

1^o Lista de Exercício de MAT6416 (1^o semestre 2009)

Esta lista contém problemas cuja solução poderá ser cobrada em prova. Ela também contém proposições e teoremas, alguns enunciados e outros **demonstrados em sala de aula** (abreviados aqui por **d.s.a**). A demonstração destes resultados também poderá ser cobrada em prova.

Bibliografia Principal:

1. M. M. Alexandrino and R. G. Bettiol: Introduction to Lie groups, adjoint action and its generalizations, ArXiv.org
2. F.L.N. Spindola: Grupos de Lie, ações próprias e a conjectura de Palais-Terng (dissertação de mestrado)

Bibliografia de Apoio:

1. J.J. Duistermaat and J.A. Kolk, Lie Groups Springer, Universitext 2000.
2. H.D. Fegan, Introduction to Compact Lie Groups, World Scientific, Series in Pure Mathematics- V 13 1998.
3. K. Kawakubo, The Theory of Transformation Groups, Oxford University Press, 1991.
4. M. Spivak, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, V. 1 Publish or Perish, Inc. 1979.
5. R.S. Palais, C-L Terng, Critical Point Theory and Submanifold Geometry, Lectures Notes in Mathematics 1353, Springer Verlag. (see Terng).

1 Resultados básicos sobre grupos de Lie

Problema 1.1. Seja H um subgrupo de um grupo de Lie G . Suponha que H é variedade mergulhada. Mostre que H é subgrupo de Lie de G .

Problema 1.2. Mostre que $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n)$, $SO(n)$ e $U(n)$ são grupos de Lie.

Dica: Ou demonstra-se que tais grupos são subvariedades mergulhadas e utiliza-se o problema anterior, ou mostra-se que eles são subgrupos fechados e utiliza-se (sem demonstrar) o teorema que garante que todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é subgrupo de Lie.

Problema 1.3. Seja $\mathfrak{so}(3) = \{A \in M(3, \mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$

(a) Verifique que $\mathfrak{so}(3)$ é álgebra de Lie, com $[A, B] = AB - BA$.

(b) Seja $A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que $A_\xi v = \xi \times v$.

(c) $A_{\xi \times \eta} = [A_{\xi}, A_{\eta}] = A_{\xi}A_{\eta} - A_{\eta}A_{\xi}$. Conclua que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \times) & \rightarrow & \mathfrak{so}(3) \\ \xi & \rightarrow & A_{\xi} \end{array}$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie.

(d) Mostre que $\mathfrak{so}(3)$ é álgebra de Lie de $SO(3)$, com $[A, B] = AB - BA$.

(e*) Verifique que $\exp(A_{\xi})$ é uma rotação em torno do eixo ξ com velocidade angular $\|\xi\|$.

Problema 1.4. Mostre que se H é subgrupo de Lie mergulhado de um grupo de Lie G , então H é fechado.

Teorema 1.5 (d.s.a). *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja $\mathfrak{h}$ subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Então existe um único subgrupo de Lie conexo $H \subset G$ com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.*

Proposição 1.6. *Seja G um grupo de Lie e G^0 a componente conexa da identidade. Então:*

1. G^0 é um subgrupo de Lie de G normal.
2. As componentes conexas de G são da forma gG^0 .
3. Dado uma vizinhança U de e então $G^0 = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$ onde $U^n = \{g_1^{\pm} \cdots g_n^{\pm} \mid g_i \in U\}$

Problema 1.7. Sejam G e H grupos de Lie conexos e $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfismo de Lie. Mostre que φ é aplicação de recobrimento se e somente se $d\varphi_e$ é um isomorfismo.

Teorema 1.8 (d.s.a). *Sejam G, H grupos de Lie e $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ homomorfismo de álgebras de Lie. Então:*

1. Se G é conexo e existem dois homomorfismos de grupos de Lie $\varphi, \psi : G \rightarrow H$ com $d\varphi_e = d\psi_e = \theta$ então $\varphi = \psi$.
2. Existe uma vizinhança U de e e aplicação $\varphi : U \rightarrow H$ suave tal que
 - (a) $\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$ para $a, b, ab^{-1} \in U$ (homomorfismo local).
 - (b) $d\varphi_e = \theta$.
3. Se G for simplesmente conexo, então existe um único homomorfismo de grupos Lie $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $d\varphi_e = \theta$.

4. Se G e H são conexos e simplesmente conexos e θ é um isomorfismo, então G e H são isomorfos.

Proposição 1.9 (d.s.a). Se G é um subgrupo de Lie de $GL(n)$ então a aplicação exponencial de G coincide com a exponencial de matrizes.

Proposição 1.10 (d.s.a). Seja $\varphi : G \rightarrow H$ um homomorfismo entre os grupos de Lie G e H . Então $\varphi \circ \exp^G = \exp^H \circ d\varphi$.

Proposição 1.11 (d.s.a). $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$ para qualquer $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Proposição 1.12 (d.s.a). Sejam G subgrupo de Lie de $GL(n)$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Então

1. $dL_g X = gX$ e $dR_g X = Xg$.
2. $\text{Ad}(g)Y = gYg^{-1}$.
3. $[X, Y] = XY - YX$ (comutador de matrizes).

Problema 1.13. Determine as álgebras de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n)$, $SO(n)$ e $U(n)$.

Proposição 1.14 (d.s.a). Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então

- (a) Se $X, Y \in \mathfrak{g}$ então $[X, Y] = 0$ se e somente se $\exp(X)\exp(Y) = \exp(Y)\exp(X)$.
- (b) $\mathfrak{g}$ é comutativo se e somente se G é abeliano.
- (c) Se $[X, Y] = 0$ então $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$.

Teorema 1.15 (*). Seja G um grupo de Lie conexo e abeliano de dimensão n . Então G é isomorfo a $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ onde T^k é um toro. Em particular se G é compacto, então G é isomorfo a um toro.

Dica: Pode-se usar (sem demonstrar) o seguinte resultado:

Lema: Sejam V espaço vetorial real e Γ subgrupo discreto de $(V, +)$ diferente de $\{0\}$ (i.e, Γ é um lattice integral). Então existe k tal que $1 \leq k \leq n$ e existem vetores $e_1, \dots, e_k$ linearmente independentes tais que $\Gamma = \{\sum_{i=1}^k n_i e_i \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 1.16 (d.s.a*). Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G . Então H é subgrupo de Lie mergulhado de G .

Proposição 1.17 (d.s.a). Seja $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfismo contínuo entre os grupos de Lie G e H . Então φ é suave.

2 Grupos de Lie e Geometria Riemanniana

Proposição 2.1 (d.s.a). *Seja G um grupo de Lie compacto. Então G admite métrica bi-invariante.*

Proposição 2.2 (d.s.a). *Sejam G grupo de Lie com métrica biinvariante, X, Y, Z campos invariantes a esquerda. Então:*

- (a) $\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle$
- (b) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$
- (c) $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$
- (d) $\langle R(X, Y)X, Y \rangle = \frac{1}{4}\langle [X, Y], [X, Y] \rangle$. Em particular a curvatura sectional é sempre maior ou igual a 0.

Proposição 2.3 (d.s.a). *Seja G grupo de Lie conexo com métrica bi-invariante.*

- (a) *Então a exponencial riemanniana em $e \in G$ coincide com a exponencial de Lie.*
- (b) *A exponencial de Lie é sobrejetora.*

Proposição 2.4 (d.s.a). *Seja B a forma de Killing de um grupo de Lie conexo G .*

- (a) $B(X, Y) = B(\text{Ad } (g)X, \text{Ad } (g)Y)$.
- (b) *Se G admite métrica bi-invariante, então $\text{Ric } (X, Y) = -\frac{1}{4}B(X, Y)$. Em particular a curvatura de Ricci independe da métrica bi-invariante.*

Para demonstra o teorema a seguir, o aluno poderá usar o Teorema de Bonnet-Myers (enunciado em sala de aula).

Teorema 2.5 (d.s.a). *Seja G um grupo de Lie conexo semi-simples. Então G é compacto se e somente se a forma de Killing for negativa definida.*

Proposição 2.6 (d.s.a). *Seja $\mathfrak{g}$ a algebra de Lie de um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo G com métrica bi-invariante. Então*

- (a) $\mathfrak{g}$ é igual a soma direta ortogonal $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ de ideais simples.
- (b) G é isomorfo a um produto de subgrupos normais de Lie $G_1 \times \cdots \times G_n$ tais que:
 - (b1) $\mathfrak{g}_i$ é algebra de Lie de G_i .
 - (b2) Se $\mathfrak{g}_i$ é comutativa, então $G_i = \mathbb{R}$. Se $\mathfrak{g}_i$ não é comutativa, então G_i é compacto.

Proposição 2.7 (d.s.a). *Se a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie compacto G é simples, então a métrica bi-invariante é única a menos de multiplicação por constante positiva. Além disto, G é variedade de Einstein para toda métrica bi-invariante.*

Problema 2.8. Seja G um grupo conexo de Lie, simplesmente conexo com métrica bi-invariante. Suponha que $\mathfrak{g}$ é semi-simples. Classifique as todas as métricas bi-invariantes de G em termos de formas de Killing e as decomposições em ideais simples $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ de $\mathfrak{g}$ (vide Proposição 2.6) e as formas de Killing