

EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS - POLINOMIOS

Una **expresión algebraica** es una combinación cualquiera y finita de números, de letras, o de números y letras, ligados entre sí con la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos:

$$\text{a) } 2x+3^4 \quad \text{b) } 5x^3+6x-\frac{1}{3} \quad \text{c) } x^2+\sqrt{3x} \quad \text{d) } \frac{x^5-4}{x^2} \quad \text{e) } \sqrt{2}x-\frac{2}{5}x^4$$

Los números son los coeficientes, y las letras, las variables independientes o indeterminadas.

Estudiaremos las expresiones algebraicas con una sola variable (x).

Monomios: Son expresiones algebraicas de la forma:

$$M(x) = a \cdot x^n$$

donde "a" es un número real, llamado **coeficiente**; "x" es la **variable independiente** o **indeterminada**; y "n" es un número natural. Si $a \neq 0$, entonces el exponente "n" de la variable independiente, es el **grado** del monomio. Si $a = 0$, el monomio no tiene grado.

Ejemplos:

- a) $A(x) = -3x^4$, es un monomio cuyo coeficiente es -3 y cuyo grado es 4.
- b) $B(x) = \frac{5}{4}x^3$, es un monomio de coeficiente igual a $\frac{5}{4}$, y de grado 3.
- c) $C(x) = 2x^0 = 2 \cdot 1 = 2$, es un monomio de coeficiente 2, y de grado 0.
- d) $D(x) = 5x^{\frac{4}{3}}$, **NO** es un monomio, ya que el exponente no es un número natural (la variable independiente está afectada por una raíz de índice 3).
- e) $E(x) = 2x^{-3}$, **NO** es un monomio, ya que el exponente no es un número natural (la variable independiente aparece como divisor, puesto que $2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$).
- f) $F(x) = \sqrt{3}x^5$, es un monomio, ya que satisface las condiciones de que su coeficiente sea un número real: $\sqrt{3}$, y que el exponente de la variable independiente sea un número natural: 5.

Monomios Semejantes: Dos o más monomios son semejantes, si la variable está elevada al mismo exponente natural.

Ej.: $P(x) = 4x^3$ $Q(x) = -2x^3$ y $R(x) = x^3$

$P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, son monomios semejantes, puesto que tienen el mismo grado, es decir, la variable está elevada al mismo exponente, en este caso, 3.

Adición de Monomios: La adición de monomios sólo es válida para monomios semejantes. La suma de dos o más monomios, es otro monomio semejante al dado (es decir, del mismo grado), cuyo coeficiente se obtiene al sumar los coeficientes de los monomios que se están sumando.

Ej.: a) $3x^4 + 5x^4 + x^4 = 9x^4$
 b) $2x^3 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^3 = \frac{13}{4}x^3$
 c) $x + x + x + 2x = 5x$

Monomios Opuestos: Dos monomios son opuestos, cuando son semejantes, es decir, tienen el mismo grado, y sus coeficientes son opuestos (o inversos aditivos).

Ej.: a) $5x^4$ y $-5x^4$, son monomios opuestos. b) $\frac{3}{4}x^3$ y $-\frac{3}{4}x^3$, son monomios opuestos.

Sustracción de Monomios: La sustracción de monomios sólo es válida para monomios semejantes. La resta de dos monomios, consiste en sumarle al monomio minuendo, el monomio opuesto del sustraendo.

Ej.: Sean: $P(x) = 5x^4$ y $Q(x) = 2x^4$, la resta de $P(x) - Q(x)$, será:

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= 5x^4 + (-2x^4) = \\ &= 5x^4 - 2x^4 = 3x^4 \end{aligned}$$

Ej.: Sean $S(x) = 4x^3$ y $T(x) = -3x^3$, la resta de $S(x) - T(x)$, será:

$$\begin{aligned} S(x) - T(x) &= 4x^3 + (+3x^3) = \\ &= 4x^3 + 3x^3 = 7x^3 \end{aligned}$$

Observemos la siguiente expresión algebraica:

$$P(x) = 3x^5 - 4x^4 + 2x$$

Dicha expresión, no puede ser reducida a un solo término, pues cada término de dicha expresión, no es un monomio semejante de ningún otro término; ésto impide que se puedan sumar o restar dichos términos ya que, como vimos, la suma y la resta, sólo es válida para monomios semejantes.

A la expresión algebraica entera $P(x)$, formada por la suma algebraica (sumas o restas) de monomios no semejantes, le damos el nombre general de **polinomio**.

Diremos que una **expresión algebraica es entera**, cuando la variable independiente "x" no está afectada por una raíz o como divisor.

Formalmente llamaremos **polinomios**, a toda **expresión algebraica entera**, formada por la suma algebraica de uno o más monomios.

Revisemos las expresiones algebraicas dadas como ejemplo al comienzo y determinemos cuáles de ellas son enteras, o sea, son polinomios:

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } 2x + 3^4 & \text{b) } 5x^3 + 6x - \frac{1}{3} & \text{c) } x^2 + \sqrt{3x} & \text{d) } \frac{x^5 - 4}{x^2} & \text{e) } \sqrt{2}x - \frac{2}{5}x^4 \end{array}$$

En base a las definiciones dadas, c) y d) no son polinomios, ya que en c) la variable x se encuentra afectada por una raíz (forma parte del radicando) y en d) la variable aparece como divisor. En cambio a), b) y e) sí lo son pues la variable independiente en ellos, no está afectada por la radicación, ni aparece como divisor.

Analizado de otra forma, si un polinomio es una expresión algebraica conformada por un monomio, o por la suma algebraica de dos o más monomios:

c) no es polinomio, pues su segundo término no es monomio, ya que no satisface la condición de que en todo monomio, la variable debe estar elevada a un exponente natural. En efecto:

$$\sqrt{3x} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{el exponente de la variable no es un número natural}$$

d) no es polinomio, ya que:

$$\frac{x^5 - 4}{x^2} = \frac{x^5}{x^2} - \frac{4}{x^2} = x^3 - 4x^{-2} \rightarrow \text{el exponente del 2º término no es un número natural.}$$

Definición: Un **polinomio**, es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

En la cual, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$, son números reales, y todos los exponentes de las potencias que tiene como base a la variable independiente "x", son números naturales o cero.

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \rightarrow$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

$$\text{Ej.: } P(x) = 3x^3 + 2x^5 - 4x^2 + x \rightarrow \text{sus coeficientes son: } 2; 3; -4; 1$$

$a_n \rightarrow$ se denomina **coeficiente principal**, y es el coeficiente que multiplica a la variable que está elevada al mayor exponente.

Ej.: $R(x) = 2x - 3x^4 - 7x^3$ → coeficiente principal: -3

$Q(x) = x^5 - 2x^4 + 3x$ → coeficiente principal: 1

Al polinomio que tiene coeficiente principal "1", se lo llama **normalizado** o **mónico**. En el ejemplo dado, $Q(x)$ es un polinomio normalizado o mónico.

a_0 → se denomina **término independiente**, y es el coeficiente que multiplica a la variable independiente que tiene exponente cero: $a_0 \cdot x^0 = a_0 \cdot 1 = a_0$. Al término independiente se lo reconoce por no aparecer la variable independiente "x" como factor en dicho término. Si el término independiente es 0, en general, dicho término no se escribe explícitamente.

Ej.: $R(x) = 3x^5 + 2x^2 + 8$ → término independiente: 8

$S(x) = 2x^4 + 6x^3 + 4x - 5$ → término independiente: -5

$T(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x$ → término independiente: 0

n → se denomina **grado del polinomio**, y es el mayor exponente al que está elevada la variable independiente en un término de coeficiente no nulo.

Ej.: $R(x) = 5x^2 + 3x^4 - 8x$ → grado: 4

$S(x) = x^2 - 6 + 2x^3$ → grado: 3

$T(x) = 9$ → grado: 0

Polinomio Ordenado: decimos que un polinomio está ordenado cuando los términos aparecen ordenados en forma creciente o decreciente, respecto de los exponentes de la variable.

Ej.: $R(x) = 6x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \sqrt{5}x^2 - x + 2$

$S(x) = 3 + 2x - 5x^2 + 4x^3 - x^4$

$T(x) = 3x^7 + 5x^2 + 6$

Polinomio Completo: Un polinomio de grado n está completo con respecto a las potencias de su variable, cuando figuran todas las potencias posibles de exponentes menores que la potencia de exponente más alto, es decir, cuando en los sucesivos términos, aparece la variable x elevada a los exponentes $n, n - 1, n - 2, \dots, 2, 1, 0$.

En otras palabras, un polinomio de grado " n " está completo, si sus términos lo conforman también todos los monomios de grado inferior a " n ". Por ello, un polinomio de grado " n " tendrá exactamente $n + 1$ términos. Por ejemplo, si un polinomio de grado 4 está completo, tendrá cinco términos, y en cada uno de ellos figurará una potencia de la variable x , con algunos de los siguientes exponentes: x^4, x^3, x^2, x^1, x^0

Si un polinomio, no tiene todas las potencias decrecientes de su grado, entonces el polinomio está incompleto.

Ej.: $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 1$ → es un polinomio completo

$Q(x) = 7x^5 - 4x^2 + 2$ → es un polinomio incompleto

Para completar un polinomio, se agregan los términos que faltan para que sea completo. Para ello, es necesario agregar los términos correspondientes a las potencias que faltan, pero como el polinomio dado no debe ser alterado, dichos términos deben ser nulos; ésto se logra agregando los términos que faltan con coeficiente cero.

Ej.: El siguiente polinomio está incompleto: $Q(x) = 7x^5 - 4x^2 + 2$

Al completarlo, dicho polinomio será: $Q(x) = 7x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 2$

Ej.: Polinomio incompleto: $R(x) = x^4 - 1$

Polinomio completo: $R(x) = x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$

Según el número de términos, un polinomio se denomina:

- Monomio: si tiene un solo término. Ej.: $-2x^3$
- Binomio: si tiene dos términos. Ej.: $5x^3 + 4x^2$
- Trinomio: si tiene tres términos. Ej.: $3x^5 + 2x^3 + 4$
- Cuatrinomio: si tiene cuatro términos. Ej.: $x^6 + 3x^3 + 2x^5 - 3$

Nota: monomios, binomios, trinomios, cuatrinomios, son polinomios con una denominación más específica.

Reducción de términos semejantes: Reducir un polinomio consiste en sustituir todos los monomios semejantes el resultado de la suma de todos ellos.

Ej.: a) $3x + 5x^4 + x - 2x^4 = 3x^4 + 4x$

b) $x^5 - \frac{3}{5}x^4 + x^4 + 2x^3 - 9x^3 = x^5 - \frac{2}{5}x^4 - 7x^3$

Polinomio Nulo: Se llama polinomio nulo, al polinomio en el que todos sus coeficientes son ceros.

$$N(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \dots$$

Polinomios Opuestos: Se llama polinomios opuestos, a aquellos que tienen coeficientes opuestos en los términos del mismo grado.

Ej.: Dado el siguiente polinomio: $P(x) = 3x^4 - \frac{1}{7}x^3 + \frac{8}{5}x^2 - \frac{1}{2}$

el polinomio opuesto será $-P(x) = -3x^4 + \frac{1}{7}x^3 - \frac{8}{5}x^2 + \frac{1}{2}$

FUNCIONES POLINÓMICAS:

Cada polinomio, tiene asociada una función definida de ∇ en ∇ , llamada función polinómica. Nosotros hablaremos indistintamente de polinomios o de funciones polinómicas.

Si consideramos el conjunto ∇ como dominio de las funciones polinómicas, la imagen de cada una de ellas puede no ser el conjunto ∇ .

Estas funciones son muy utilizadas por simplificar muchos cálculos en las que intervienen diversas variables, y tienen suma importancia en disciplinas tales como la Biología, la Física, la Química, la Economía, etc.

Más adelante, dentro de las funciones polinómicas reconoceremos algunas llamadas funciones potenciales.

EJERCITACIÓN

1) Escribir los monomios opuestos a los monomios dados.

a) $5x^6 \rightarrow \dots\dots\dots$ b) $-7x^4 \rightarrow \dots\dots\dots$ c) $-\frac{2}{3}x^2 \rightarrow \dots\dots\dots$ d) $\sqrt{2}x \rightarrow \dots\dots\dots$

2) Realizar las siguientes adiciones y sustracciones de monomios:

a) $-3x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x^2 =$ c) $2x^4 - \frac{7}{2}x^4 =$

b) $2x^3 + x^3 + \frac{3}{5}x^3 =$ d) $-x^5 - \frac{3}{4}x^5 =$

3) Clasificar de acuerdo al número de términos e indicar el grado, coeficiente principal y término independiente de cada uno de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 6 + x^3 + 3x - x^2$

b) $Q(x) = 7x^3 - 2x^5 + 4$

c) $R(x) = 0x^4 - x + 5x^2$

Clasificación: $\dots\dots\dots$

Clasificación: $\dots\dots\dots$

Clasificación: $\dots\dots\dots$

Grado: $\dots\dots\dots$

Grado: $\dots\dots\dots$

Grado: $\dots\dots\dots$

Coeficiente principal: $\dots\dots\dots$

Coeficiente principal: $\dots\dots\dots$

Coeficiente principal: $\dots\dots\dots$

Término independiente: $\dots\dots\dots$

Término independiente: $\dots\dots\dots$

Término independiente: $\dots\dots\dots$

4) Marcar con una X las expresiones algebraicas que son polinomios.

a) $16x + x^{-1}$ c) $\sqrt[5]{x^2} - 9$ e) $\sqrt{\frac{2x+1}{3}}$
 b) $\sqrt{3}x^2 - 5$ d) $\frac{2}{3}x^2 + 5x - 2$ f) $x^{10} - \frac{x}{5}$

5) Completar, de acuerdo a las definiciones estudiadas.

a) $A(x) = 7x^4 + 5x + 2$ es un polinomio, pues los exponentes de x son números

b) $B(x) = \frac{5}{4}x^5 + x^{-2}$, no es un polinomio, pues uno de los exponentes no es un número

c) $C(x) = -4x^8$, es un polinomio de un solo término, llamado también

d) $D(x) = 5x^{\frac{2}{3}} + 2x^3 - 3$, no es un polinomio, porque

e) $E(x) = 2x^5 + 3x^4 - x^3 + \frac{2}{x}$, no es un polinomio, porque

6) Indicar el grado de cada uno de los siguientes polinomios.

a) $A(x) = 3x^2 - 2x - x^4 \rightarrow$ grado: c) $C(x) = -x^3 + 6 + 0x^5 \rightarrow$ grado:

b) $B(x) = x^3 - 2^7x^5 \rightarrow$ grado: d) $D(x) = x + 3^3 \rightarrow$ grado:

7) Escribir un polinomio que cumpla con las siguientes condiciones.

a) Binomio de grado 2: c) Monomio de grado 6:

b) Trinomio de grado 3: d) Cuatrinomio de grado 5:

8) Ordenar y completar cada uno de los siguientes polinomios. Indicar en cada uno de ellos: grado; coeficiente principal, término independiente, clasificarlos según el número de términos no nulos. Indicar si uno o más de ellos es un polinomio normalizado o mónico.

a) $P(x) = 5x^3 - 1$ c) $R(x) = -2 + 2x^3 - x$

b) $Q(x) = -27x^3 + x^4 + 2$ d) $S(x) = x - 3x^2 + x^5 - 1$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

Adición de Polinomios

Para sumar dos o más polinomios, se completa y se ordena cada uno de los polinomios a sumar; luego se encolumnan sus términos semejantes y se suman los coeficientes de los términos semejantes. El resultado es otro polinomio que tiene siempre el mismo grado que el polinomio de mayor grado, excepto cuando los polinomios que se suman tienen el mismo grado y sus coeficientes principales son números opuestos.

Ej.: Sean: $P(x) = 2x^3 - 4x^4 + 5x^2 + 3$ y $Q(x) = 4x^2 + 3x + 5x^4 - 2$

Luego: $P(x) + Q(x) =$

$$\begin{array}{r} -4x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 0x + 3 \\ + \quad 5x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 3x - 2 \\ \hline x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \end{array}$$

Ej.: Sean: $R(x) = 2x^2 - x + 3$ y $T(x) = -x + 1 - 5x^2$

Luego: $R(x) + T(x) =$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x + 3 \\ + \quad -5x^2 - x + 1 \\ \hline -3x^2 - 2x + 4 \end{array}$$

Sustracción de Polinomios

Para restar dos polinomios, se suma al polinomio minuendo, el polinomio opuesto del sustraendo. El procedimiento a seguir es el mismo de la adición, y es válida la consideración realizada en la adición respecto del grado del polinomio que se obtiene como resultado.

Ej.: Sean: $A(x) = 3x^2 + 2x - 4$ y $B(x) = 2x^2 + 5$

Luego: $A(x) - B(x) =$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2x - 4 \\ + \\ -2x^2 + 0x - 5 \\ \hline x^2 + 2x - 9 \end{array}$$

Ej.: Sean: $M(x) = -4x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x^3 + 5$ y $N(x) = -3x^4 + x^2 - 6 + \frac{1}{2}x$

$$\begin{array}{r} 0x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 4x + 5 \\ + \\ 3x^4 + 0x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 6 \\ \hline 3x^4 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{9}{2}x + 11 \end{array}$$

La adición de polinomios, puede realizarse también, asociando los términos con monomios semejantes, y realizando la reducción de dichos monomios semejantes. En la sustracción, es válida la misma consideración que para la adición, reemplazando previamente el polinomio sustraendo, por el polinomio opuesto.

Ej.: Sean: $P(x) = 2x^3 - 4x^4 + 5x^2 + 3$ y $Q(x) = 4x^2 + 3x + 5x^4 - 2$

Luego: $P(x) + Q(x) = 2x^3 - 4x^4 + 5x^2 + 3 + 4x^2 + 3x + 5x^4 - 2 =$
 $= (-4x^4 + 5x^4) + 2x^3 + (5x^2 + 4x^2) + 3x + (3 - 2) =$
 $= x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 3x + 1$

Ej.: Sean: $A(x) = 3x^2 + 2x - 4$ y $B(x) = 2x^2 + 5$

Luego: $A(x) - B(x) = 3x^2 + 2x - 4 - (2x^2 + 5) =$
 $= 3x^2 + 2x - 4 - 2x^2 - 5 =$
 $= (3x^2 - 2x^2) + 2x + (-4 - 5) =$
 $= x^2 + 2x - 9$

Para resolver una suma algebraica de polinomios, se resuelve en el orden en que aparecen los términos.

Ej.: Dados: $R(x) = 4x^2 + 3x - 2$; $S(x) = 3x^2 - 2x + 7$; $T(x) = x^2 + 5x - 1$

$R(x) + S(x) + T(x) =$

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 3x - 2 \\ + \\ 3x^2 - 2x + 7 \\ + \\ x^2 + 5x - 1 \\ \hline 8x^2 + 6x + 4 \end{array}$$

$R(x) + S(x) - T(x) =$

Primero realizamos: $R(x) + S(x) =$	Y luego, al resultado, le sumamos el polinomio opuesto a $T(x)$, es decir, le sumamos $[-T(x)]$
$\begin{array}{r} 4x^2 + 3x - 2 \\ + \\ 3x^2 - 2x + 7 \\ \hline 7x^2 + x + 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7x^2 + x + 5 \\ + \\ -x^2 - 5x + 1 \\ \hline 6x^2 - 4x + 6 \end{array}$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Para realizar la multiplicación de dos polinomios, estudiaremos previamente como se multiplican dos monomios.

Multiplicación de Monomios

La multiplicación de dos monomios se realiza del siguiente modo:

- Se multiplican los coeficientes de cada uno de los monomios, aplicando la regla de signos de la multiplicación de números reales.
- Se multiplican las variables entre sí, teniendo presente la propiedad de la potenciación del producto de potencias de igual base. Recordemos que el producto de potencias de igual base, es igual a otra potencia de la misma base, cuyo exponente será la suma de los exponentes de las potencias factores:
 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Ej.: a) $(3x) \cdot (4x) = 12x^2$

b) $(5x^3) \cdot (-2x^3) = -10x^6$

c) $(-2x) \cdot (x^5) = -2x^6$

d) $(-8x^4) \cdot (-3x^3) = 24x^7$

e) $\left(-\frac{3}{5}x^2\right) \cdot (-x^3) = \frac{3}{5}x^5$

f) $\left(-\frac{1}{4}x\right) \cdot (-4) = x$

Producto de un número real por un polinomio

Para multiplicar un número real por un polinomio, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y de la resta: $k \cdot (a + b + \dots + h) = k \cdot a + k \cdot b + \dots + k \cdot h$, siendo k un número real.

Ej.: $-4 \cdot (3x^2 - 2x + 5) = (-4) \cdot (3x^2) + (-4) \cdot (-2x) + (-4) \cdot 5$
 $= -12x^2 + 8x - 20$

Multiplicación de Polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y de la resta. Luego, se efectúa la multiplicación de monomios en cada uno de los términos de la nueva expresión, que se obtuvieron luego de aplicar la propiedad distributiva.

Recordemos la propiedad distributiva:

$$(a + b + \dots + h) \cdot (m + n + \dots + p) = a \cdot m + a \cdot n + \dots + a \cdot p + b \cdot m + b \cdot n + \dots + b \cdot p + h \cdot m + h \cdot n + \dots + h \cdot p$$

Ej.: Sean: $A(x) = 5x^2 - 3x - 4$ y $B(x) = 4x^2 - x$

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= (5x^2 - 3x - 4) \cdot (4x^2 - x) = \\ &= (5x^2) \cdot (4x^2) + (5x^2) \cdot (-x) + (-3x) \cdot (4x^2) + (-3x) \cdot (-x) + (-4) \cdot (4x^2) + (-4) \cdot (-x) = \\ &= 20x^4 - 5x^3 - 12x^3 + 3x^2 - 16x^2 + 4x = \\ &= 20x^4 + (-5x^3 - 12x^3) + (3x^2 - 16x^2) + 4x = \quad (\text{procedemos a reducir}) \end{aligned}$$

$$A(x) \cdot B(x) = 20x^4 - 17x^3 - 13x^2 + 4x$$

Conclusión: El grado del producto de dos polinomios no nulos, es la suma de los grados de los polinomios factores: **grado de $[P(x) \cdot Q(x)]$ = grado de $P(x)$ + grado de $Q(x)$**

Otra manera par poder resolver una multiplicación de polinomios es realizando el procedimiento que analizaremos mediante el siguiente ejemplo:

Sean: $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5$ y $Q(x) = x + 3x^4 - x^2$

- Ordenamos y completamos el primer factor: $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 0x - 5$
- Ordenamos el segundo factor: $Q(x) = 3x^4 - x^2 + x$
- Escribimos el polinomio $P(x)$ ordenado y completo y, debajo de él, ubicamos el polinomio $Q(x)$ ordenado.
- Multiplicamos el último monomio de $Q(x)$ por cada monomio de $P(x)$, y escribimos los resultados en orden decreciente.
- Repetimos el paso anterior con cada monomio de $Q(x)$, encolumnando los monomios obtenidos que sean de igual grado.
- Sumamos esos monomios semejantes para obtener el resultado final.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2x^3 + 4x^2 + 0x - 5 \\
 \times \quad 3x^4 - x^2 + x \\
 \hline
 2x^4 + 4x^3 + 0x^2 - 5x \\
 + \quad -2x^5 - 4x^4 - 0x^3 + 5x^2 \\
 \hline
 6x^7 + 12x^6 + 0x^5 - 15x^4 \\
 + \quad 6x^7 + 12x^6 - 2x^5 - 17x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x \\
 \hline
 \text{RESULTADO}
 \end{array}
 \end{array}$$

se obtiene de multiplicar: $(2x^3 + 4x^2 + 0x - 5) \cdot x$

se obtiene de multiplicar: $(2x^3 + 4x^2 + 0x - 5) \cdot (-x^2)$

se obtiene de multiplicar: $(2x^3 + 4x^2 + 0x - 5) \cdot (3x^4)$

Resolviendo la misma multiplicación, aplicando propiedad distributiva, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) &= (2x^3 + 4x^2 - 5) \cdot (3x^4 - x^2 + x) = \\
 &= 6x^7 - 2x^5 + 2x^4 + 12x^6 - 4x^4 + 4x^3 - 15x^4 + 5x^2 - 5x = \\
 &= 6x^7 + 12x^6 - 2x^5 + (2x^4 - 4x^4 - 15x^4) + 4x^3 + 5x^2 - 5x = \\
 &= 6x^7 + 12x^6 - 2x^5 - 17x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x \quad (\text{idéntico resultado})
 \end{aligned}$$

Consecuencias del producto de dos polinomios:

- Si ninguno de los factores es el polinomio nulo, el coeficiente principal del producto, es el producto de los coeficientes principales de cada uno de los polinomios factores.
- El término independiente del producto, es el producto de los términos independientes de cada uno de los polinomios factores.
- Si uno de los polinomios es el polinomio nulo, entonces el producto será el polinomio nulo.

Producto de la suma de dos monomios por su diferencia

Al multiplicar la suma de dos monomios por la diferencia de los mismos, se obtiene la diferencia de los cuadrados de dichos monomios:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Verifiquemos lo expresado analíticamente, aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}
 (a + b) \cdot (a - b) &= a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = \quad (b \cdot a = a \cdot b, \text{ por propiedad conmutativa}) \\
 &= a^2 - \cancel{a \cdot b} + \cancel{b \cdot a} - b^2 = \quad (\text{existen dos monomios semejantes que son opuestos}) \\
 &= a^2 - b^2
 \end{aligned}$$

Nota: Más adelante haremos una interpretación geométrica de este tipo de multiplicación.

Ej.: a) $(x + 3) \cdot (x - 3) = x^2 + \cancel{3x} - \cancel{3x} - 9 =$

$$= x^2 - 9 \quad \text{se evidencia que: } x^2 - 9 = x^2 - 3^2$$

b) $(x^3 + 4x) \cdot (x^3 - 4x) = x^6 + \cancel{4x^4} - \cancel{4x^4} - 16x^2 =$

$$= x^6 - 16x^2 \quad \text{se evidencia que: } x^6 - 16x^2 = (x^3)^2 - (4x)^2$$

c) $(3x^4 + \frac{1}{6}x^3) \cdot (3x^4 - \frac{1}{6}x^3) = 9x^8 + \cancel{\frac{1}{2}x^7} - \cancel{\frac{1}{2}x^7} - \frac{1}{36}x^6$

$$= 9x^8 - \frac{1}{36}x^6$$

d) $\left(-\frac{1}{2}x^2 + 7x\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 - 7x\right) = \left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2 - (7x)^2$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 49x^2$$

OPERACIONES COMBINADAS CON POLINOMIOS

Para resolver una operación combinada con polinomios, se tiene en cuenta el mismo criterio de resolución que para los números reales, es decir, se separa en términos priorizando las multiplicaciones y divisiones. Luego se opera de acuerdo a lo estudiado particularmente para polinomios.

Ej.: Dados: $P(x) = 5x^2 + 6x + 2$; $Q(x) = 2x^3 - x + 6$ y $R(x) = x^2 + 1$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot R(x) + Q(x) &= (5x^2 + 6x + 2) \cdot (x^2 + 1) + 2x^3 - x + 6 \\ &= 5x^4 + 5x^2 + 6x^3 + 6x + 2x^2 + 2 + 2x^3 - x + 6 = \\ &= 5x^4 + (6x^3 + 2x^3) + (5x^2 + 2x^2) + (6x - x) + (6 + 2) = \\ &= 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 5x + 8 \end{aligned}$$

Nota: Al igual que en las operaciones combinadas con números reales, si alguna parte de la operación está entre paréntesis o corchetes, debemos priorizar la resolución de esa parte del cálculo.

EJERCITACIÓN

1) Resolver las siguientes operaciones.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} -3x + x - 5x + x = & \text{b)} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^2 - x^2 = & \text{c)} \sqrt{2}x^4 - 2\sqrt{2}x^4 = \end{array}$$

2) Escribir el polinomio reducido.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 4x^3 + 5x^2 - 2x - x = & \text{c)} -4x^5 + x^3 - 0x^3 + \frac{1}{2}x^5 = \\ \text{b)} 6x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^3 - x^4 = & \text{d)} 40x - x^2 + 5x + 6x^2 - x^3 = \end{array}$$

3) Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = -2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + 3 ; \quad Q(x) = 3x - 4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 \quad \text{y} \quad R(x) = x^2 - 5x + 2$$

Resolver las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} P(x) + Q(x) = & \text{c)} P(x) + R(x) = \\ \text{b)} P(x) - Q(x) = & \text{d)} R(x) - Q(x) = \end{array}$$

4) Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^2 - 1 ; \quad Q(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad R(x) = x^2 + 2x + 1$$

Resolver las siguientes sumas algebraicas.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} P(x) - Q(x) - R(x) = & \text{b)} R(x) - Q(x) + P(x) = \end{array}$$

5) Resolver las siguientes multiplicaciones de monomios.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} (2x^2) \cdot (-6x) = & \text{b)} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot (8x^3) = & \text{c)} \left(-\frac{4}{9}x^4\right) \cdot \left(-\frac{15}{8}x^5\right) = \end{array}$$

6) Resolver las siguientes multiplicaciones. (ítems a, b y c: producto de un monomio por un polinomio; ítems d, e y f: producto de la suma de dos monomios por la diferencia de los mismos).

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (-2x) \cdot \left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2\right) = & \text{d)} \left(3x^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3x^2 - \frac{1}{2}\right) = \\ \text{b)} (6x^3 - 3x^2 + 12x) \cdot (-x^2) = & \text{e)} (5x^6 + 2x) \cdot (5x^6 - 2x) = \\ \text{c)} \left(-\frac{4}{3}x^2 + \frac{12}{5}x - 6\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x^4\right) = & \text{f)} \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{6}x\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{6}x\right) = \end{array}$$

7) Resolver las siguientes multiplicaciones de polinomios.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (x^3 - x + 1) \cdot (x^2 - x) = & \text{c)} (x^5 - x^3 - x + 1) \cdot (x^3 - x^2 + x - 2) = \\ \text{b)} \left(-\frac{2}{3}x + x^3\right) \cdot (2x - 3x^2 + 1) = & \text{d)} (2x - 3x^2 + 1) \cdot \left(-2x^3 - \frac{1}{2} + 3x\right) = \end{array}$$

8) Dados: $P(x) = 2x^2 - 3$; $Q(x) = 5x + 1$ y $R(x) = -6x^3 + 2x^2 + 7$

Resolver los siguientes cálculos combinados:

a) $P(x) \cdot Q(x) - R(x) =$

b) $R(x) \cdot [Q(x) + P(x)] =$

9) Dados los siguientes polinomios:

$$R(x) = x^4 + x^2 - 2x + 4$$

$$S(x) = -x^5 + 3x^2 - 6$$

$$T(x) = 5x^3 - 4x^2 + x - 5$$

Calcular: $[R(x) + S(x)] \cdot T(x) =$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

División de monomios

Para dividir dos monomios, se procede del siguiente modo:

- Se dividen los coeficientes (el coeficiente del monomio dividendo, dividido el coeficiente del monomio divisor), aplicando la regla de signos de la división de números reales.
- Se dividen la variable del monomio dividendo por la variable del monomio divisor, teniendo presente la propiedad de la potenciación del cociente de potencias de igual base. Recordemos que la división de potencias de igual base, es igual a otra potencia de la misma base, cuyo exponente será la resta entre los exponentes de las potencias que aparecen como dividendo y divisor respectivamente:
 $a^n : a^m = a^{n-m}$

Ej.: a) $(4x^3):(2x) = (4:2).(x^3:x) = 2x^2$

b) $x^4:(-8x^3) = [1:(-8)].(x^4:x^3) = -\frac{1}{8}x$

c) $(-6x^5):(3x^2) = (-6:3).(x^5:x^2) = -2x^3$

d) $(-10x^8):(-2x^3) = [-10:(-2)].(x^8:x^3) = 5x^5$

División de un polinomio por un monomio

Para efectuar la división entre un polinomio y un monomio (operación válida únicamente si el monomio aparece como divisor), se divide cada término del polinomio, por el monomio que figura como divisor, resultando una suma algebraica de divisiones de monomios.

Nota: este tipo de división será exacta sólo cuando el grado del monomio divisor, sea menor o igual que el menor exponente de la variable "x" de los términos de coeficientes no nulos del polinomio. En el caso en que el monomio divisor sea de mayor grado que uno o más términos de polinomio dividendo, sólo se dividen aquellos términos cuyo grado sean mayor o igual que el grado del divisor; y los términos del polinomio en que la variable tiene exponente menor que el grado del divisor, conforman un nuevo polinomio considerado como "resto" de la división.

Ej.: 1 $(24x^5 - 16x^3 + 12x^2 - 4x):(-4x) =$
 $= 24x^5 : (-4x) + (-16x^3) : (-4x) + 12x^2 : (-4x) + (-4x) : (-4x) =$
 $= -6x^4 + 4x^2 - 3x + 1$

Ej.: 2 $(2x^6 + 5x^5 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x) : (\frac{1}{2}x) = 4x^5 + 10x^4 + 2x^2 + x + 12$

Ej.: 3 $(7x^4 - 6x^3 + 5x^2 - x + 3) : (2x^2) = \frac{7}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$

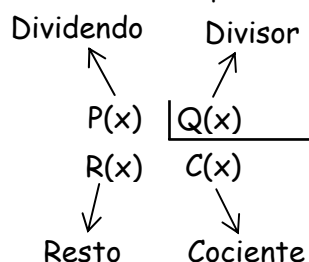
Como los últimos dos términos del polinomio dividendo no pueden ser divididos por ser de menor grado que el monomio divisor, conforman el resto de la división: $R(x) = -x + 3$

División de dos polinomios

Para realizar la división de dos polinomios, es necesario considerar lo siguiente:

- La división será posible sólo si el grado del polinomio dividendo es de mayor o igual grado que el polinomio divisor.
- El polinomio dividendo debe estar completo y ordenado en forma decreciente.
- El polinomio divisor debe estar ordenado en forma decreciente (y completo si se desea).

El esquema de la división de polinomios es el siguiente:



En toda división de polinomios se cumple lo siguiente:

$$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Consideremos los siguientes polinomios:

$$P(x) = 2x - 3 + 2x^4 \quad \text{y} \quad Q(x) = -2x + x^2$$

Para realizar la división $P(x) : Q(x)$, completamos y ordenamos $P(x)$, y ordenamos $Q(x)$.

Luego procedemos del siguiente modo:

1°) El primer término del cociente se obtiene dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor: $(2x^4):(x^2) = 2x^2$

$$\begin{array}{r}
 (2x^4) + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 \quad \big| \quad (x^2) - 2x \\
 \hline
 2x^2
 \end{array}$$

2°) Se multiplica el término obtenido en el cociente por la totalidad del divisor y el **opuesto** de este resultado, se suma al dividendo (o bien, el resultado de la multiplicación mencionada, se le resta al dividendo).

Nota: recordemos que restar dos polinomios, equivale a sumarle al minuendo el polinomio opuesto del sustraendo.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \cancel{2x^4} + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 \\
 + \quad \cancel{-2x^4} + 4x^3 \\
 \hline
 4x^3
 \end{array}
 \quad \big| \quad \begin{array}{r}
 x^2 - 2x \\
 \hline
 2x^2
 \end{array}
 \end{array}$$

3°) Se baja a continuación del la suma realizada, el siguiente término del polinomio dividendo:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \cancel{2x^4} + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 \\
 + \quad \cancel{-2x^4} + 4x^3 \\
 \hline
 4x^3 + 0x^2
 \end{array}
 \quad \big| \quad \begin{array}{r}
 x^2 - 2x \\
 \hline
 2x^2
 \end{array}
 \end{array}$$

4°) Se obtiene el segundo término del cociente, dividiendo el primer término del polinomio formado por la suma realizada anteriormente y el término descendido, con el primer término del polinomio divisor: $(4x^3):(x^2) = 4x$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \cancel{2x^4} + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 \\
 + \quad \cancel{-2x^4} + 4x^3 \\
 \hline
 (4x^3) + 0x^2
 \end{array}
 \quad \big| \quad \begin{array}{r}
 (x^2) - 2x \\
 \hline
 2x^2 + 4x
 \end{array}
 \end{array}$$

5°) Con el segundo término del cociente, se procede del mismo modo que en el 2° paso.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \cancel{2x^4} + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 \\
 + \quad \cancel{-2x^4} + 4x^3 \\
 \hline
 4x^3 + 0x^2 \\
 + \quad \cancel{-4x^3} + 8x^2 \\
 \hline
 8x^2
 \end{array}
 \quad \big| \quad \begin{array}{r}
 x^2 - 2x \\
 \hline
 2x^2 + 4x
 \end{array}
 \end{array}$$

6°) Se baja a continuación del la suma realizada, el siguiente término del polinomio dividendo:

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2x^4} + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 \\
 + \quad \cancel{-2x^4} + 4x^3 \\
 \hline
 4x^3 + 0x^2 \\
 + \quad \cancel{-4x^3} + 8x^2 \\
 \hline
 8x^2 + 2x
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{) x^2 - 2x} \\
 \underline{2x^2 + 4x}
 \end{array}$$

7°) Se obtiene el tercer término del cociente, dividiendo el primer término del polinomio formado por la suma realizada anteriormente y el término descendido, con el primer término del polinomio divisor:
 $(8x^2):(x^2) = 8$

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2x^4} + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 \\
 + \quad \cancel{-2x^4} + 4x^3 \\
 \hline
 4x^3 + 0x^2 \\
 + \quad \cancel{-4x^3} + 8x^2 \\
 \hline
 (8x^2) + 2x
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{) \textcircled{x^2} - 2x} \\
 \underline{2x^2 + 4x + 8}
 \end{array}$$

8°) Se multiplica este nuevo término del cociente por cada uno de los términos del polinomio divisor. Luego, se suma el opuesto de este polinomio, con el polinomio formado por la suma realizada anteriormente en el dividendo y el último término descendido (idem 2° paso).

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2x^4} + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 \\
 + \quad \cancel{-2x^4} + 4x^3 \\
 \hline
 4x^3 + 0x^2 \\
 + \quad \cancel{-4x^3} + 8x^2 \\
 \hline
 8x^2 + 2x \\
 + \quad \cancel{-8x^2} + 16x \\
 \hline
 18x
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{) x^2 - 2x} \\
 \underline{2x^2 + 4x + 8}
 \end{array}$$

9°) A continuación de la suma realizada se desciende el último término del polinomio dividendo

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2x^4} + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 \\
 + \quad \cancel{-2x^4} + 4x^3 \\
 \hline
 4x^3 + 0x^2 \\
 + \quad \cancel{-4x^3} + 8x^2 \\
 \hline
 8x^2 + 2x \\
 + \quad \cancel{-8x^2} + 16x \\
 \hline
 18x - 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{) x^2 - 2x} \\
 \underline{2x^2 + 4x + 8}
 \end{array}$$

10°) El grado de esta nueva suma, es menor que el grado del polinomio divisor y no se puede realizar la división. Por ende, finaliza la división y la expresión $18x - 3$, conforma el resto de la división.

Identificamos el polinomio cociente y el resto de la división:

Cociente: $C(x) = 2x^2 + 4x + 8$

Resto: $R(x) = 18x - 3$

Analizamos de una manera más continua el procedimiento de la división de polinomios:

Ej: $P(x) : Q(x)$, siendo $P(x) = x - 2x^3 + 5 - x^4$

y $Q(x) = 3x + x^2$

$$1^{\circ}) \quad \begin{array}{r} \cancel{-x^4} - 2x^3 + 0x^2 + x + 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \boxed{x^2} + 3x \\ \hline -x^2 \end{array}$$

$$2^{\circ}) \quad \begin{array}{r} \cancel{-x^4} - 2x^3 + 0x^2 + x + 5 \\ + \quad \cancel{x^4} + 3x^3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 3x \\ \hline -x^2 \end{array}$$

$$\quad \quad \quad x^3$$

$$3^{\circ}) \quad \begin{array}{r} \cancel{-x^4} - 2x^3 + 0x^2 + x + 5 \\ + \quad \cancel{x^4} + 3x^3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 3x \\ \hline -x^2 \end{array}$$

$$\quad \quad \quad x^3 + 0x^2 \quad \downarrow$$

$$4^{\circ}) \quad \begin{array}{r} \cancel{-x^4} - 2x^3 + 0x^2 + x + 5 \\ + \quad \cancel{x^4} + 3x^3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \boxed{x^2} + 3x \\ \hline -x^2 + x \end{array}$$

$$\quad \quad \quad \boxed{x^3} + 0x^2$$

$$5^{\circ}) \quad \begin{array}{r} \cancel{-x^4} - 2x^3 + 0x^2 + x + 5 \\ + \quad \cancel{x^4} + 3x^3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 3x \\ \hline -x^2 + x \end{array}$$

$$\quad \quad \quad \begin{array}{r} \cancel{x^3} + 0x^2 \\ + \quad \cancel{-x^3} - 3x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\quad \quad \quad -3x^2$$

$$6^{\circ}) \quad \begin{array}{r} \cancel{-x^4} - 2x^3 + 0x^2 + x + 5 \\ + \quad \cancel{x^4} + 3x^3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 3x \\ \hline -x^2 + x \end{array}$$

$$\quad \quad \quad \begin{array}{r} \cancel{x^3} + 0x^2 \\ + \quad \cancel{-x^3} - 3x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\quad \quad \quad -3x^2 + x \quad \downarrow$$

$$7^{\circ}) \quad \begin{array}{r} \cancel{-x^4} - 2x^3 + 0x^2 + x + 5 \\ + \quad \cancel{x^4} + 3x^3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \boxed{x^2} + 3x \\ \hline -x^2 + x - 3 \end{array}$$

$$\quad \quad \quad \begin{array}{r} \cancel{x^3} + 0x^2 \\ + \quad \cancel{-x^3} - 3x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\quad \quad \quad \boxed{-3x^2} + x$$

$$8^{\circ}) \quad \begin{array}{r} \cancel{-x^4} - 2x^3 + 0x^2 + x + 5 \\ + \quad \cancel{x^4} + 3x^3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 3x \\ \hline -x^2 + x - 3 \end{array}$$

$$\quad \quad \quad \begin{array}{r} \cancel{x^3} + 0x^2 \\ + \quad \cancel{-x^3} - 3x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\quad \quad \quad \begin{array}{r} -3x^2 + x \\ + \quad \cancel{+3x^2} + 9x \\ \hline \end{array}$$

$$\quad \quad \quad 10x$$

$$\begin{array}{r}
 9^{\circ) \quad \cancel{-x^4} - 2x^3 + 0x^2 + x + 5 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 3x \\ -x^2 + x - 3 \end{array} \right. \\
 + \quad \cancel{x^4} + 3x^3 \\
 \hline
 \quad \quad \cancel{x^3} + 0x^2 \\
 + \quad \quad \cancel{-x^3} - 3x^2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \cancel{-3x^2} + x \\
 + \quad \quad \quad \cancel{+3x^2} + 9x \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 10x + 5
 \end{array}$$

La división ha finalizado. El polinomio cociente obtenido es: $C(x) = -x^2 + x - 3$ y el resto $R(x) = 10x + 5$

Observemos un último ejemplo, realizando la división, sin secuenciar el algoritmo de resolución. De esta manera, realizaremos todas las divisiones entre polinomios.

$A(x) : B(x)$, siendo $A(x) = x^4 - 2x^6 + 3x^5 - 6x + 4$ y $B(x) = 2x^3 - 3 + 2x^2$

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad \quad \cancel{-2x^6} + 3x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 6x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} 2x^3 + 2x^2 - 3 \\ -x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \end{array} \right. \\
 + \quad \quad \quad \cancel{2x^6} + 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \cancel{5x^5} + x^4 - 3x^3 + 0x^2 \\
 + \quad \quad \quad \quad \cancel{-5x^5} - 5x^4 + 0x^3 + \frac{15}{2}x^2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \cancel{-4x^4} - 3x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 6x \\
 + \quad \quad \quad \quad \quad \cancel{4x^4} + 4x^3 + 0x^2 - 6x \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cancel{x^3} + \frac{15}{2}x^2 - 12x + 4 \\
 + \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cancel{-x^3} - x^2 + 0x + \frac{3}{2} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{13}{2}x^2 - 12x + \frac{11}{2}
 \end{array}$$

El cociente de la división es: $C(x) = -x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

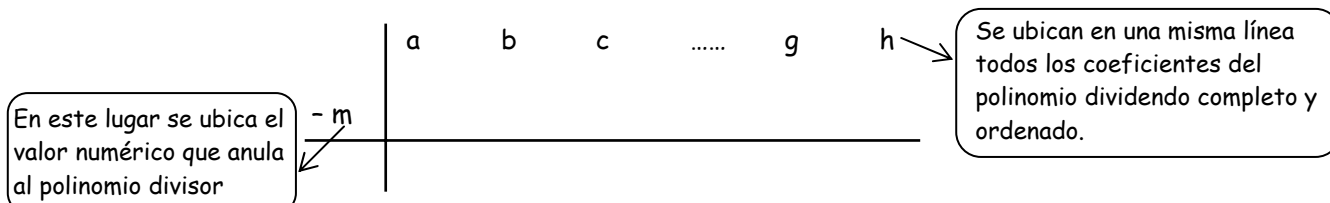
El resto es: $R(x) = \frac{13}{2}x^2 - 12x + \frac{11}{2}$

REGLA DE RUFFINI

La regla de Ruffini es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio $P(x)$ por otro de la forma: $x + a$, pudiendo ser "a" cualquier número real positivo o negativo.

Para aplicar esta regla, se requiere que el polinomio dividido esté completo y ordenado.

Consideremos la división entre un polinomio simbólico $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + gx + h$, y otro $Q(x) = x + m$. Luego establecemos la siguiente disposición práctica:



Luego, se baja el primer coeficiente por debajo de la línea horizontal, se lo multiplica por el valor que anula al polinomio divisor, y a dicho producto se lo ubica debajo del coeficiente b:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & a & b & c & \dots & g & h \\
 -m & & a(-m) & & & & \\
 \hline
 & a & & & & &
 \end{array}$$

A continuación, se suma el segundo coeficiente, con el producto obtenido: $b + a(-m)$. Para hacer más simple el procedimiento (y no hacer tan extensa la notación simbólica), al resultado de esta suma la llamaremos "p": $b + a(-m) = p$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & a & b & c & \dots & g & h \\
 -m & & a(-m) & & & & \\
 \hline
 & a & p & & & &
 \end{array}$$

El algoritmo continúa con la multiplicación $p(-m)$, colocando este producto debajo del coeficiente c. Luego, se realiza la suma del coeficiente c con el producto de $p(-m)$, al cual llamaremos "q"

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & a & b & c & \dots & g & h \\
 -m & & a(-m) & p(-m) & & & \\
 \hline
 & a & p & q & & &
 \end{array}$$

El procedimiento continuaría realizando la multiplicación de $q(-m)$ y colocando dicho producto debajo del siguiente coeficiente, para realizar luego la suma correspondiente, tal como lo veníamos haciendo. Se procede de manera análoga, hasta realizar la suma con el último coeficiente del polinomio dividido.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & a & b & c & \dots & g & h \\
 -m & & a(-m) & p(-m) & \dots & \dots(-m) & s(-m) \\
 \hline
 & a & p & q & \dots & s & r
 \end{array}$$

Es el resto de la división

El último producto, sumado al último coeficiente del dividendo, corresponde al resto de la división.

El polinomio cociente es otro polinomio de un grado menos que el polinomio dividendo, cuyos coeficientes son a, p, q, ..., s.

Por lo tanto, siendo el polinomio dividendo: $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + gx + h$

El polinomio cociente será: $C(x) = ax^{n-1} + px^{n-2} + qx^{n-3} + \dots + s \rightarrow$ (tiene un grado menos)

El resto de la división será el polinomio: $R(x) = r$

Hemos estudiado el algoritmo de la regla de Ruffini de manera fragmentada para comprender mejor el procedimiento; pero cabe aclarar que todo el proceso se realiza en un solo paso:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & a & b & c & \dots & g & h \\
 & & + & + & + & + & + \\
 & & a(-m) & p(-m) & \dots & \dots(-m) & s(-m) \\
 \hline
 & a & p & q & \dots & s & r
 \end{array}$$

se multiplica

Realizaremos la aplicación de la regla de Ruffini a través de un ejemplo numérico.

Sean $P(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 1$ y $Q(x) = x + 4$

Si realizamos la división $P(x) : Q(x)$ utilizando el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + x^2 + 3x - 1 \\
 + \quad -2x^3 - 8x^2 \\
 \hline
 -7x^2 + 3x \\
 + \quad 7x^2 + 28x \\
 \hline
 31x - 1 \\
 + \quad -31x - 124 \\
 \hline
 -125
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x + 4 \\
 \hline
 2x^2 - 7x + 31
 \end{array}$$

El cociente y el resto son respectivamente:

$$C(x) = 2x^2 - 7x + 31 \quad \text{y} \quad R(x) = -125$$

Realicemos la misma división aplicando la regla de Ruffini.

Nota: es posible aplicar la regla de Ruffini, puesto que el divisor tiene la forma: $x \pm a$

En este lugar se ubica el valor numérico que anula al polinomio divisor

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & 3 & -1 \\
 -4 & & & &
 \end{array}$$

Se ubican en una misma línea todos los coeficientes del polinomio dividido completo y ordenado.

Se baja el primer coeficiente (+2) debajo de la línea horizontal, luego se multiplica $2 \cdot (-4)$, y al producto obtenido (-8), se lo coloca debajo del segundo coeficiente. A continuación sumamos el segundo coeficiente (+1) con el producto obtenido (-8), obteniendo -7.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & 3 & -1 \\
 -4 & & -8 & & \\
 \hline
 & 2 & -7 & &
 \end{array}$$

Ahora multiplicamos la suma obtenida (-7) $\cdot (-4)$, y al producto obtenido (+28), lo ubicamos debajo del tercer coeficiente. A continuación sumamos el tercer coeficiente (+3) y (+28), obteniendo +31.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & 3 & -1 \\
 -4 & & -8 & 28 & \\
 \hline
 & 2 & -7 & 31 &
 \end{array}$$

Finalmente, multiplicamos $(+31) \cdot (-4)$, y al producto obtenido (-124), lo ubicamos debajo del último coeficiente (-1). Se realiza la suma entre $(-1) + (-124) = -125$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & 3 & -1 \\
 -4 & & -8 & 28 & -124 \\
 \hline
 & 2 & -7 & 31 & -125
 \end{array}$$

El último producto, sumado al último coeficiente del dividendo, corresponde al resto de la división: $R(x) = -125$

El polinomio cociente es otro polinomio de un grado menos que el polinomio dividido, es decir, de grado 2, cuyos coeficientes son: 2 ; -7 y 31.

El polinomio cociente será: $C(x) = 2x^2 - 7x + 31$

→ (tiene un grado menos que el polinomio dividido)

El grado del dividendo es: gr. $P(x) = 3$ y el grado del polinomio cociente es: gr. $C(x) = 2$

Para aplicar la regla de Ruffini, se realiza todo en un solo paso y no de manera fragmentada, tal como se realiza en el siguiente ejemplo:

Ej.: Siendo $P(x) = 8x^4 + x - 2x^2 + 1$ y $Q(x) = x + \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 8 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & & -4 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline & 8 & -4 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

En consecuencia:

- El polinomio cociente es: $C(x) = 8x^3 - 4x^2 + 1$

- El resto de la división es: $R(x) = \frac{1}{2}$

TEOREMA DEL RESTO

Este teorema expresa que en la división de un polinomio por otro de la forma $x \pm a$, se puede obtener el resto de la división reemplazando la variable independiente del polinomio dividendo por el valor numérico que anula el polinomio divisor, y resolviendo luego del reemplazo realizado.

En las dos divisiones realizadas como ejemplo para interpretar la regla de Ruffini, obtuvimos como resto:

* $(2x^3 + x^2 + 3x - 1) : (x + 4) \rightarrow R(x) = -125$

* $(8x^4 - 2x^2 + x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow R(x) = \frac{1}{2}$

Como en ambos casos, el polinomio divisor tiene la forma $x \pm a$, se puede aplicar el teorema del resto. Para ello, reemplazaremos el valor numérico que anula el polinomio divisor, en el polinomio dividendo, verificando que obtenemos el resto de la división realizada. El valor que anula el polinomio divisor en el primer ejemplo es -4, luego el resto de la división será:

$$\begin{aligned} P(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 1 & \Rightarrow P(-4) = 2.(-4)^3 + (-4)^2 + 3.(-4) - 1 \\ P(-4) &= 2.(-64) + 16 - 12 - 1 \\ P(-4) &= -128 + 16 - 12 - 1 \\ P(-4) &= (-128 - 12 - 1) + 16 \\ P(-4) &= -141 + 16 = \boxed{-125} \end{aligned}$$

El valor que anula el polinomio divisor en el segundo ejemplo es $-\frac{1}{2}$. Luego el resto de la división se obtiene reemplazando dicho valor en el polinomio dividendo:

$$\begin{aligned} P(x) = 8x^4 - 2x^2 + x + 1 & \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}\right) = 8.\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \\ P\left(-\frac{1}{2}\right) &= 8.\frac{1}{16} - 2.\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \\ P\left(-\frac{1}{2}\right) &= \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{-1 + 2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En efecto, el teorema del resto nos ha permitido obtener el resto de la división, sin necesidad de realizar todo el procedimiento de la división. Una conclusión importante de este teorema es que si el resto fuera cero (0), tanto el polinomio divisor como el polinomio cociente, son polinomios divisores del polinomio dividendo.

EJERCITACIÓN

1) Resolver las siguientes divisiones de monomios.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } (-10x^4) : (5x) = & \text{c) } (-10x^7) : (-4x^2) = & \text{e) } (9x^5) : (-3x^2) = & \text{g) } \left(-\frac{3}{8}x^9\right) : \left(\frac{5}{2}x\right) = \\ \text{b) } \left(\frac{1}{4}x^5\right) : \left(-\frac{3}{2}x^3\right) = & \text{d) } (8x^7) : (-2x^5) = & \text{f) } \left(\frac{4}{7}x^6\right) : (2x^4) = & \text{h) } \left(\frac{1}{7}x^3\right) : \left(\frac{5}{7}x^3\right) = \end{array}$$

2) Resolver las siguientes divisiones entre polinomios y monomios. Escribir el resto en aquellas divisiones en los que el polinomio dividido contiene términos de menor grado que el monomio divisor.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (6x^3 - 12x^2 + 3x) : (-3x) = & \text{e) } \left(-\frac{1}{3}x^6 + x^5 - 2x^4 + 5x^3\right) : (-3x^3) = \\ \text{b) } \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - 2x^2\right) : \left(\frac{1}{2}x\right) = & \text{f) } (8x^4 + 6x^3 - 4) : (2x^2) = \\ \text{c) } \left(x^4 - 15x^3 + 9x^2 - \frac{6}{5}x\right) : \left(-\frac{3}{5}x\right) = & \text{g) } (-6x^4 + 9x^5 - 12 + 3x^2) : (-3x) = \\ \text{d) } \left(-6x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 2x^2\right) : \left(-\frac{1}{3}x^2\right) = & \text{h) } (5x^4 + x + 6x^9 - 10 - 20x^6) : (4x^3) = \end{array}$$

3) Resolver las siguientes divisiones.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(-\frac{3}{2}x^2 \cdot \frac{4}{5}x^3\right) : \left(-\frac{10}{3}x^4\right) = & \text{b) } [(3x + 5)(3x - 5)] : (-5) = \end{array}$$

4) Hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (2x^3 - 4x^2 - 5x - 3) : (x + 1) = & \text{e) } (x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 2) : (x^2 + 1) = \\ \text{b) } (x^3 - 6x^2 + 2) : \left(\frac{1}{3}x + 1\right) = & \text{f) } (2x^3 - 9x^2 + 2x - 5) : (2x - 5) = \\ \text{c) } (5x^3 - 4x - 3) : (x^2 - x) = & \text{g) } (x^5 - 125) : (x^2 + 5x + 25) = \\ \text{d) } (2x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2) : (x^3 - x + 1) = & \text{h) } (x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4) : (x^2 - x) = \end{array}$$

5) Resolver las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (2x^3 + 5x^2 - x - 5) : (x + 2) = & \text{e) } (3x^3 - 2x^2 - 2) : (x + 1) = \\ \text{b) } (x^3 - x + 2) : (x - 2) = & \text{f) } (-24x - x^4 + 5) : (x + 3) = \\ \text{c) } \left(\frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 1\right) : (x + 1) = & \text{g) } (-x^5 + 12x^3 - 15x^2 - 16) : (x + 4) = \\ \text{d) } (2x^3 + 3x - 1) : (x^3 - 2) = & \text{h) } (3x^3 + 7x^2 + 6x - 1) : (x + 2) = \end{array}$$

6) Calcular el resto de las siguientes divisiones aplicando el teorema del resto.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (5x^2 - 2x + 4) : (x + 3) = & \text{c) } (2x^3 - 4x^2 - 3) : (x - 1) = \\ \text{b) } (12x^4 - 5x^2 + 2x - 5) : (x - 2) = & \text{d) } \left(\frac{3}{2}x^3 + 4x^2 + 3\right) : (x + 2) = \end{array}$$

POTENCIACIÓN DE POLINOMIOS

POTENCIA DE UN MONOMIO

Para resolver la potencia de un monomio, se debe aplicar la propiedad distributiva de la potenciación respecto de la multiplicación y luego la potencia de otra potencia. Es decir, un monomio elevado a la n-ésima potencia, es igual al coeficiente del monomio elevado a la n-ésima potencia, por la variable independiente del monomio elevado a la n-ésima potencia.

Recordemos las siguientes propiedades de la potenciación:

- Propiedad distributiva de la potenciación respecto de la multiplicación: $(a.b)^n = a^n . b^n$
- Potencia de otra potencia: $(a^n)^m = a^{n.m}$

Entonces:

$$(a.x^n)^p = a^p . (x^n)^p$$

Ejemplos:

$$a) (2x)^4 = 2^4 . x^4 = 16x^4$$

$$b) (-2x^2)^3 = (-2)^3 . (x^2)^3 = -8x^6$$

$$c) \left(-\frac{3}{4}x^5\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 . (x^5)^3 = -\frac{27}{64}x^{15}$$

CUADRADO DE UN BINOMIO

Al elevar al cuadrado un binomio se obtiene una expresión de tres términos, llamada "trinomio cuadrado perfecto".

El desarrollo del cuadrado de un binomio es el siguiente:

$$\underbrace{(a + b)^2}_{\text{Cuadrado de un binomio}} = \underbrace{a^2 + 2.a.b + b^2}_{\text{Trinomio Cuadrado Perfecto}}$$

El primer miembro es el CUADRADO DE UN BINOMIO, y el segundo miembro es un polinomio denominado TRINOMIO CUADRADO PERFECTO. El segundo miembro consta de 3 términos, por ello se denomina trinomio, dos de esos términos son cuadrados perfectos y el término restante es el doble producto de las bases de dichos cuadrados.

El trinomio cuadrado perfecto, se obtiene al desarrollar el cuadrado de un binomio. En efecto, desarrollando la potencia y aplicando la propiedad distributiva se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b).(a + b) \\ &= a^2 + a.b + b.a + b^2 \\ &= a^2 + a.b + a.b + b^2 \\ &= a^2 + 2.a.b + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ej.: a) } (x + 3)^2 &= x^2 + 2.x.3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6.x + 9\end{aligned}$$

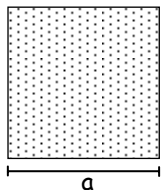
$$\begin{aligned}b) (x - 7)^2 &= x^2 + 2.x.(-7) + (-7)^2 \\ &= x^2 - 14.x + 49\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c) (x^3 - 5x)^2 &= (x^3)^2 + 2.x^3.(-5x) + (-5x)^2 \\ &= x^6 - 10.x^4 + 25.x^2\end{aligned}$$

Interpretación Geométrica del Cuadrado de un Binomio

Consideremos las siguientes figuras:

* Cuadrado cuyo lado tiene una longitud "a"

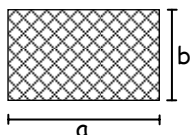


El área de este cuadrado de lado "a" es:

$$A = \text{lado} \times \text{lado} = l^2$$

$$A = a \cdot a = a^2$$

* Rectángulo de base "a" y altura "b"

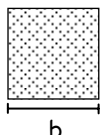


El área de este rectángulo es:

$$A = \text{base} \times \text{altura}$$

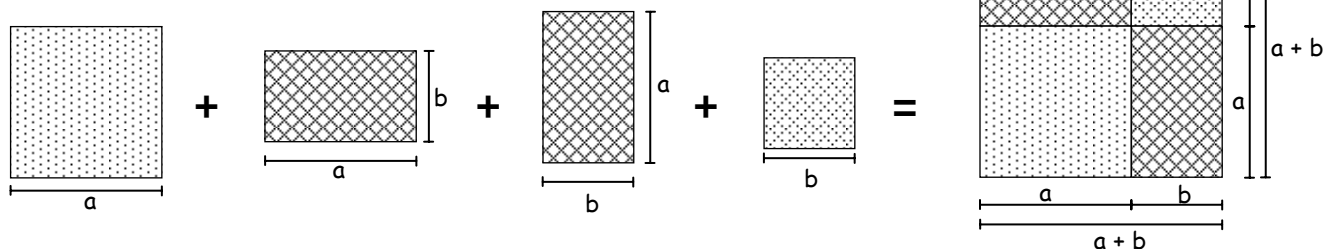
$$A = a \cdot b$$

* Cuadrado cuyo lado tiene una longitud "b"



El área de este cuadrado de lado "b" es: $A = b \cdot b = b^2$

Luego:



$$a^2 + \underbrace{a \cdot b + b \cdot a}_{2 \cdot a \cdot b} + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$

CUBO DE UN BINOMIO

Al elevar al cubo un binomio se obtiene una expresión de cuatro términos, llamada "cuatrinomio cubo perfecto".

El desarrollo del cubo de un binomio es el siguiente:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

Cubo de un binomio
Cuatrinomio Cubo Perfecto

El primer miembro es el CUBO DE UN BINOMIO, y el segundo miembro es un polinomio denominado CUATRINOMIO CUBO PERFECTO. El segundo miembro consta de 4 términos, por ello se denomina cuatrinomio; dos de esos términos son cubos perfectos, uno de los dos términos restantes, es el triple producto entre el cuadrado de la base del primer cubo perfecto por la base del otro cubo perfecto; y el término que queda es el triple producto entre la base del primer cubo perfecto y el cuadrado de la base del segundo cubo perfecto.

El cuatrinomio cubo perfecto, se obtiene al desarrollar el cubo de un binomio. En efecto, desarrollando la potencia y aplicando la propiedad distributiva se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = \\
 &= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) = \\
 &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = \\
 &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

Reduciendo los términos semejantes:

Ejemplos.:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } (x + 3)^3 &= x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3 = \\
 &= x^3 + 9x^2 + 3x \cdot 9 + 27 = \\
 &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27
 \end{aligned}$$

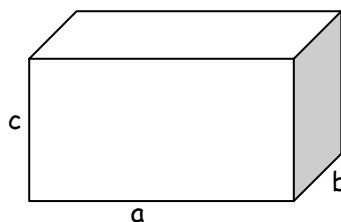
$$\begin{aligned}
 \text{b) } (x - 4)^3 &= x^3 + 3x^2 \cdot (-4) + 3x \cdot (-4)^2 + (-4)^3 = \\
 &= x^3 - 12x^2 + 3x \cdot 16 - 64 = \\
 &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } (-x + 2)^3 &= (-x)^3 + 3(-x)^2 \cdot 2 + 3(-x) \cdot 2^2 + 2^3 = \\
 &= -x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3(-x) \cdot 4 + 8 = \\
 &= -x^3 + 6x^2 - 12x + 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } (-2x - 1)^3 &= (-2x)^3 + 3(-2x)^2 \cdot (-1) + 3(-2x) \cdot (-1)^2 + (-1)^3 = \\
 &= (-8)x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot (-1) + 3(-2x) \cdot 1 + (-1) = \\
 &= -8x^3 - 12x^2 - 6x - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } (x^3 - 5x)^3 &= (x^3)^3 + 3(x^3)^2 \cdot (-5x) + 3x^3 \cdot (-5x)^2 + (-5x)^3 = \\
 &= x^9 + 3x^6 \cdot (-5x) + 3x^3 \cdot 25x^2 + (-125)x^3 = \\
 &= x^9 - 15x^7 + 75x^5 - 125x^3
 \end{aligned}$$

Antes de estudiar la interpretación geométrica del cubo de un binomio, como se calcula el volumen de un prisma recto:



$$V = (\text{Sup de la base}) \times \text{altura}$$

$$\text{o bien } V = \text{base} \times \text{altura} \times \text{profundidad}$$

$$\text{o bien } V = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto}$$

En el prisma recto dado como ejemplo, podemos considerar que la base se obtiene de multiplicar las longitudes "a" y "b"; luego multiplicando la superficie de la base "a.b" por la altura "c", obtenemos el volumen del prisma dado: $V = (\text{Sup de la base}) \times \text{altura}$

$$V = a \times b \times c$$

Como casos particulares podemos tener un prisma recto cuyas aristas sean todas de igual longitud. Este prisma se denomina cubo y su volumen se calcula del siguiente modo:

$$V = (\text{arista})^3$$

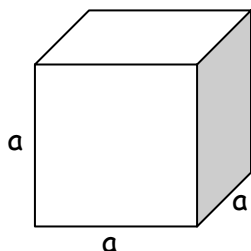
Otro caso particular sería el de un prisma recto en el que una de sus caras sea un cuadrado. Entonces tendríamos sólo dos longitudes diferentes entre sus aristas "a" y "b", y su volumen se calcularía del siguiente modo:

$$V = a \times a \times b = a^2 \times b \quad \text{o bien} \quad V = a \times b \times b = a \times b^2$$

Interpretación Geométrica del Cubo de un Binomio

Consideremos los siguientes prismas:

* Cubo cuya arista tiene una longitud "a":

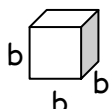


$$V = (\text{arista})^3$$

$$V = a^3$$

Cantidad de cubos "grandes": 1

* Cubo cuya arista tiene una longitud "b":

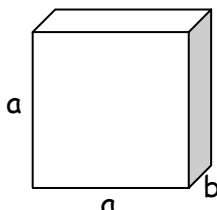
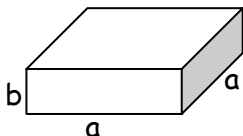
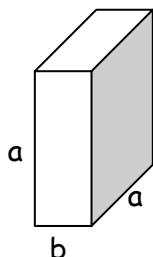


$$V = (\text{arista})^3$$

$$V = b^3$$

Cantidad de cubos "pequeños": 1

* Prisma recto de base "a", altura "a" y profundidad "b"



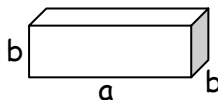
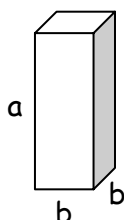
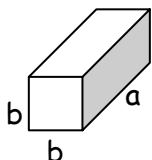
$$V = \text{base} \times \text{altura} \times \text{profundidad}$$

$$V = a \times a \times b$$

$$V = a^2 \cdot b$$

Cantidad de prismas "grandes": 3

* Prisma recto de base "a", altura "b" y profundidad "b"



$$V = \text{base} \times \text{altura} \times \text{profundidad}$$

$$V = a \times b \times b$$

$$V = a \cdot b^2$$

Cantidad de prismas "pequeños": 3

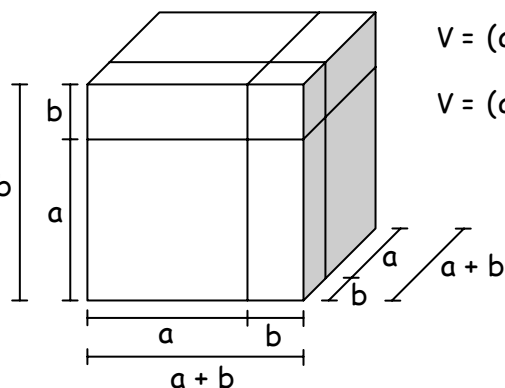
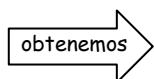
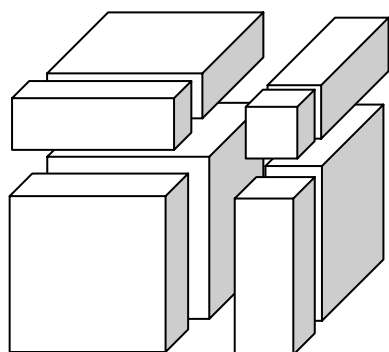
En síntesis, hemos considerado los siguientes prismas:

→ 2 cubos: uno "grande" de arista "a" y volumen a^3 ; y uno "pequeño" de arista "b" y volumen b^3

→ 3 prismas "grandes" en las que una de sus caras es un cuadrado de lado "a", y cuyo volumen es: $a^2 \cdot b$

→ 3 prismas "pequeños" en las que una de sus caras es un cuadrado de lado "b", cuyo volumen es: $a \cdot b^2$

Si a los prismas considerados los distribuimos espacialmente como se muestra en la figura, se obtiene un cubo de arista "a + b" y volumen $(a + b)^3$, y cuyo volumen será igual a la suma de los volúmenes de cada uno de los 8 prismas considerados en un comienzo.



$$V = (\text{arista})^3$$

$$V = (a + b)^3$$

$$\text{Queda demostrado que: } (a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Observa el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$$

¿Puedes decir, con sólo observarlo, para qué valores de x el polinomio será cero?

Si ahora descomponemos a $P(x)$ en los siguientes factores:

$$P(x) = (x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$$

¿Puedes ahora decir, con sólo observarlo, para qué valores de x el polinomio será cero?

Sin duda, tu respuesta fue afirmativa en el segundo caso. En efecto, los valores que anulan el polinomio serán: -2 ; -3 y $+3$.

Es evidente que es mucho más fácil analizar un polinomio, si se lo descompone en productos de polinomios de menor grado y de coeficientes más sencillos.

Antes de continuar hacia los procedimientos que permiten factorizar un polinomio, demostraremos que las dos expresiones presentadas (el polinomio y su factorización) son equivalentes:

$$P(x) = (x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$$

aplicando propiedad distributiva entre los dos primeros factores: $P(x) = (x^2 + 3x + 2x + 6) \cdot (x - 3)$

$$P(x) = (x^2 + 5x + 6) \cdot (x - 3)$$

aplicando propiedad distributiva: $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x^2 - 15x + 6x - 18$

$$\text{reduciendo el polinomio: } P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$$

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como un producto de polinomios de menor grado y coeficientes más sencillos, escribiéndolo como un producto de polinomios primos.

Polinomios Primos: Un polinomio es primo o irreducible, si no se puede descomponer en el producto de dos polinomios de grado mayor que 0 y menor que su propio grado.

Características de todo polinomio:

- Todo polinomio de primer grado es primo.
- Si un polinomio no es primo, es compuesto.

Estudiaremos los casos de factorización de polinomios denominados: Factor Común; Factor Común en Grupos, Trinomio Cuadrado Perfecto, Cuatrinomio Cubo Perfecto, Diferencia de Cuadrados, Suma o Resta de Potencias de Igual Grado.

1º Caso: FACTOR COMÚN

Para factorizar un polinomio a través del "factor común", se debe recordar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o de la resta:

	Propiedad distributiva a izquierda	Propiedad distributiva a derecha
Respecto de la suma	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$
Respecto de la resta	$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$	$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$

Para extraer factor común, se procede de manera inversa a la aplicación de la propiedad distributiva. Para ello, hay que reconocer cuál o cuáles, son los factores que hay en común en todos los términos (qué factor se encuentra repetido en todos los términos), y luego para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término por el factor común.

Una regla práctica, permite encontrar el factor común, encontrando el producto entre:

- la variable del polinomio, elevada al menor exponente, siempre y cuando dicha variable sea común a todos los términos del polinomio.
- el máximo común divisor de todos los coeficientes.

Dada la siguiente suma algebraica: $14 + 6 - 10$

Completemos reemplazando cada término por el producto de sus factores primos:

$$\begin{array}{ccc} 14 & + & 6 & - & 10 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & + & \dots & - & \dots \end{array}$$

Recuerda que: "a" es un número primo si y sólo si es divisible por: 1; -1; a y -a.

¿Cuál es el factor común a todos los términos?

Extrae dicho factor y completa: (..... + -)

Ej. 1: Consideremos el siguiente polinomio:

$$P(x) = 2x^2 - 4x$$

$$P(x) = 2 \cdot x \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot x$$

$$P(x) = \textcircled{2} \cdot \textcircled{x} \cdot x - \textcircled{2} \cdot 2 \cdot \textcircled{x}$$

Los factores que tienen en común cada término, son los que se han encerrado en un círculo, y éstos son los factores que se extraen en común:

$$P(x) = 2 \cdot x \cdot (x - 2)$$

Podemos observar que la variable extraída como factor común, es la variable con el menor exponente, y que el coeficiente extraído, es el máximo común divisor entre el 2 y el 4.

Ej. 2: Consideremos el siguiente polinomio:

$$Q(x) = -12x^6 + 6x^5 - 15x^3$$

$$Q(x) = -4 \cdot \textcircled{3} \cdot x^3 \cdot \textcircled{x^3} + 2 \cdot \textcircled{3} \cdot \textcircled{x^3} \cdot x^2 - 5 \cdot \textcircled{3} \cdot \textcircled{x^3}$$

$$Q(x) = 3x^3 \cdot (-4x^3 + 2x^2 - 5)$$

Ej. 3: Consideremos el siguiente polinomio:

$$R(x) = -12x^6 + 6x^5 - 15x^3$$

El m.c.d.(12;6;15) = 3
La variable con el menor exponente es x^3

$$R(x) = 3x^3 \cdot (-4x^3 + 2x^2 - 5)$$

Ej. 4: Consideremos el siguiente polinomio:

$$M(x) = 35x^5 + 20x^4 - 5x^2$$

El m.c.d.(35;20;5) = 5
La variable con el menor exponente es x^2

$$M(x) = 5x^2 \cdot (7x^3 + 4x^2 - 1)$$

Nota: Cuando todos los factores de un término se extraen como factor común, en dicho término dentro del paréntesis, se coloca un "1", puesto que podemos suponer que todos los términos están multiplicados por el "1", que al ser el elemento neutro de la multiplicación, no altera la expresión original.

Ej. 5: Consideremos el siguiente polinomio:

$$N(x) = 4x^2 - 8x^3 + 12x - 20$$

El m.c.d.(4;8;12;20) = 4
La variable no es común a todos los términos

$$N(x) = 4 \cdot (x^2 - 2x^3 + 3x - 5)$$

Ej. 6: Consideremos el siguiente polinomio:

$$L(x) = 5x^3 + 8x^2 - 4x - 7$$

El m.c.d.(5;8;4;7) = 1
La variable no es común a todos los términos

No es posible extraer factor común

Ej. 7: Consideremos el siguiente polinomio:

$$T(x) = \frac{5}{12}x^4 + \frac{25}{18}x^3 - \frac{20}{6}x^2$$

El m.c.d. de los numeradores (5;25;20) = 5
El m.c.d. de los denominadores (12;18;6) = 6
La variable con el menor exponente es x^2

$$T(x) = \frac{5}{6}x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 4 \right)$$

Ej. 8: Consideremos el siguiente polinomio:

$$S(x) = 5x^6 + 2x^4 - 3x^2$$

Siempre es posible sacar factor común -1, cambiando los signos de todos los términos del polinomio original

$$S(x) = (-1) \cdot x^2 \cdot (-5x^4 - 2x^2 + 3)$$

Para poder factorizar este polinomio, al extraer factor común del 2º grupo, es necesario hacerlo con signo negativo para lograr que uno de los factores del 2º término sea igual a uno de los factores del 1º término.

2º Caso: FACTOR COMÚN EN GRUPOS

Ya vimos un caso de factorización de polinomios llamado FACTOR COMÚN.

Recordemos dos ejemplos: $\rightarrow a + a^2 = a \cdot (1 + a)$

$$\rightarrow x^3 + m \cdot x = x \cdot (x^2 + m)$$

Otro caso de factorización de polinomios es el llamado "FACTOR COMÚN EN GRUPOS".

Para aplicar este caso, se debe conformar grupos (aplicando la propiedad asociativa), de modo tal que cada grupo tenga igual número de términos. Luego, se extrae factor común de cada uno de los grupos conformados anteriormente. Cada uno de los grupos formados inicialmente, se convierte (luego de extraer factor común) en un producto de 2 factores, en donde uno de dichos factores es común a todos los términos. Finalmente, se extrae éste nuevo factor común, quedando UN SOLO TÉRMINO de dos factores.

Analicemos el siguiente ejemplo:

$$P(x) = x^2 + a \cdot x + b \cdot x + a \cdot b$$

- Asociamos en grupos de manera conveniente: $P(x) = (x^2 + a \cdot x) + (b \cdot x + a \cdot b)$
- Extraemos factor común en cada grupo: $P(x) = x \cdot (x + a) + b \cdot (x + a)$
- En los dos términos es común el factor $(x + a)$: $P(x) = (x + a) \cdot (x + b)$

Nota: La dificultad de este caso de factorización reside en asociar de manera adecuada, puesto que si no se agrupa en forma conveniente, puede no ser posible la aplicación de este caso. Por ende, muchas veces se procede por ensayo-error, hasta encontrar la asociación apropiada. No siempre es posible la aplicación de este caso.

Ej. 1: $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x + 6$

$$P(x) = (x^4 + 2x^3) + (3x + 6) \quad \rightarrow \text{asociamos de modo conveniente y extraemos factor común}$$

$$P(x) = x^3 \cdot (x + 2) + 3 \cdot (x + 2) \quad \rightarrow \text{en cada término aparece como factor común } (x + 2)$$

$$P(x) = (x + 2) \cdot (x^3 + 3) \quad \rightarrow \text{el polinomio queda factorizado}$$

Una forma de verificar si la factorización realizada es correcta, es aplicando propiedad distributiva y comprobando que se vuelve al polinomio original:

$$P(x) = (x + 2) \cdot (x^3 + 3)$$

$$P(x) = x^4 + 3x + 2x^3 + 6$$

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x + 6$$

Ej. 2: $Q(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 6$

$$Q(x) = (x^5 + 2x^4 + 3x^3) + (2x^2 + 4x + 6) \quad \rightarrow \text{asociamos en dos grupos de 3 términos}$$

$$Q(x) = x^3 \cdot (x^2 + 2x + 3) + 2 \cdot (x^2 + 2x + 3) \quad \rightarrow \text{se extrae: } x^2 + 2x + 3 \text{ como factor común}$$

$$Q(x) = (x^2 + 2x + 3) \cdot (x^3 + 2)$$

Otra forma de factorizar este polinomio es la siguiente:

$$Q(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 6$$

$$Q(x) = x^5 + 2x^2 + 2x^4 + 4x + 3x^3 + 6 \quad \rightarrow \text{conmutamos términos}$$

$$Q(x) = (x^5 + 2x^2) + (2x^4 + 4x) + (3x^3 + 6) \quad \rightarrow \text{asociamos en tres grupos de 2 términos}$$

$$Q(x) = x^2 \cdot (x^3 + 2) + 2x \cdot (x^3 + 2) + 3 \cdot (x^3 + 2) \quad \rightarrow \text{se extrae: } x^3 + 2 \text{ como factor común}$$

$$Q(x) = (x^3 + 2) \cdot (x^2 + 2x + 3) \quad \text{o bien } \cup \quad Q(x) = (x^2 + 2x + 3) \cdot (x^3 + 2)$$

Nota: En algunos casos, un polinomio puede ser factorizado asociando de distintas maneras, obteniendo expresiones equivalentes.

Ej. 3: $S(x) = 2x^4 - 6x^3 - 3x + 9$

$$S(x) = (2x^4 - 6x^3) + (-3x + 9)$$

$$S(x) = 2x^3 \cdot (x - 3) + (-3) \cdot (x - 3)$$

$$S(x) = (x - 3) \cdot (2x^3 - 3)$$

Ej. 4: $R(x) = 4x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 10x - 5$
 $R(x) = (4x^6 + 2x^5) + (6x^4 + 3x^3) + (-10x - 5)$
 $R(x) = 2x^5 \cdot (2x + 1) + 3x^3 \cdot (2x + 1) + (-5) \cdot (2x + 1)$
 $R(x) = (2x + 1) \cdot (2x^5 + 3x^3 - 5)$

Ej. 5: $T(x) = 4x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{10}{3}x - \frac{5}{9}$
 $T(x) = \left(4x^4 + \frac{2}{3}x^3\right) + \left(-\frac{10}{3}x - \frac{5}{9}\right)$
 $T(x) = 2x^3 \cdot \left(2x + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(2x + \frac{1}{3}\right)$
 $T(x) = \left(2x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(2x^3 - \frac{5}{3}\right)$

Ej. 6: $A(x; y) = x \cdot y - 8 \cdot x + 2 \cdot y - 16$
 $A(x; y) = (x \cdot y + 2 \cdot y) + (-8 \cdot x - 16)$
 $A(x; y) = y \cdot (x + 2) + (-8) \cdot (x + 2)$
 $A(x; y) = (x + 2) \cdot (y - 8)$

En síntesis:

Al factorizar aplicando Factor Común en Grupos, se debe proceder del siguiente modo:

- Asociamos convenientemente de forma tal que uno de los factores de cada grupo sea el mismo en todos los grupos.
- Los grupos formados deben tener igual número de términos.
- Extraemos el factor común de cada grupo
- Nos quedará un mismo factor en cada término que, a su vez, se extrae como factor común.

3° Caso: TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Ya estudiamos el desarrollo del cuadrado de un binomio: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Por el carácter simétrico de la igualdad, podemos escribir:

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$

Recordemos que el primer miembro: $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ se denomina TRINOMIO CUADRADO PERFECTO. Es un trinomio porque consta de 3 términos. Dos de ellos son cuadrados perfectos, y el término restante es el doble producto de las bases de dichos cuadrados.

Todos los trinomios cuadrados perfectos quedan factorizados cuando se los expresa como el cuadrado de un binomio, el cual se forma con las bases de los cuadrados perfectos.

Es decir: $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$, queda factorizado al expresarlo del siguiente modo: $(a + b)^2$

Pero... ¿por qué está factorizado si lo expresamos como una potencia?. Sólo necesitamos recordar que desarrollar una potencia consiste en multiplicar la base de dicha potencia por sí misma, tantas veces como lo indique el exponente. Ésto es, la potencia es una forma abreviada de escribir una multiplicación en la que todos sus factores son iguales.

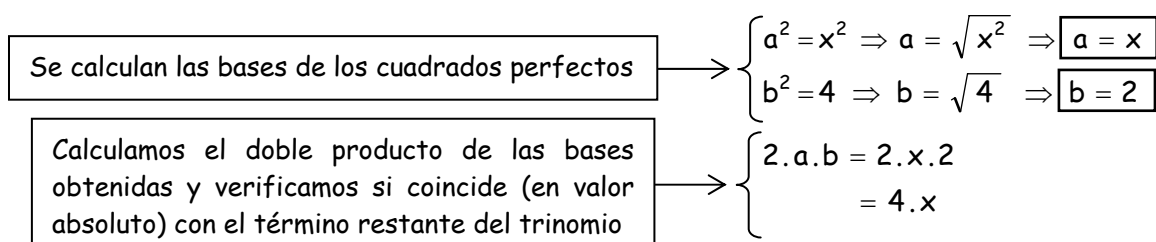
Entonces: $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) \rightarrow$ Al observar el cuadrado de un binomio, debemos interpretar que se trata de un producto de la base por sí misma

CUIDADO!... en algunas ocasiones puede suceder que un trinomio tenga dos términos cuadrados perfectos, pero que el término restante no sea el doble producto de las bases de dichos cuadrados; entonces NO ES un trinomio cuadrado perfecto y no se puede factorizar de este modo.

El procedimiento para poder expresar un trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio es el siguiente:

- 1°) Se reconoce en el trinomio los dos términos que sean cuadrados perfectos.
- 2°) Se halla la base de dichos cuadrados perfectos.
- 3°) Se calcula el doble producto de las bases halladas y se comprueba si es igual (en valor absoluto) al término restante.
- 4°) Se forma el binomio con las bases encontradas y se eleva lo eleva al cuadrado.

Ej.1: $P(x) = x^2 + 4x + 4$



Como el doble producto de las bases coincide con el término restante del trinomio, estamos en condiciones de afirmar que el polinomio analizado es un **TRINOMIO CUADRADO PERFECTO**, por lo que puede ser factorizado como el cuadrado de un binomio. Dicho binomio será formado con las bases obtenidas de cada uno de los cuadrados perfectos; pero antes debemos tener presente de qué manera se establecen los signos de este binomio. Será muy importante recordar lo siguiente:

- Si el doble producto es positivo, los dos términos del binomio tienen el mismo signo.
- Si el doble producto es negativo, los dos términos del binomio tienen distinto signo.

De acuerdo a esta observación, la factorización del polinomio dado, tendrá dos opciones:

$$P(x) = x^2 + 4x + 4$$

$$\boxed{P(x) = (x + 2)^2}$$

o bien:

$$\boxed{P(x) = (-x - 2)^2}$$

Para verificar que ambas posibilidades son factorizaciones del polinomio dado, desarrollaremos ambas potencias, y demostraremos que ambas expresiones representan la factorización del polinomio original:

$$P(x) = (x + 2)^2$$

$$P(x) = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2$$

$$P(x) = x^2 + 4 \cdot x + 4$$

$$P(x) = (-x - 2)^2 = [-x + (-2)]^2$$

$$P(x) = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot (-2) + (-2)^2$$

$$P(x) = x^2 + 4 \cdot x + 4$$

Ambos desarrollos finalizan en idéntica forma (con el polinomio original).

Ej.2: $P(x) = x^2 - 6x + 9$

reconocemos los cuadrados perfectos:	Siendo las bases obtenidas: $a = x$ $b = 3$	
$a^2 = x^2 \Rightarrow a = \sqrt{x^2} \Rightarrow a = x$	Buscamos el doble producto de las bases obtenidas:	$2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot x \cdot 3 = 6 \cdot x$
$b^2 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{9} \Rightarrow b = 3$		

Luego, el polinomio analizado es un trinomio cuadrado perfecto. Cómo el término que resulta del doble producto de las bases de los cuadrados es negativo, entonces, los términos del binomio conformado para expresar la factorización, tendrán distintos signos:

$$P(x) = x^2 - 6x + 9$$

$$\boxed{P(x) = (x - 3)^2}$$

o bien:

$$\boxed{P(x) = (-x + 3)^2}$$

Verifiquemos que los desarrollos de los cuadrados de ambos binomios son equivalentes:

$$P(x) = (x - 3)^2 = [x + (-3)]^2$$

$$P(x) = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2$$

$$P(x) = x^2 - 6 \cdot x + 9$$

$$P(x) = (-x + 3)^2$$

$$P(x) = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 3 + 3^2$$

$$P(x) = x^2 - 6 \cdot x + 9$$

Ej.3: $P(x) = 4x^2 + 20x + 25$

reconocemos los cuadrados perfectos:	Siendo las bases obtenidas: $a = 2x$ $b = 5$	
$a^2 = 4x^2 \Rightarrow a = \sqrt{4x^2} \Rightarrow a = 2x$	Buscamos el doble producto de las bases obtenidas:	$2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot 2x \cdot 5 = 20 \cdot x$
$b^2 = 25 \Rightarrow b = \sqrt{25} \Rightarrow b = 5$		

Luego: $P(x) = 4x^2 + 20x + 25$

$$\boxed{P(x) = (2x + 5)^2}$$

ó

$$\boxed{P(x) = (-2x - 5)^2}$$

Ej. 4: $Q(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$

reconocemos los cuadrados perfectos:	Siendo las bases obtenidas: $a = x^2$ $b = \frac{1}{2}$
$a^2 = x^4 \Rightarrow a = \sqrt{x^4} \Rightarrow a = x^2$	Buscamos el doble producto de las bases obtenidas: $2.a.b = 2.x^2 \cdot \frac{1}{2} = x^2$
$b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$	

La factorización será: $Q(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ o bien $Q(x) = \left(-x^2 + \frac{1}{2}\right)^2$

Analiza el siguiente trinomio:

$$M(x) = x^2 + 12x + 36$$

reconocemos los cuadrados perfectos:	Siendo las bases obtenidas: $a = \dots\dots$ $b = \dots\dots$
$a^2 = \dots\dots \Rightarrow a = \sqrt{\dots\dots} \Rightarrow a = \dots\dots$	Buscamos el doble producto de las bases obtenidas: $2.a.b = 2.\dots\dots = \dots\dots$
$b^2 = \dots\dots \Rightarrow b = \sqrt{\dots\dots} \Rightarrow b = \dots\dots$	

Luego: $M(x) = (\dots\dots\dots)^2$ o bien $M(x) = (\dots\dots\dots)^2$

Algo más sobre los signos del binomio

Ahora analizaremos por qué si el término del doble producto es positivo, las bases que conforman el binomio deben ser de igual signo. Para ello consideraremos nuevamente el último trinomio cuadrado perfecto que hemos factorizado:

$$M(x) = x^2 + 12x + 36$$

Los cuadrados son: x^2 y 36

Las bases de dichos cuadrados son: $a^2 = x^2 \Rightarrow a = \pm \sqrt{x^2} \Rightarrow a = \pm x$
 $b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm \sqrt{36} \Rightarrow b = \pm 6$

Sabemos que en las ecuaciones en las que la incógnita aparece en el radicando de una raíz de índice par, tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa (ambas de igual valor absoluto).

Entonces, si consideramos que nuestras incógnitas son "a" y "b", para cada una de ellas obtendremos dos soluciones:

$$\rightarrow \text{para } a^2 = x^2, \text{ sus bases son: } a = +x \quad \text{y} \quad a = -x$$

$$\rightarrow \text{para } b^2 = 36, \text{ sus bases son: } b = +6 \quad \text{y} \quad b = -6$$

Luego, para calcular el doble producto tenemos 4 posibilidades:

$$\underline{2.(+x).(+6)} \qquad \underline{2.(+x).(-6)} \qquad \underline{2.(-x).(+6)} \qquad \underline{2.(-x).(-6)}$$

Pero para que el doble producto sea $+12x$, sólo podemos admitir dos posibilidades de las cuatro presentadas: $2.(+x).(+6) = +12x$

o bien: $2.(-x).(-6) = +12x$

Como vemos si el doble producto de las bases de los cuadrados es positiva, sólo aceptaremos un binomio conformado por dos términos de igual signo (o los dos positivos, o los dos negativos). De allí que la factorización sea: $(x + 6)^2$ o $(-x - 6)^2$

Por último, si el polinomio a factorizar hubiese sido: $N(x) = x^2 - 12x + 36$, realizamos un razonamiento análogo, pero las dos posibilidades que satisfacen que el doble producto de las bases dan un resultado negativo son: $2.(+x).(-6)$

o bien: $2.(-x).(+6)$

Por lo tanto la factorización será: $(x - 6)^2$ o $(-x + 6)^2$

4° Caso: CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

Ya estudiamos el desarrollo del cubo de un binomio: $(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$

Por el carácter simétrico de la igualdad, tenemos que: $a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3 = (a + b)^3$

Recordemos que el primer miembro: $a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$ se denomina CUATRINOMIO CUBO PERFECTO. Es un cuatrinomio porque consta de 4 términos. Dos de ellos son cubos perfectos, uno de los dos términos restantes, es el triple producto entre el cuadrado de la base del primer cubo perfecto por la base del otro cubo perfecto; y el término que queda es el triple producto entre la base del primer cubo perfecto y el cuadrado de la base del segundo cubo perfecto.

Todos los cuatrinomios cubos perfectos quedan factorizados cuando se los expresa como el cubo de un binomio, el cual se forma con las bases de los cubos perfectos.

O sea, $a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$, queda factorizado al expresarlo del siguiente modo: $(a + b)^3$.

Cabe la misma pregunta que nos hicimos cuando vimos el trinomio cuadrado perfecto... ¿por qué está factorizado si lo expresamos como una potencia? La respuesta es similar a la dada anteriormente: la potencia es una forma abreviada de escribir una multiplicación en la que todos sus factores son iguales:

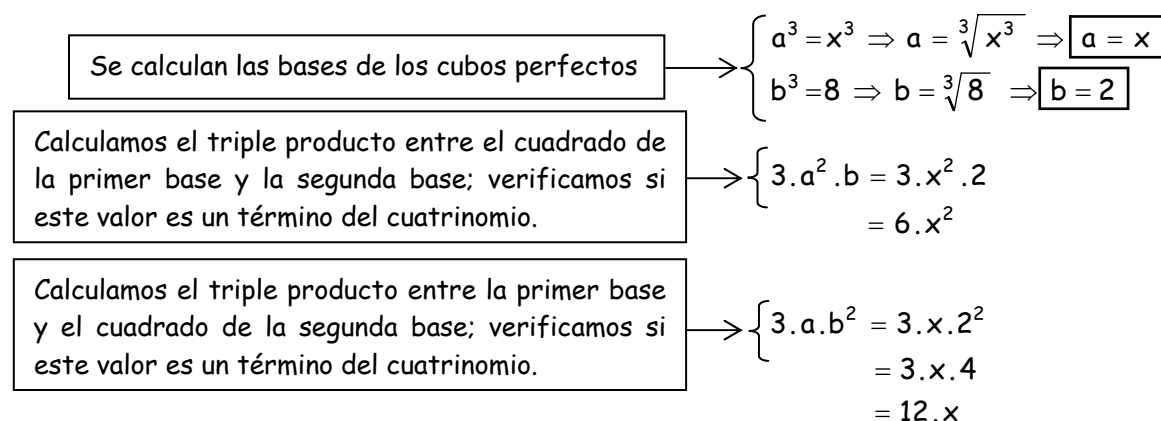
$$(a + b)^3 = (a + b).(a + b).(a + b)$$

El procedimiento para poder expresar un cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio es el siguiente:

- 1°) Se reconoce en el cuatrinomio los dos términos que sean cubos perfectos.
- 2°) Se halla la base de dichos cubos perfectos.
- 3°) Se calcula el triple producto entre el cuadrado de la primer base y se la multiplica por la segunda base y se verifica que este resultado sea uno de los términos del cuatrinomio analizado.
- 4°) Se calcula el triple producto entre la primer base y el cuadrado de la segunda base, y se verifica que este resultado sea uno de los términos del cuatrinomio analizado.
- 5°) Se forma el binomio con las bases encontradas y se lo eleva al cubo.

Nota: En este caso, cuando se identifican los cubos perfectos, se consideran los signos que preceden a cada uno de estos términos para realizar el cálculo de la base. Recordemos que es posible calcular una raíz de índice impar y radicando negativo. Además, dicho resultado es único.

Ej. 1: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$



Como los dos términos obtenidos por triple producto, coinciden con los dos términos restantes del cuatrinomio, estamos en condiciones de afirmar que el polinomio analizado es un CUATRINOMIO CUBO PERFECTO, por lo que puede ser factorizado como el cubo de un binomio. Dicho binomio será formado con las bases obtenidas de cada uno de los cubos perfectos, y los signos de los términos de este binomio, serán los obtenidos al calcular las bases de los cubos.

La factorización del polinomio dado será: $(x + 2)^3$

Ej.2: $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

reconocemos uno de los cubos perfectos y hallamos la base	$a^3 = x^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow a = x$
reconocemos el otro cubo perfecto y hallamos la base	$b^3 = -27 \Rightarrow b = \sqrt[3]{-27} \Rightarrow b = -3$
hallamos el triple producto del cuadrado de la primer base por la segunda base	$3.a^2.b = 3.x^2.(-3) = -9x^2$
hallamos el triple producto de la primer base por el cuadrado de la segunda base	$3.a.b^2 = 3.x.(-3)^2 = 3.x.9 = 27x$

Luego: $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

$$Q(x) = (x - 3)^3$$

Ej.3: $R(x) = -x^3 - 12x^2 - 48x - 64$

$$\left. \begin{array}{l} a^3 = -x^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{-x^3} \Rightarrow a = -x \\ b^3 = -64 \Rightarrow b = \sqrt[3]{-64} \Rightarrow b = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3.a^2.b = 3.(-x)^2.(-4) = 3.x^2.(-4) = -12x^2 \\ 3.a.b^2 = 3.(-x).(-4)^2 = 3.(-x).(16) = -48x \end{array}$$

El polinomio es cuatrinomio cubo perfecto

El polinomio analizado es un cuatrinomio cubo perfecto y su factorización es: $R(x) = (-x - 4)^3$

Ej.4: $T(x) = x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}$

$$\left. \begin{array}{l} a^3 = x^6 \Rightarrow a = \sqrt[3]{x^6} \Rightarrow a = x^2 \\ b^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow b = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3.a^2.b = 3.(x^2)^2.(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}.x^4 \\ 3.a.b^2 = 3.x^2.(-\frac{1}{2})^2 = 3.x^2.\frac{1}{4} = \frac{3}{4}x^2 \end{array}$$

El polinomio es cuatrinomio cubo perfecto

Luego, el polinomio factorizado es: $T(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^3$

5° Caso: DIFERENCIA DE CUADRADOS

Ya hemos visto que el producto de la suma de dos números por la diferencia de esos mismos números, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos números.

Por ejemplo, supongamos que los números considerados son 5 y 3; entonces:

$$\begin{array}{rcl} (5 + 3).(5 - 3) & = & 5^2 - 3^2 \\ 8 \cdot 2 & = & 25 - 9 \\ 16 & = & 16 \quad \rightarrow \text{se verifica la igualdad} \end{array}$$

Aplicando esta propiedad al producto de la suma de 2 monomios por la diferencia de dichos monomios, se tiene que: $(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$

Por el carácter simétrico de la igualdad, resulta que: $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$

El primer miembro es una DIFERENCIA DE CUADRADOS; y el segundo miembro es el producto entre la suma de las bases de esos cuadrados, por la diferencia entre dichas bases (tomadas en el factor de la diferencia en el mismo orden que tienen en la diferencia de cuadrados).

En síntesis: La factorización de una Diferencia de Cuadrados, se realiza teniendo en cuenta que uno de los factores buscados es la suma de las bases de los cuadrados que forman el binomio dado, y el otro factor, es la diferencia de dichas bases.

El procedimiento para poder expresar una diferencia de cuadrados como el producto entre la suma de las bases de los cuadrados por la diferencia de las mismas, es el siguiente:

1°) Se hallan las bases de los cuadrados que conforman la diferencia.

2°) Se expresa el producto entre la suma de las bases halladas y la diferencia de dichas bases.

Ej.1: $P(x) = x^2 - 64$

Se calculan las bases de los cuadrados

$$\begin{cases} a^2 = x^2 \Rightarrow a = \sqrt{x^2} \Rightarrow a = x \\ b^2 = 64 \Rightarrow b = \sqrt{64} \Rightarrow b = 8 \end{cases}$$

Se forma el producto entre la suma de las bases encontradas por la diferencia de las mismas

$$(x + 8) \cdot (x - 8)$$

Luego, el polinomio queda en su forma factorizada como: $P(x) = (x + 8) \cdot (x - 8)$

Ej.2: $P(x) = 9x^2 - 4y^2$

Se encuentran las bases de los cuadrados:	Siendo las bases obtenidas: $a = 3x$ $b = 2y$
$a^2 = 9x^2 \Rightarrow a = \sqrt{9x^2} \Rightarrow a = 3x$	Expresamos el producto de la suma de las bases por su diferencia: $(3x + 2y) \cdot (3x - 2y)$
$b^2 = 4y^2 \Rightarrow b = \sqrt{4y^2} \Rightarrow b = 2y$	

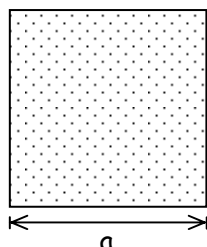
Ej.3: $P(x) = 16x^6 - \frac{4}{25}$

Se encuentran las bases de los cuadrados:	Siendo las bases obtenidas: $a = 4x^3$ $b = \frac{2}{5}$
$a^2 = 16x^6 \Rightarrow a = \sqrt{16x^6} \Rightarrow a = 4x^3$	Expresamos el producto de la suma de las bases por su diferencia: $\left(4x^3 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(4x^3 - \frac{2}{5}\right)$
$b^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{4}{25}} \Rightarrow b = \frac{2}{5}$	

Interpretación Geométrica de la diferencia de cuadrados.

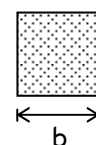
Consideremos 2 cuadrados, uno de lado "a" y otro de lado "b" (siendo $a > b$):

* Cuadrado cuyo lado tiene una longitud "a"



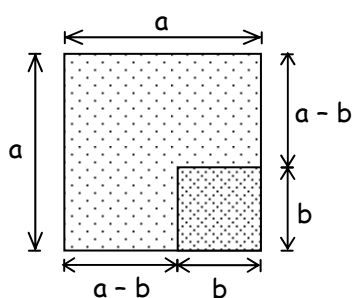
Área: $A = a^2$

* Cuadrado cuyo lado tiene una longitud "b"

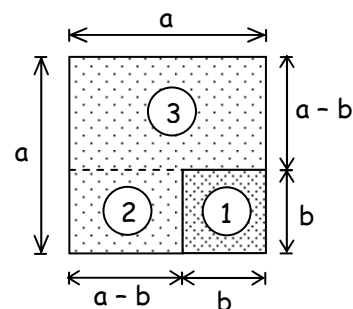


Área: $A = b^2$

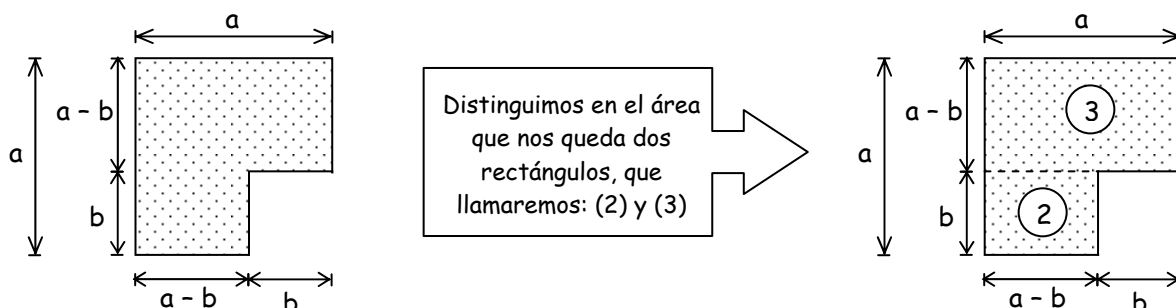
Al cuadrado de mayor área, le restamos el cuadrado de menor área. Para realizar la interpretación geométrica, identificamos dos regiones a las que llamaremos (1) y (2). La región (1) corresponde al área del cuadrado menor que se le restará al cuadrado mayor. La región (2), es la de un rectángulo que tiene por base "a - b", y por altura "b", como se observa en la gráfica:



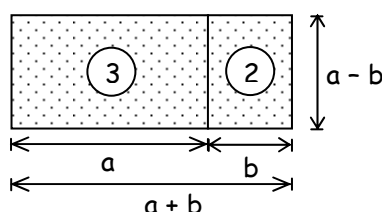
Consideremos la región 2, que es un rectángulo de área igual a:
 $A = (a - b) \cdot b$



Si al cuadrado mayor le quitamos el área correspondiente al cuadrado menor: $(a^2 - b^2)$, tendremos:



Si, a continuación, al rectángulo de la región (2), lo rotamos 90° y lo ubicamos a la derecha del rectángulo de la región (3), observamos lo siguiente:



Con el área que nos queda (después de restarle al área del cuadrado grande el área del cuadrado pequeño), hemos formado un rectángulo cuya base es " $a + b$ " y cuya altura es " $a - b$ "; y el área de este nuevo rectángulo será: $A = (a + b) \cdot (a - b)$

Con ésto, probamos que la diferencia entre el área de dos cuadrados, es igual al producto entre la suma de sus lados, por la diferencia de dichos lados:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Sin una interpretación geométrica rigurosa, podemos decir que: *"la diferencia entre el cuadrado de dos términos, es igual al producto entre la suma de las bases de dichos cuadrados, por la diferencia de esas mismas bases"*.

6° Caso: SUMA o DIFERENCIA DE DOS POTENCIAS DE IGUAL GRADO

Cuando tenemos un binomio, en los que ambos términos son potencias de igual exponente, dicho binomio se nos presenta en alguna de éstas 4 posibilidades:

- * $P(x) = a^i + b^i \rightarrow$ SUMA de potencias de igual grado IMPAR
- * $P(x) = a^i - b^i \rightarrow$ RESTA de potencias de igual grado IMPAR
- * $P(x) = a^p + b^p \rightarrow$ SUMA de potencias de igual grado PAR
- * $P(x) = a^p - b^p \rightarrow$ RESTA de potencias de igual grado PAR

Analizaremos cada una de estas posibilidades en detalle, pero antes estudiaremos qué son las raíces de un polinomio.

RAÍCES DE UN POLINOMIO

Dado un polinomio, se llama raíz del polinomio a todos los valores que pueda adoptar la variable (o indeterminada) que anulan el polinomio. Un polinomio puede tener ninguna, una o varias raíces. Pero el número de raíces de un polinomio será siempre menor o igual que el grado del polinomio.

Ej. 1: $P(x) = x^2 + 2x$ en forma factorizada queda: $P(x) = x \cdot (x + 2)$;

$\rightarrow$ sus raíces son $x_1 = -2$ y $x_2 = 0$, ya que $P(-2) = 0$ y $P(0) = 0$

Ej. 2: $Q(x) = x^3 - x^2 - 2x$, en forma factorizada queda: $Q(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$

$\rightarrow$ sus raíces son $x_1 = -1$; $x_2 = 0$ y $x_3 = 2$; y cualquiera de estos valores que adopte la variable, el polinomio se anula.

Teniendo en cuenta las formas factorizadas de los polinomios dados y las raíces de ellos, es posible expresar la forma factorizada de un polinomio si conocemos las raíces, es decir, los valores que lo anulan. Por ejemplo, si sabemos que un polinomio $R(x)$, se anula para los siguientes valores: -4 , $+1$ y $+3$; entonces estos valores son sus raíces: $x_1 = -4$; $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$, y el polinomio en su forma factorizada puede expresarse teniendo en cuenta sus raíces del siguiente modo:

$R(x) = (x + 4) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$ o bien: $R(x) = k \cdot (x + 4) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$, siendo k cualquier número real distinto de cero.

1º Posibilidad: SUMA de potencias de igual grado IMPAR

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$P(x) = x^3 + 27$$

Sabiendo que 27 es una potencia de 3: $P(x) = x^3 + 3^3$

Procedimiento:

1º) Hallamos la raíz del polinomio.

El valor que anula el polinomio es $x = -3$, ya que $P(-3) = (-3)^3 + 3^3$

$$P(-3) = -27 + 27$$

$$P(-3) = 0$$

2º) Sabiendo que $x = -3$ es una raíz del polinomio, podemos establecer cuál será uno de los factores del polinomio factorizado. Para ello, conformamos dicho factor por medio de un binomio de la forma: $x \pm a$

Considerando la raíz encontrada, nos preguntamos lo siguiente: ¿qué valor se le debe sumar o restar a la raíz para que este binomio sea igual a cero?. El factor que buscamos será entonces:

$$x + 3 \quad \rightarrow \quad \text{ya que } (-3) + 3 = 0 \quad (\text{la raíz es } -3 \text{ y hay que sumarle } 3 \text{ para que se anule})$$

3º) Sabiendo que uno de los factores es $x + 3$, el otro factor buscado será el cociente de la división entre el polinomio original y el factor encontrado $x + 3$. La división puede realizarse mediante el procedimiento de la división entre polinomios, o bien, aplicando la Regla de Ruffini ya que el divisor tiene la forma $x \pm a$.

La división a realizar es: $(x^3 + 27) : (x + 3)$

	1	0	0	27
-3		-3	9	-27
	1	-3	9	0

El polinomio cociente es: $C(x) = x^2 - 3x + 9$

Recordemos que en toda división exacta (cuando el resto es cero), siempre el dividendo es igual al producto entre el divisor y el cociente:

Ej.1: $D \mid d$
 $0 \quad c$

Ej.2: $18 \mid 6$
 $0 \quad 3$

Ej.3:

	$x^3 + 27$	$x + 3$
	$+ \cancel{x^3} + 0x^2 + 0x + 27$	$\cancel{x} + 3$
	$\underline{-\cancel{x^3} - 3x^2}$	$x^2 - 3x + 9$
	$\quad \quad \quad \cancel{-3x^2} + 0x$	
	$\quad \quad \quad \underline{+ \cancel{3x^2} + 9x}$	
	$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \cancel{9x} + 27$	
	$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{+ \cancel{-9x} - 27}$	
	$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0x + 0$	

Las divisiones de los tres ejemplos son exactas; en ellas el resto es cero. Esto permite afirmar que en cada una de ellas, el dividendo es igual al producto entre el divisor y el cociente:

Ej.1: $D = d \cdot c$

Ej.2: $18 = 6 \cdot 3$

Ej.3: $x^3 + 27 = (x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 9)$

Como observamos en el ejemplo 3, cuando encontramos una raíz "r", podemos expresar el primer factor de la factorización buscada mediante: $x \pm r$. El otro factor será el polinomio cociente entre el polinomio original y $x \pm r$.

4º) El polinomio factorizado queda expresado del siguiente modo:

$$x^3 + 27 = (x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 9)$$

2º Posibilidad: RESTA de potencias de igual grado IMPAR

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$P(x) = x^5 - 32$$

Sabiendo que 32 es una potencia de 2: $P(x) = x^5 - 2^5$

Procedimiento:

1º) Hallamos la raíz del polinomio.

El valor que anula el polinomio es $x = 2$, ya que $P(2) = 2^5 - 32$

$$P(2) = 32 - 32$$

$$P(2) = 0$$

2º) Uno de los polinomios factores será: $x - 2$

3º) Realizamos la división entre el polinomio original y $(x - 2)$; el polinomio cociente será el otro factor buscado de la factorización.

Aplicando Regla de Ruffini al realizar la división $(x^5 - 32) : (x - 2)$, obtenemos lo siguiente:

1	0	0	0	0	-32
2	2	4	8	16	32
1	2	4	8	16	0

El polinomio cociente es:

$$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$$

4º) El polinomio factorizado queda expresado del siguiente modo:

$$x^5 - 32 = (x - 2) \cdot (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$$

3º Posibilidad: SUMA de potencias de igual grado PAR

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$P(x) = x^4 + 16$$

Sabiendo que 16 es una potencia de 2: $P(x) = x^4 + 2^4$

Procedimiento:

1º) Hallamos la raíz del polinomio.

Analizando este polinomio, observamos que no posee ninguna raíz, puesto que no existe ningún valor de la variable independiente que anule al polinomio. En efecto, para que el polinomio se anulara, se necesita que el valor adoptado por la variable independiente fuese un número que elevado a la 4ª potencia de por resultado -16 para que sumado a 16, anule el polinomio. ESTO ES IMPOSIBLE, ya que cualquiera sea el número asignado, al estar elevado a un exponente par, daría un resultado positivo que, sumado a 16, jamás anularía el polinomio.

$$P(2) = 2^4 + 16$$

$$P(-2) = (-2)^4 + 16$$

$$P(2) = 16 + 16 = 32$$

$$P(-2) = 16 + 16 = 32$$

$$P(2) \neq 0$$

$$P(-2) \neq 0$$

CONCLUSIÓN: Cuando se tiene un polinomio formado por una suma de potencias de igual grado par, NO PUEDE SER FACTORIZADO.

4° Posibilidad: RESTA de potencias de igual grado PAR

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$P(x) = x^4 - 16$$

Sabiendo que 16 es una potencia de 2: $P(x) = x^4 - 2^4$

Procedimiento:

1°) Hallamos la raíz del polinomio. En este caso particular, tenemos dos raíces, es decir, existen dos valores que anulan el polinomio, por lo tanto, existe dos maneras de factorizarlo.

A) Uno de los valores que anula el polinomio es $x = 2$, ya que: $P(2) = 2^4 - 16$

$$P(2) = 16 - 16$$

$$P(2) = 0$$

B) El otro valor que anula el polinomio es $x = -2$, ya que $P(-2) = (-2)^4 - 16$

$$P(-2) = 16 - 16$$

$$P(-2) = 0$$

2°-A) Para el caso de la raíz $x = 2$, uno de los polinomios factores será: $x - 2$

3°-A) Realizamos la división entre el polinomio original y $(x - 2)$.

Aplicamos Regla de Ruffini en la división $(x^4 - 16) : (x - 2)$

	1	0	0	0	-16
2		2	4	8	16
	1	2	4	8	0

El polinomio cociente es:

$$C(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$$

4°-A) El polinomio factorizado queda expresado del siguiente modo:

$$x^4 - 16 = (x - 2) \cdot (x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$$

Realizamos los mismos procedimientos para el caso de la raíz $x = -2$

2°-B) Para el caso de la raíz $x = -2$, uno de los polinomios factores será: $x + 2$

3°-B) Realizamos la división entre el polinomio original y $(x + 2)$.

Aplicamos Regla de Ruffini en la división $(x^4 - 16) : (x + 2)$

	1	0	0	0	-16
-2		-2	4	-8	16
	1	-2	4	-8	0

El polinomio cociente es:

$$C(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

4°-B) El polinomio factorizado queda expresado del siguiente modo:

$$x^4 - 16 = (x + 2) \cdot (x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$$

Regla nemotécnica de los signos:

Operación	Grado	Signos 1° Factor	Signos 2° Factor
SUMA	IMPAR	(..... +)	(..... - + - + - etc)
RESTA	IMPAR	(..... -)	(..... + + + + + etc)
SUMA	PAR	NO SE PUEDE FACTORIZAR	
RESTA	PAR	A) (..... +)	(..... - + - + - etc)
RESTA	PAR	B) (..... -)	(..... + + + + + etc)

Regla para formar el factor obtenido mediante el cociente (2º factor), sin realizar la división:

Tomemos el siguiente ejemplo: $P(x) = x^5 + 32$

$$P(x) = x^5 + 2^5$$

- Se coloca de izquierda a derecha todas las potencias decrecientes de una de los términos del polinomio (o sea, una de las dos potencias de igual grado), comenzando con un grado menos de la potencia del polinomio original: $x^4 \quad x^3 \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0$

- Se coloca de derecha a izquierda todas las potencias decrecientes del otro término del polinomio (es decir, de la otra potencia del polinomio original), comenzando con un grado menos:

$$2^0 x^4 \quad 2^1 x^3 \quad 2^2 x^2 \quad 2^3 x^1 \quad 2^4 x^0$$

- Se resuelven las potencias cuyas bases sean numéricas y se colocan los signos de acuerdo a la regla nemotécnica de signos dada en la tabla anterior: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

EJERCITACIÓN

1) Extraer factor común de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 8x^5 - 12x^3 + 4x^2$

c) $S(x) = \frac{3}{4} \cdot a^3 \cdot x^4 - \frac{9}{20} \cdot a^4 \cdot x^3 - \frac{27}{8} \cdot a^5 \cdot x^2$

b) $Q(x) = 3 \cdot x^7 \cdot a^3 \cdot b^4 - 9 \cdot x^5 \cdot a^4 \cdot b^4 + 12 \cdot x^3 \cdot a^5 \cdot b^6$

d) $R(x) = \frac{5}{8} x^4 - \frac{15}{16} x^3 + \frac{25}{4} x^2$

2) Extraer factor común en grupos de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10$

e) $T(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$

b) $Q(x) = 3x^8 + x^7 - 2x^5 + 3x^3 + x^2 - 2$

f) $M(x) = 4x^3 + 8x^2 + 8x + 16$

c) $R(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

g) $N(x) = x^6 + x^5 - 2x^4 + x^2 + x - 2$

d) $S(x) = 3x^5 + x^4 - 3x - 1$

h) $H(x) = -2x^8 + 12x^7 - 18x^6 + 2x^2 - 12x + 18$

3) Factorizar los polinomios que sean trinomios cuadrados perfectos.

a) $P(x) = x^2 + 8x + 16$

d) $N(x) = 4x^2 + 4x + 1$

g) $L(x) = 25x^2 + 10x + 4$

b) $Q(x) = 16x^2 - 128x + 256$

e) $S(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$

h) $H(x) = 9 - 3x + \frac{1}{4} x^2$

c) $M(x) = x^6 + x^4 + \frac{1}{4} x^2$

f) $R(x) = 9x^4 + 36 + 36x^2$

i) $T(x) = x^2 + \frac{1}{9} b^6 - \frac{2}{3} x b^3$

4) Factorizar los polinomios que sean cuatrinomios cubos perfectos

a) $P(x) = 1 + 9x^2 + 27x^4 + 27x^6$

e) $M(x) = x^3 - 6x^2 - 12x + 8$

b) $Q(x) = -27 - 27x - 9x^2 - x^3$

f) $N(x) = -125 + 75x^2 - 15x^4 + x^6$

c) $S(x) = x^9 - 2x^6 + \frac{4}{3} x^3 - \frac{8}{27}$

g) $F(x) = 36 \cdot x \cdot a^2 + 54 \cdot x^2 \cdot a + 8 \cdot a^3 + 27x^3$

d) $R(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{20} x + \frac{3}{50} x^2 + \frac{1}{125} x^3$

h) $T(x) = \frac{125}{8} x^6 - \frac{75}{4} x^4 - \frac{45}{2} x^2 - 27x^{12}$

5) Factorizar los polinomios aplicando, el caso de factorización: Diferencia de Cuadrados.

a) $P(x) = x^2 - 64$

d) $S(x) = x^4 - 81$

g) $M(x) = \frac{4}{9} x^4 - 1$

b) $Q(x) = 16x^2 - 9$

e) $L(x) = -\frac{1}{4} x^2 \cdot b^4 - b^{10}$

h) $N(x) = \frac{4}{25} x^6 - a^6$

c) $R(x) = 4x^{10} - \frac{1}{25} x^6$

f) $H(x) = 1 - 81x^2$

i) $T(x) = -\frac{25}{16} x^8 \cdot b^4 + 1$

6) Factorizar los polinomios aplicando, cuando sea posible, el caso de factorización: Suma o Diferencia de potencias de igual grado.

a) $P(x) = 8 - x^3$

d) $S(x) = x^6 - 64$

g) $M(x) = x^7 + 128$

b) $Q(x) = x^4 - 81$

e) $L(x) = x^5 - \frac{1}{32}$

h) $N(x) = x^4 + 81$

c) $R(x) = x^7 + 1$

f) $H(x) = x^4 - \frac{1}{81}$

i) $T(x) = x^5 - 1$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS (Casos Combinados)

Cuando factorizamos polinomios, no siempre sucede que se pueda aplicar sólo un caso de factorización. En estos polinomios, debemos aplicar sucesivamente dos o más casos, hasta que ningún factor sea un polinomio que pueda ser factorizado. En ocasiones sucede que puede aplicarse el mismo caso más de una vez.

Ej.: 1) $32x^5 - 2x = 2x \cdot (16x^4 - 1)$

→ 1º Caso: factor común

$$= 2x \cdot (4^2 x^4 - 1^2) = 2x \cdot [(4x^2)^2 - 1^2] =$$

← lo anterior puede ser expresado

$$= 2x \cdot (4x^2 + 1) \cdot (4x^2 - 1)$$

→ 5º Caso: diferencia de cuadrados

$$= 2x \cdot (4x^2 + 1) \cdot [(2x)^2 - 1^2] =$$

← lo anterior puede ser expresado

$$= 2x \cdot (4x^2 + 1) \cdot (2x + 1) \cdot (2x - 1)$$

→ 5º Caso: diferencia de cuadrados

Las raíces del polinomio son aquellos valores que anulan el polinomio ya sea, en su expresión original o bien, en su expresión factorizada. Para el ejemplo analizado dichas raíces son:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}$$

Para $x_1 = 0$

$$P(0) = 32 \cdot 0^5 - 2 \cdot 0 = 0$$

o bien

$$P(0) = 2 \cdot 0 \cdot (4 \cdot 0^2 + 1) \cdot (2 \cdot 0 + 1) \cdot (2 \cdot 0 - 1) = 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 0$$

Para $x_2 = \frac{1}{2}$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 2 \cdot \frac{1}{2}$$

o bien

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 32 \cdot \frac{1}{32} - 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{4} + 1\right) \cdot (1 + 1) \cdot (1 - 1)$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

Para $x_3 = -\frac{1}{2}$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}\right) = 32 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 1 = 0$$

$$\text{o bien: } P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left[4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] \cdot \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right] \cdot \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right]$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{4} + 1\right) \cdot (-1 + 1) \cdot (-1 - 1)$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1) \cdot 2 \cdot 0 \cdot (-2) = 0$$

Hemos verificado que los tres valores son raíces, ya que anulan tanto al polinomio original como a la expresión factorizada de dicho polinomio. Además, el polinomio original es de grado 5, confirmando que siempre existe un número de raíces igual o menor al grado del polinomio.

Un mismo polinomio puede ser factorizado de diferentes maneras; sin embargo, siempre al final se llega a la misma expresión factorizada. Tomemos el polinomio del ejemplo 1 y factoricemos:

$$\begin{aligned}
 2) \quad 32x^5 - 2x &= 2x \cdot (16x^4 - 1) && \rightarrow 1^\circ \text{ Caso: factor común} \\
 &= 2x \cdot [(2x)^4 - 1^4] && \leftarrow \text{lo anterior puede ser expresado} \\
 &= 2x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (16x^3 + 8x^2 + 4x + 2) && \rightarrow 6^\circ \text{ Caso: suma o resta de potencias de igual grado} \\
 &= 2x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot (8x^3 + 4x^2 + 2x + 1) && \rightarrow 1^\circ \text{ Caso: factor común} \\
 &= 2x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot [(8x^3 + 4x^2) + (2x + 1)] && \rightarrow 2^\circ \text{ Caso: factor común por grupos} \\
 &= 2x \cdot (2x - 1) \cdot [4x^2 \cdot (2x + 1) + (2x + 1)] && \rightarrow 2^\circ \text{ Caso: factor común por grupos - distributiva} \\
 &= 2x \cdot (2x - 1) \cdot (2x + 1) \cdot (4x^2 + 1)
 \end{aligned}$$

Verificamos que la expresión factorizada es la misma que la del ejemplo 1 (sólo que los factores aparecen conmutados. Esto nos permite verificar que no existe una única forma de factorizar.

$$\begin{aligned}
 3) \quad P(x) &= \underbrace{x^4 - 2x^3 + x^2}_{1^\circ \text{ Caso: factor común } x^2} \Rightarrow P(x) = x^2 \cdot \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{3^\circ \text{ Caso: trinomio cuadrado perfecto}} \\
 &\Rightarrow P(x) = x^2 \cdot (x - 1)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad Q(x) &= \underbrace{8x^3 - 1}_{1^\circ \text{ Caso: factor común } 8} \Rightarrow Q(x) = 8 \cdot \underbrace{\left(x^3 - \frac{1}{8}\right)}_{6^\circ \text{ Caso: Resta de potencias de igual grado}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q(x) = 8 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad R(x) &= \underbrace{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}_{2^\circ \text{ Caso: factor común en grupos}} \Rightarrow R(x) = (x^3 - 3x^2) + (-4x + 12) \\
 &\Rightarrow R(x) = x^2 \cdot (x - 3) + (-4) \cdot (x - 3) \\
 &\Rightarrow R(x) = (x - 3) \cdot \underbrace{(x^2 - 4)}_{5^\circ \text{ Caso: diferencia de cuadrados}} \\
 &\Rightarrow R(x) = (x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad S(x) &= \underbrace{-4x^2 + 8x - 4}_{1^\circ \text{ Caso: factor común } -4} \Rightarrow S(x) = -4 \cdot \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{3^\circ \text{ Caso: trinomio cuadrado perfecto}} \\
 &\Rightarrow S(x) = -4 \cdot (x - 1)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad T(x) &= \underbrace{x^3 - 3x^2 - x + 3}_{2^\circ \text{ Caso: factor común en grupos}} \Rightarrow T(x) = (x^3 - 3x^2) + (-x + 3) \\
 &\Rightarrow T(x) = x^2 \cdot (x - 3) + (-1) \cdot (x - 3) \\
 &\Rightarrow T(x) = (x - 3) \cdot \underbrace{(x^2 - 1)}_{5^\circ \text{ Caso: diferencia de cuadrados}} \\
 &\Rightarrow T(x) = (x - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad M(x) &= \underbrace{-2x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}}_{1^\circ \text{ Caso: factor común } -2} \Rightarrow M(x) = -2 \cdot \underbrace{\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}\right)}_{4^\circ \text{ Caso: cuatrinomio cubo perfecto}} \\
 &\Rightarrow M(x) = -2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^3
 \end{aligned}$$

TEOREMA DE GAUSS

El teorema de Gauss permite encontrar todas las raíces racionales en un polinomio $P(x)$ de grado n , en el cual todos sus coeficientes son números enteros y cuyo término independiente es distinto de cero.

$$\text{Sea: } P(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + c \cdot x^{n-2} + \dots + d$$

Consideremos que $a, b, c, \dots, d$ son números enteros y, además, que $d \neq 0$

El teorema de Gauss expresa que si el polinomio admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (escrito como fracción irreducible), entonces " p " es divisor del término independiente y " q " es divisor del coeficiente principal.

Para hallar las raíces racionales se procede del siguiente modo:

- Se buscan los divisores del término independiente y del coeficiente principal:
 $\text{div } p = \{ \dots, \dots, \dots \}$ y $\text{div } q = \{ \dots, \dots, \dots \}$
- Se buscan las posibles raíces que puedan formarse, haciendo todos los cocientes posibles entre los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente principal. Es decir, se trata de escribir todas las fracciones distintas posibles (expresándolas en su forma irreducible), en donde el numerador será un divisor del término independiente y el denominador será un divisor del coeficiente principal.
- Se reemplaza las posibles raíces en el polinomio original. De todas ellas, serán raíces del polinomio aquellas que anulen al mismo.

Supongamos que de un número determinado de posibles raíces, sólo tres anulan al polinomio: $r_1 ; r_2 ; r_3$.

Considerando el coeficiente principal " a " del polinomio y las raíces encontradas, el polinomio se puede expresar en forma factorizada de la siguiente manera:

$$P(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3)$$

Nota: Si el polinomio " n " raíces, la forma factorizada presentará " $n + 1$ " factores (uno de dichos factores será el coeficiente principal, y los restantes serán formados con las raíces encontradas).

Analicemos el procedimiento a través de un ejemplo:

Ej. 1: Sea el polinomio: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$

- Divisores del término independiente: $\text{div}(-3) = \{+1; -1; +3; -3\}$

- Divisores del coeficiente principal: $\text{div}(+2) = \{+1; -1; +2; -2\}$

- Posibles raíces: $R = \{+1; -1; +\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; +3; -3\}$

- Reemplazamos cada una de las posibles raíces en el polinomio original para determinar cuáles anulan al polinomio.

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 3 \Rightarrow P(1) = 2 - 3 - 8 - 3 = -12$$

$$P(1) \neq 0 \Rightarrow 1 \quad \underline{\text{NO es raíz del polinomio}}$$

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 3 \Rightarrow P(-1) = -2 - 3 + 8 - 3 = 0$$

$$P(-1) = 0 \Rightarrow \boxed{-1} \quad \underline{\text{SI es raíz del polinomio}}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 3 \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 4 - 3 = -\frac{15}{2}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \quad \underline{\text{NO es raíz del polinomio}}$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 4 - 3 = 0$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2}} \quad \underline{\text{SI es raíz del polinomio}}$$

$$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 - 3 \Rightarrow P(3) = 54 - 27 - 24 - 3 = 0$$

$$P(3) = 0 \Rightarrow \boxed{3} \quad \text{SI es raíz del polinomio}$$

$$P(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 8 \cdot (-3) - 3 \Rightarrow P(-3) = -54 - 27 + 24 - 3 = -60$$

$$P(-3) \neq 0 \Rightarrow -3 \quad \text{NO es raíz del}$$

polinomio

Finalmente, el polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ factorizado quedaría:

$$P(x) = 2 \cdot (x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 3)$$

Ej. 2: Sea el polinomio: $Q(x) = x^2 - 4x + 3$

- Divisores del término independiente: $\text{div}(+3) = \{+1; -1; +3; -3\}$

- Divisores del coeficiente principal: $\text{div}(+1) = \{+1; -1\}$

- Posibles raíces: $R = \{+1; -1; +3; -3\}$

- Reemplazamos cada una de las posibles raíces en el polinomio original para determinar cuáles anulan al polinomio.

$$Q(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 \Rightarrow Q(1) = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$Q(1) = 0 \Rightarrow 1 \quad \text{SI es raíz del polinomio}$$

$$Q(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 \Rightarrow Q(-1) = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$Q(-1) \neq 0 \Rightarrow -1 \quad \text{NO es raíz del polinomio}$$

$$Q(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 \Rightarrow Q(3) = 9 - 12 + 3 = 0$$

$$Q(3) = 0 \Rightarrow 3 \quad \text{SI es raíz del polinomio}$$

$$Q(-3) = (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 3 \Rightarrow Q(-3) = 9 + 12 + 3 = 24$$

$$Q(-3) \neq 0 \Rightarrow -3 \quad \text{NO es raíz del polinomio}$$

Finalmente, el polinomio $Q(x) = x^2 - 4x + 3$ factorizado quedaría:

$$Q(x) = (x - 1) \cdot (x - 3)$$

RAÍCES MÚLTIPLES

Un polinomio $P(x)$ tiene una raíz múltiple si, al descomponerlo en función de sus raíces, hay factores iguales. El orden de multiplicidad de la misma está dado por el exponente del factor.

Ejemplos:

Polinomio factorizado	Raíces	Multiplicidad
$P_1(x) = 2 \cdot (x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 3)$	$x_1 = -1; x_2 = -\frac{1}{2}; x_3 = 3$	Tres raíces simples
$P_2(x) = (x + 1)^2 = (x + 1) \cdot (x + 1)$	$x_1 = x_2 = -1$	Una raíz doble
$P_3(x) = (x - 2)^3 = (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2)$	$x_1 = x_2 = x_3 = 2$	Una raíz triple
$P_4(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 1)^3$	$x_1 = x_2 = -2$ y $x_3 = x_4 = x_5 = 1$	-2 raíz doble y 1 raíz triple

EJERCITACIÓN

1) Marcar con una cruz los polinomios correctamente factorizados.

a) $-x^4 + 5x^3 = -x^3 \cdot (x - 5)$

d) $-x^5 + x^4 = -x^4 \cdot (x + 1)$

b) $-\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = -\frac{3}{2}x \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$

e) $-9x^2 - 4 = -9 \cdot \left(x^2 + \frac{4}{9}\right)$

c) $2x^6 - x = x \cdot (x^5 - 1)$

f) $5x^6 + 5x^2 = 5x^2 \cdot (x^3 + 1)$

2) Hallar las raíces de los siguientes polinomios aplicando el teorema de Gauss y expresarlos en forma factorizada.

a) $P(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$

e) $K(x) = -6x^3 + 13x^2 - x - 2$

i) $L(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4$

b) $Q(x) = -4x^3 + 7x - 3$

f) $N(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9$

c) $M(x) = x^3 - 3x + 2$

g) $S(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

d) $T(x) = 2x^3 - 3x + 1$

h) $R(x) = -4x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 3x + 2$

3) Expresar los siguientes polinomios en función de sus raíces.

a) $P(x) = x^4 - x^2$

i) $P(x) = -4x^3 - 4x^2 + x + 1$

b) $P(x) = x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x$

j) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x$

c) $P(x) = x^6 - \frac{1}{16}x^2$

k) $P(x) = 6x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 12x$

d) $P(x) = \frac{2x^3 - 16}{9}$

l) $P(x) = 3x^4 - 4x^2 + 1$

e) $P(x) = x^3 - x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}$

m) $P(x) = 20x^3 - 60x^2 + 45x$

f) $P(x) = -x^4 + 3x^3 - \frac{9}{4}x^2$

n) $P(x) = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32$

g) $P(x) = -4x^3 - 2x^2 + 4x + 2$

o) $P(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x$

h) $P(x) = x^4 - x^3 + 64x - 64$

p) $P(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{3}{32}x^2$

4) Sabiendo que cualquier letra distinta de "x" representa a una cantidad fija, exprese como producto (factorice) las siguientes expresiones.

a) $P(x) = 5x^2 - 10xy + 5y^2$

g) $P(x) = x^3 + 8y^3 + 3x + 6y$

b) $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

h) $P(x) = x^4 - 1 - y^2 + x^2y^2$

c) $P(x) = 3x^2 + 3x + \frac{3}{4}$

i) $P(x) = 2x^7y - 12x^5y^2 + 24x^3y^3 - 16xy^4$

d) $P(x) = 3x^9y^7 - 12x^7y^9$

j) $P(x) = x^2 - 5x + 6$

e) $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

k) $P(x) = 2x^2 + 6x - 80$

f) $P(x) = x^4 + 12x^2 + 36$

l) $P(x) = -2x^2 + 162$

5) Exprese como un polinomio el resultado de las siguientes sumas, restas, multiplicaciones y potenciaciones.

a) $P(x) = (10x^5 - 8x^2) + (3x^2 - 2x^3 + 6)$

d) $P(x) = (x + 1)^3 - (x + 2)^3$

b) $P(x) = (x + a)^2 - x^2$

e) $P(x) = (x - a)^2 - x^2$

c) $P(x) = (x^2 + x - 1) - (x^2 - x + 1)$

f) $P(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 - 3x + 4)$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, tal que $Q(x)$ sea distinto de cero, se denomina expresión algebraica fraccionaria a toda expresión de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Ej.1: $\frac{3}{x - x^2} \quad \forall x / x \neq 0 \wedge x \neq 1$

Ej.3: $\frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 4} \quad \forall x / x \neq 2$

Ej.2: $\frac{5x^2 - 3}{3x + 1} \quad \forall x / x \neq -\frac{1}{3}$

Ej.4: $\frac{1}{x^4 + 8}$

Una expresión algebraica es irreducible si no existen en ella factores comunes al numerador y al denominador.

Ej.: $\frac{x}{x - 3} \quad \forall x / x \neq 3 \rightarrow$ Expresión irreducible

Ej.: $\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{x \cdot (x + 1)}{x \cdot (x^2 - 2x - 3)} = \frac{x \cdot (x + 1)}{x \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)} \quad \forall x / x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 3$

Esta última expresión es una expresión reducible, pues los factores "x" y (x + 1) son comunes al numerador y al denominador, por lo tanto, pueden ser simplificadas.

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias

Para simplificar una expresión algebraica fraccionaria se debe factorizar el numerador y el denominador, y cancelar los factores comunes en ambos; se obtiene así una expresión irreducible equivalente a la original.

Ejemplos:

a) $\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{x \cdot (x + 1)}{x \cdot (x^2 - 2x + 1)} = \frac{x + 1}{(x - 1)^2} \quad \forall x / x \neq 0 \wedge x \neq 1$

b) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{(x - 1) \cdot (x - 2)}{(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)} = \frac{1}{x + 1} \quad \forall x / x \neq \pm 1 \wedge x \neq 2$

c) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2} = x + 2 \quad \forall x / x \neq 2$

Hay que tener en cuenta lo siguiente:

→ Al simplificar, se deben identificar los valores de x que anulan el denominador.

→ Algunas fracciones algebraicas resultan equivalentes a expresiones algebraicas enteras.

→ El objeto de simplificar es reducir la expresión y poder efectuar operaciones en forma más sencilla.

1) Simplificar las siguientes expresiones algebraicas fraccionarias.

a) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} =$

c) $\frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 25} =$

e) $\frac{x^5 - 16x}{x^2 - 2x} =$

b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} =$

d) $\frac{x^3 - x^2}{x^3 + x^2 - 2x} =$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Multipliación:

El resultado de multiplicar dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión algebraica fraccionaria cuyo numerador y denominador son el producto de los numeradores y denominadores de las expresiones dadas:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$$

Ej.: $\frac{x^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{x + 2}{3x^3 - x} = \frac{x^2}{(x + 2) \cdot (x - 2)} \cdot \frac{x + 2}{x \cdot (3x^2 - 1)} = \frac{x}{(x - 2) \cdot (3x^2 - 1)}$

División:

El resultado de dividir dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión que se obtiene multiplicando la primera por la recíproca de la segunda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)}$$

Ej.: $\frac{x}{x - 2} : \frac{x + 2}{3x - 1} = \frac{x}{x - 2} \cdot \frac{3x - 1}{x + 2} = \frac{x \cdot (3x - 1)}{(x - 2) \cdot (x + 2)}$

Nota: Tanto en la multiplicación como en la división, se debe simplificar siempre que sea posible.

Ej.: $\frac{2x - 3}{x + 5} \cdot \frac{x^2 - 25}{6x - 9} = \frac{(2x - 3) \cdot (x - 5) \cdot (x + 5)}{(x + 5) \cdot 3 \cdot (2x - 3)} = \frac{x - 5}{3}$

Ej.: $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^3} : \frac{3x - 3}{x} = \frac{(x - 1)^2}{x^3} \cdot \frac{x}{3 \cdot (x - 1)} = \frac{x - 1}{3x^2}$

2) Efectuar las siguientes multiplicaciones y divisiones

a) $\frac{2}{x^2 - 3x} \cdot \frac{x - 3}{x} =$ c) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} : \frac{2x^4 + 4x^3 + 8x^2}{2x^3 + 4x^2} =$

b) $\frac{x - \frac{1}{2}}{x^2 - 2x + 4} \cdot (x^3 + 8) \cdot \frac{-8x}{2x^2 + 3x - 2} =$ d) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} : \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2} =$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Si las expresiones tienen igual denominador, se suman o restan sus numeradores según corresponda.

Ej.1: $\frac{x}{x - 2} + \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{x + x + 2}{x - 2} = \frac{2x + 2}{x - 2} = \frac{2 \cdot (x + 1)}{(x - 2)}$

Ej.2: $\frac{1}{x - 1} - \frac{2x - 1}{x - 1} = \frac{1 - (2x - 1)}{x - 1} = \frac{1 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{-2x + 2}{x - 1} = \frac{-2 \cdot (x - 1)}{x - 1} = -2$

Para expresiones de distinto denominador, éstas se deben transformar en otras, equivalentes a las dadas, que tengan el mismo denominador. Este denominador (denominador común) es el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores de las expresiones originales y se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente. Si los denominadores son polinomios, conviene factorizarlos para encontrar fácilmente el mínimo común múltiplo. Luego, para resolver, se aplica el mismo algoritmo de la suma algebraica de fracciones. De ser posible, se debe simplificar cada expresión antes de comenzar a sumar o restar.

Ej.1: $\frac{x}{x - 2} + \frac{3x - 1}{x^2 - 2x} = \frac{x}{x - 2} + \frac{3x - 1}{x \cdot (x - 2)} = \frac{x^2 + 3x - 1}{x \cdot (x - 2)}$

Ej.2: $\frac{x}{x + 1} - \frac{2}{x - 1} = \frac{x \cdot (x - 1) - 2 \cdot (x + 1)}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{x^2 - x - 2x - 2}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{x^2 - 3x - 2}{(x + 1) \cdot (x - 1)}$

Ej.3: $\frac{1}{2x - 2} + \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2 \cdot (x - 1)} + \frac{2}{(x - 1) \cdot (x + 1)} - \frac{x}{x + 1}$

$$= \frac{1 \cdot (x+1) + 2 \cdot 2 - x \cdot 2 \cdot (x-1)}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x+1+4-2x^2+2x}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{-2x^2+3x+5}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} =$$

$$= \frac{(-2x+5) \cdot (x+1)}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{-2x+5}{2 \cdot (x-1)} = \frac{-2x+5}{2x-2}$$

EJERCITACIÓN

1) Simplificar las siguiente expresión.

a) $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-x-3} =$ b) c)

2) Realizar las siguientes operaciones con expresiones algebraicas de igual denominador

a) $\frac{-2x^2}{x^2-9} + \frac{x^2-3x}{x^2-9} =$

b) $\frac{2x+1}{x+2} - \frac{x-1}{x+2} =$

3) Hallar el denominador común de las siguientes expresiones

$\frac{2}{3x^2-6x+3}$ y $\frac{x}{x^2+3x-4}$

4) Con las expresiones racionales: $P(x) = \frac{3x}{x^2-4}$; $Q(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}$ y $R(x) = \frac{-3x}{x^2-4}$

Calcular: a) $P(x) + Q(x) =$

c) $P(x) + R(x) =$

b) $P(x) - Q(x) =$

d) $P(x) + Q(x) - R(x) =$

5) Resolver:

a) $\frac{2}{x^2-9} + \frac{x+1}{x^2+6x+9} =$

b) $\left(\frac{2}{x^2-9} + \frac{x+1}{x^2+6x+9} \right) - \frac{1}{3-x} =$

6) Calcular:

a) $\frac{x+5}{x^2-25} + \frac{x+2}{2x^2-6x-20} - \frac{21}{2x+2} =$

b) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x^2-1} =$

7) Con las expresiones: $P(x) = \frac{2x+4}{x^2-9}$ y $Q(x) = \frac{x+3}{x^2-x-6}$

Calcular: a) $P(x) \cdot Q(x) =$

b) $P(x) : Q(x) =$

c) $Q(x) : P(x) =$

8) Calcular:

$\left[\left(\frac{x+4}{x^2-1} \right) \cdot \left(\frac{-x+1}{x^2+1} \right) \right] : \left(\frac{-x^2-3x+4}{x^4-1} \right) =$

9) Resolver los siguientes ejercicios combinados.

a) $\left(\frac{x-2}{x^2-4} + \frac{x+2}{x^2-x-6} \right) \cdot \left(\frac{x^2-9}{4x-10} \right) =$

$$b) \left(\frac{2x+6}{x^2-9} \right) \cdot \left(\frac{x+3}{x-7} \right) + \frac{x}{x+7} : \frac{x-7}{5} =$$

$$c) \left(\frac{2x^2+1}{3x^2} - \frac{2x+1}{4x^2-1} \cdot \frac{(2x-1)^2}{3x} \right) : \frac{x^2+2x+1}{9x^3} =$$

OTROS CASOS PARA APLICAR REGLA DE RUFFINI

Ya sabemos que la regla de Ruffini permite realizar la división de un polinomio por otro de la forma: $x \pm a$. Es decir, el polinomio divisor debe ser de grado 1 y mónico. Pero si el divisor es de grado 1, pero no es mónico, también podemos aplicar la Regla de Ruffini transformando el polinomio divisor en el producto de una constante por un polinomio mónico de la forma $x \pm a$.

En este caso el polinomio divisor tiene grado 1 pero no es mónico, puesto que su coeficiente principal no es 1.

Ruffini transformando el polinomio divisor en el producto de una constante (2) por un polinomio mónico de grado 1 ($x - 3$)

$$\text{Ej: } (4x^3 - 18x^2 + 14x + 15) : (2x - 6) \rightarrow$$

Procedemos del siguiente modo

$$1^\circ) (4x^3 - 18x^2 + 14x + 15) : [2 \cdot (x - 3)] \rightarrow$$

La división puede ser interpretada de esta forma. Luego, el primer factor es una división que puede resolverse por regla de Ruffini. Finalmente, al cociente obtenido en la división lo multiplicamos por $\frac{1}{2}$ (es decir, dividimos todos los coeficientes del resultado por 2)

$$2^\circ) \frac{4x^3 - 18x^2 + 14x + 15}{2 \cdot (x - 3)} = \left(\frac{4x^3 - 18x^2 + 14x + 15}{x - 3} \right) \cdot \frac{1}{2} \rightarrow$$

Aplicamos Regla de Ruffini en la división $(4x^3 - 18x^2 + 14x + 15) : (x - 3)$

4	-18	14	15
3	12	-18	-12
4	-6	-4	3

Una división que en principio no podía resolverse por Regla de Ruffini, con este procedimiento puede ser resuelta a través de esta regla.

El polinomio cociente es: $C(x) = 4x^2 - 6x - 4$

Si ahora multiplicamos este polinomio por $\frac{1}{2}$, tenemos lo siguiente:

$$(4x^2 - 6x - 4) \cdot \frac{1}{2} = 2x^2 - 3x - 2 \rightarrow$$

Para verificar que este procedimiento es válido, realizaremos la división con el algoritmo de la división y comprobaremos que llegamos al mismo resultado.

4x ³ - 18x ² + 14x + 15	2x - 6
+ 4x ³ + 12x ²	2x ² - 3x - 2
- 6x ² + 14x	
+ 6x ² - 18x	
- 4x + 15	
+ 4x - 12	
3	

Podemos observar que con este procedimiento obtenemos exactamente el mismo cociente y el mismo resto en la división.