

2^o Lista de Exercício de MAT6416 (1^o semestre 2009)

Esta lista contém problemas cuja solução poderá ser cobrada em prova. Ela também contém proposições e teoremas, alguns enunciados e outros **demonstrados em sala de aula** (abreviados aqui por **d.s.a**). A demonstração destes resultados também poderá ser cobrada em prova.

Bibliografia Principal:

1. M. M. Alexandrino and R. G. Bettiol: Introduction to Lie groups, adjoint action and its generalizations, ArXiv.org
2. F.L.N. Spindola: Grupos de Lie, ações próprias e a conjectura de Palais-Terng (dissertação de mestrado)

Bibliografia de Apoio:

1. J.J. Duistermaat and J.A. Kolk, Lie Groups Springer, Universitext 2000.
2. H.D. Fegan, Introduction to Compact Lie Groups, World Scientific, Series in Pure Mathematics- V 13 1998.
3. K. Kawakubo, The Theory of Transformation Groups, Oxford University Press, 1991.
4. M. Spivak, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, V. 1 Publish or Perish, Inc. 1979.
5. R.S. Palais, C-L Terng, Critical Point Theory and Submanifold Geometry, Lectures Notes in Mathematics 1353, Springer Verlag. (see Terng).

1 Ações Próprias

Problema 1 (d.s.a*). Considere $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação à esquerda. Mostre que:

- (1) Dado $\xi \in T_e G$,

$$\vec{\xi}_p = \left. \frac{d}{dt} (\exp(t\xi) \cdot p) \right|_{t=0}$$

define um campo suave em M .

- (2) O fluxo de $\vec{\xi}$ é $\varphi(t, \cdot) := \mu(\exp(t\xi), \cdot)$.

Problema 2 (d.s.a). Seja (E, B, π, G) um fibrado principal. Mostre que existe uma ação à direita, livre e própria de G em E tal que $\{\pi^{-1}(x)\}_{x \in B}$ são órbitas.

Problema 3 (d.s.a). Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação livre e própria. Demonstre que $(M, \pi, M/G, G)$ é fibrado principal, sendo $\pi : M \longrightarrow M/G$.

Problema 4 (d.s.a*). *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo normal. Demonstre que G/H admite estrutura suave que o torna um grupo de Lie. Mais ainda, $\pi : G \longrightarrow G/H$ é homomorfismo de Lie.*

Problema 5 (d.s.a). *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ ação e denote $\mu(x, \cdot)$ por $\mu_x(\cdot)$.*

- (a) *Mostre que $\ker(d(\mu_x)_{g_0}) = T_{g_0}(g_0G_x)$.*
- (b) *Considere a aplicação $\tilde{\mu}_x : G/G_x \rightarrow M$ tal que $\tilde{\mu}_x \circ \pi = \mu_x$. Mostre que $\tilde{\mu}_x : G/G_x \rightarrow M$ é imersão injetora.*
- (c) *Se a ação for própria mostre que $\tilde{\mu}_x : G/G_x \rightarrow M$ é um mergulho.*
- (d)* *Mostre que a esfera $\mathbb{S}^2$ é difeomorfa a $SO(3)/SO(2)$.*

Problema 6. *Seja G um grupo de Lie conexo e considere $\rho : \tilde{G} \longrightarrow G$ o recobrimento universal. Demonstre:*

- i) *$H = \rho^{-1}(e)$ é um subgrupo de Lie fechado, normal e discreto. Além disso, $hg = gh$, para todos $h \in H, g \in G$.*
- ii) *G é isomorfo a $\tilde{G}/H$*
- iii) *$\pi_1(G)$ é abeliano.*

Problema 7. *Mostre que $SU(2)$ é o recobrimento universal de $SO(3)$. Para tanto resolva os itens a seguir.*

- (a) *Mostre que a esfera $\mathbb{S}^3$ contida nos quatérnios $\mathbb{H}$ é isomorfa a $SU(2)$.*
- (b) *Seja $g \in \mathbb{S}^3$, $\theta \in \mathbb{R}$ e u vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ tal que $g = \cos(\theta) + \sin(\theta)u$. Defina $T_g(v) = gvg^{-1}$ para $v \in \mathbb{R}^3$. Mostre que:*
 - (b1) $T_g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
 - (b2)* $T_g = e^{A_{2\theta}u}$ onde $A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix}$.
 - (b3) $\varphi : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$ definido como $\varphi(g) = T_g$ é recobrimento.
 - (b4) *Conclua que o grupo fundamental de $SO(3)$ é $\mathbb{Z}_2$.*

Problema 8 (d.s.a*). *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria. Demonstre que, fixando $x \in M$, existe slice em x .*

Problema 9 (d.s.a). *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria e S_{x_0} um slice. Demonstre que:*

a) $G(S_{x_0})$ é vizinhança G -invariante da órbita $G(x_0)$.

b)

$$\begin{aligned}\psi : G \times_{G_{x_0}} S_{x_0} &\longrightarrow G(S_{x_0}) \\ [g, s] &\longmapsto \mu(g, s)\end{aligned}$$

é um difeomorfismo G -equivariante, isto é, $a \cdot \psi[g, s] = \psi(a[g, s]) = \psi[ag, s]$, para todo $a \in G$.

Problema 10 (d.s.a*). *Seja M uma variedade Riemanniana completa (conexa). Demonstre que a ação definida por*

$$\begin{aligned}\mu : \text{Iso}(M) \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto g(x)\end{aligned}\tag{1}$$

é própria.

Problema 11 (d.s.a*). *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria. Demonstre que existe uma métrica em M tal que μ^G é subgrupo fechado de $\text{Iso}(M)$.*

Problema 12 (d.s.a*). *Sejam $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação Riemanniana própria e $G(x)$ órbita principal.*

(a) *Dado um vetor unitário $v \in T_x(G(x))^\perp$ demonstre que é possível definir um campo normal unitário $\hat{v}$ ao longo de $G(x)$ tal que $\hat{v}_{g \cdot x} = d(\mu^g)_x v$ onde $\mu(\cdot, g)$ é denotado por μ^g .*

(b) $\mathcal{A}_{\hat{v}_{g \cdot x}} = d\mu^g_{\hat{v}_x} d\mu^{g^{-1}}$ onde $\mathcal{A}_{\hat{v}_x} W = -\nabla_W^\top \hat{v}$.

(c) *Mostre que as curvaturas de $G(x)$ ao longo de $\hat{v}$ são constantes.*

(d) *Mostre que o conjunto $\{\exp_y(r \hat{v}(y)) \mid y \in G(x)\}$ é uma órbita para todo número r fixo.*

(e) *Demonstre que, se uma geodésica é ortogonal a uma órbita (regular ou singular), então a geodésica é ortogonal a todas órbitas que encontra.*

Problema 13 (d.s.a*). *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria. Demonstre que o conjunto dos pontos contidos em órbitas principais é um conjunto aberto e denso.*

Problema 14 (d.s.a*). *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria. Demonstre que, dado um ponto $p \in M$, existe uma vizinhança G -invariante U do ponto p tal que U tem somente um número finito de tipos de órbitas. Em particular se M é compacta, M tem um número finito de tipos de órbitas.*

Problema 15. *Considere a ação por conjugação do grupo $SU(3)$ nele mesmo. Mostre que as órbitas são isomorfas a uma das três variedades abaixo.*

- (a) λId onde $\lambda^3 = 1$ e Id é a matriz identidade.
- (b) $SU(3)/T^2$ onde T^2 é o grupo das matrizes diagonais complexas $(t_{i,j})$, tal que $|t_{i,i}| = 1$ e $t_{1,1} \cdot t_{2,2} \cdot t_{3,3} = 1$.
- (c)* *Projetivo complexo $\mathbb{CP}(2)$. Em particular mostre que $\mathbb{CP}(2)$ é isomorfo a $SU(3)/S(U(2) \times U(1))$.*

2 Ação adjunta e ação por conjugação

Problema 16 (d.s.a*). *Seja G um grupo de Lie compacto conexo e considere a ação de G em G por conjugação. Demonstre:*

- (a) *Existe um toro máximo T , i.e., se $T \subset N$ para um toro N , então $T = N$.*
- (b) *Sejam T_1 e T_2 toros máximos. Então existe um elemento $g \in G$ tal que $gT_1g^{-1} = T_2$. Em particular os toros máximos tem a mesma dimensão, a qual é chamada posto de G .*
- (c) *Seja T um toro máximo e $g \in G$. Então existe um elemento $h \in G$ tal que $hgh^{-1} \in T$. Em particular cada elemento de G está contido em um toro máximo.*
- (d) *Para cada métrica bi-invariante em G as órbitas da ação por conjugação encontram cada toro máximo ortogonalmente.*

Problema 17 (d.s.a*). *Seja G um grupo de Lie compacto conexo com métrica bi-invariante e $\mathfrak{t}$ a álgebra de Lie de um toro máximo. Mostre que cada órbita da ação adjunta encontra $\mathfrak{t}$ ortogonalmente.*

Problema 18 (d.s.a*). *Seja G um grupo de Lie compacto conexo não abeliano e T um toro máximo de G . Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{t}$ álgebra de Lie de G e T respectivamente e $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ a complexificação de $\mathfrak{g}$. Demonstre:*

- (a) *$\text{ad}X \in L_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ é diagonalizável com auto-valores imaginários puros, para cada $X \in \mathfrak{g}$.*
- (b) *Existe uma única decomposição (a menos de permutação) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ em espaços vetoriais complexos*

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [X, Y] = i\alpha(X)Y, \text{ para todo } X \in \mathfrak{t}\},$$

onde $\alpha : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{R}$ é funcional linear chamado raiz. Assim sendo $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_{\alpha}$ onde R denota o conjunto das raízes.

- (c) *$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$ e $\overline{\mathfrak{g}_{\alpha}} = \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Em particular se $\alpha \in R$ então $-\alpha \in R$.*
- (d) *$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\alpha} = 1$ e $\dim V_{\alpha} = 2$ onde $V_{\alpha} := (\mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$.*
- (e) *$\mathfrak{g}_{k\alpha} = 0$ se $k \neq -1, 0, 1$.*
- (f) *Seja $e_2 + ie_1$ um vetor que gera $\mathfrak{g}_{\alpha}$, onde $e_1, e_2 \in \mathfrak{g}$. Então*
 - (f.1) *e_1, e_2 é base de V_{α} .*
 - (f.2) *$[X, e_1] = \alpha(X)e_2$ e $[X, e_2] = -\alpha(X)e_1$ para todo $X \in \mathfrak{t}$.*
 - (f.3) *$\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ and $\|e_1\| = \|e_2\|$ com respeito a cada métrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

$$(f.4) \text{Ad}(\exp(X))|_{V_{\alpha}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha(X)) & -\sin(\alpha(X)) \\ \sin(\alpha(X)) & \cos(\alpha(X)) \end{bmatrix} \text{ com respeito a base } \frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}.$$

- (g) *Seja $\alpha^{\vee}$ a co-raiz de α , i.e., o vetor em $\mathfrak{t}$ tal que $\alpha(\alpha^{\vee}) = 2$ e $\alpha^{\vee}$ é ortogonal ao $\ker \alpha$ com respeito a uma métrica bi-invariante. Então*

- (g.1) A definição de $\alpha^\vee$ não depende da métrica bi-invariante.
- (g.2) Seja $\mathfrak{g}^{(\alpha)} := \mathbb{R}\alpha^\vee \oplus V_\alpha$. Então $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ é uma álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{so}(3)$ e $G^{(\alpha)} := \exp(\mathfrak{g}^{(\alpha)})$ é grupo de Lie compacto.
- (g.3) Para cada $g \in G^{(\alpha)}$, a restrição de $\text{Ad}(g)$ ao $\ker \alpha$ é a identidade.
- (g.4) Existe $w \in G^{(\alpha)}$ tal que $\text{Ad}(w)\alpha^\vee = -\alpha^\vee$.

Problema 19 (*). Determine o conjunto das raízes R de $SU(3)$. Escolha um conjunto P de raízes positivas e determine uma base de R (i.e., conjunto das raízes simples de P). Utilizando a base de R determine o diagrama de Dynkin de $SU(3)$.