias de ellas cerca del disco planetario, destacando entre todas Titán, con magnitud 8. Es interesante durante esta fase de anillos de canto poder observar el paso de los satélites más brillantes por delante del disco planetario, así como las sombras que estos proyectan sobre el planeta.

Escríbenos: materranya@yahoo.es Visítanos: http://es.geocities.com/materranya