

1<sup>o</sup> Lista de Exercício de MAT0145 (2<sup>o</sup> semestre 2009)

Turma: 2009201

## 1 Parte 1:

### 1.1 I - Conjuntos abertos, fechados e aplicações contínuas

**Problema 1.1.** Esboce as regiões abaixo e diga se os conjuntos são abertos, fechados ou nenhum dos dois:

(1)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 3, 0 \leq x \leq 4y\}$

(2)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2, x + y < 2\}$

(3)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 > 1\}$

**Problema 1.2.** Ache e esboce o maior domínio onde a função  $f$  possa estar definida

(1)  $f(x, y) = \sqrt{x - y}$

(2)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

(3)  $f(x, y) = \tan(x - y)$

**Problema 1.3.** Calcule os limites caso existam. Se não existirem, diga por quê.

(1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

(2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(3)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$

(4)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}$

(5)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(6)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$

## 1.2 II - Curvas planas

**Problema 1.4.** Determine as equações cartesianas que descrevem a imagem da curva parametrizada abaixo.

(1)  $x(t) = 1 - 2t$ ,  $y(t) = t^2 + 4$ ,  $0 \leq t \leq 3$

(2)  $x(t) = \sqrt{t}$ ,  $y(t) = 1 - t$ ,  $t \in \mathbb{R}$

(3)  $x(t) = \tan(t) + \sec(t)$ ,  $y(t) = \tan(t) - \sec(t)$ ,  $-\pi/2 < t < \pi/2$

**Problema 1.5.** Encontre uma parametrização da curva descrita pelas equações cartesianas abaixo.

(1)  $x = h(y)$ ,  $a \leq y \leq b$

(2)  $\frac{(x-p_1)^2}{a^2} + \frac{(y-p_2)^2}{b^2} = 1$

(3)  $\frac{(x-p_1)^2}{a^2} - \frac{(y-p_2)^2}{b^2} = 1$ ,  $x < 0$

**Problema 1.6.** Encontre a equação cartesiana da(s) reta(s) tangente(s) à curva parametrizada abaixo no ponto dado.

(1)  $x(t) = \exp(\sqrt{t})$ ,  $y(t) = t - \ln(t^2)$ ,  $p = (\exp(1), 1)$

(2)  $x(t) = t^2$ ,  $y(t) = t^3 - 3t$ ,  $p = (3, 0)$

**Problema 1.7.** Considere a curva parametrizada  $\alpha(t) = (t^3 - 3t, 3t^2 - 9)$  com  $t \in \mathbb{R}$ . Ache os pontos da curva nos quais a tangente é vertical ou horizontal. Esboce a imagem de  $\alpha$  explicitando os pontos de auto-interseção (se houver).

**Problema 1.8.** Calcule o comprimento da curva  $\alpha$ .

(1)  $\alpha(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3)$ ,  $t \in [-4, 4]$

(2)  $\alpha(t) = (\cos(t)^2, \sin(t)^2)$ ,  $t \in [0, \pi]$

(3)  $\alpha(t) = (\cos(t) + t \sin(t), \sin(t) - t \cos(t))$ ,  $t \in [0, \pi]$ .

### 1.3 III - Superfícies

#### Problema 1.9.

Diga se a superfície abaixo é gráfico (em relação ao plano  $XY$ ), cilindro sobre curva (em relação ao eixo  $Z$ ) e/ou superfície de revolução (em relação ao eixo  $Z$ ). Utilizando tais informações, esboce a superfície.

- (1)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = x^2\}$
- (2)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x^2 + 3y^2 = z^2\}$
- (3)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -\ln(x^2 + y^2)\}$

**Problema 1.10.** Esboce as superfícies abaixo:

- (1)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 = 3x^2 + 4y^2 - 12\}$
- (2)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13\}$
- (3)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 + 4y + z = 4\}$

### 1.4 IV - Curvas espaciais

**Problema 1.11.** Determine uma parametrização para a curva obtida pela intersecção das superfícies descritas pelas equações cartesianas abaixo.

- (1) Intersecção do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  com o plano  $z = 1 + y$ .
- (2) Intersecção do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  com o cilindro parabólico  $z = x^2$ .
- (3) Intersecção do plano  $z = 5 - x$  com o cone  $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$
- (4) Intersecção do cilindro  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  com a semi-esfera  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- (5) Intersecção do parabolóide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$  com o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Problema 1.12.** Seja  $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$ .

- (a) Esboce as curvas de nível e o gráfico de  $f$ .
- (b) O gráfico de  $f$  e o plano  $z = 2x + 1$  tem como intersecção uma curva. Parametrize tal curva.

## 1.5 Respostas da Parte 1

Problema 1.1

- (1) fechado
- (2) aberto
- (3) não é fechado, não é aberto.

Problema 1.2

- (1)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq x\}$
- (2)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$
- (3)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Problema 1.3

- (1) limite não existe
- (2) limite é 0
- (3) limite é 0
- (4) limite não existe
- (5) limite é 1
- (6) limite é 0

Problema 1.4:

- (1)  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{17}{4}$
- (2)  $y = 1 - x^2, x \geq 0$
- (3)  $y = -1/x, x > 0$

Problema 1.5:

- (1)  $x(t) = h(t)$ ,  $y(t) = t$ ,  $a \leq t \leq b$
- (2)  $x(t) = a \cos(t) + p_1$ ,  $y(t) = b \sin(t) + p_2$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
- (3)  $x(t) = -a \cosh(t) + p_1$ ,  $y(t) = b \sinh(t) + p_2$ ,  $t \in \mathbb{R}$

Problema 1.6:

- (1)  $y = \frac{-2}{\exp(1)}x + 3$
- (2)  $y = \sqrt{3}(x - 3)$  e  $y = -\sqrt{3}(x - 3)$

Problema 1.7:

Pontos de tangência horizontal:  $(0, -9)$ . Pontos de tangência vertical:  $(-2, -6)$  e  $(2, -6)$ . Auto interseção  $(0, 0)$ .

Problema 1.8

- (1)  $64\sqrt{5}$
- (2)  $2\sqrt{2}$
- (3)  $\frac{\pi^2}{2}$

Problema 1.9:

- (1) Cilindro sobre curva.
- (2) Superfície de revolução.
- (3) Gráfico e superfície de revolução.

Problema 1.10: completando quadrados, encontramos as quádricas abaixo:

- (1)  $(x^2/4) + (y^2/3) + (z^2/12) = 1$  (hiperpeloide de uma folha)
- (2)  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 4(z + 1)^2 = 22$  (hiperboloide de uma folha)
- (3)  $z = (y - 2)^2 - x^2$  (parabolóide hiperbólico)

Problema 1.11

(1)  $\alpha(t) = (t, \frac{1}{2}(t^2 - 1), \frac{1}{2}(t^2 + 1)), \quad t \in \mathbb{R}$

(2)  $\alpha(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), 4 \cos^2(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(3)  $\alpha(t) = (-5 + 5\sqrt{2} \cos(t), 5 \operatorname{sen}(t), 10 - 5\sqrt{2} \cos(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(4)  $\alpha(t) = (1 + \cos(t), \operatorname{sen}(t), \sqrt{2 - 2 \cos(t)}), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

(5)  $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), -\cos(2t)), \quad t \in [0, 2\pi]$

Problema 1.12 (b):  $\alpha(t) = (\frac{t^2-1}{4}, t, \frac{t^2+1}{2}), \quad t \in \mathbb{R}$