

**Grupos de Lie, ações próprias
e a conjectura de Palais-Terng**

Flausino Lucas Neves Spindola

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa de Pós-Graduação em Matemática
Orientador: Prof. Dr. Marcos Martins Alexandrino da Silva

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, agosto de 2008

À minha mãe, Ana
e irmãs, Valéria e Ana Carolina.

Agradecimentos

Nesse momento, fazendo um resumo de nossa trajetória, vários momentos e pessoas se passam à mente. Mas certamente algumas delas se tornam imprescindíveis.

A começar pelo seio familiar, o quanto eu puder agradecer e honrar o nome de minha mãe, Ana Neves, ainda assim seria pouco. Mas na limitação das letras, vale a pena prestar uma homenagem, que seja breve, a essa mulher que me integrou ao mundo e me ensinou as boas lições que permeiam minha existência, de forma muito dócil e sempre repleta de amor. Mãe, mais uma vez, obrigado!

Não posso esquecer de minhas irmãs, Ana Carolina e Valéria, as quais me acompanham desde o meu nascimento. Elas que nos dão suporte emocional para a vida, inclusive em nosso crescimento como pessoa. Irmãs, sou muito grato por todas as vezes que se preocuparam comigo, me apoiaram e estimularam.

Mas um projeto de mestrado não se faz sem um grande mestre na guia. E certamente tive a sorte de encontrar uma pessoa magnífica para me conduzir. Dizer que Marcos é meu orientador de mestrado é pouco, porque realmente ele o é para a vida. Sua preocupação com os alunos extrapola o ambiente acadêmico e o trabalho em si, mas preza por uma formação completa. Jamais esquecerei as horas de conversas sobre perspectivas futuras e o incentivo dado à busca pelo conhecimento. Marcos, muito obrigado! Suas lições, sejam de geometria ou de vida, sempre carregarei comigo.

Bem, não posso esquecer também dos amigos e demais pessoas com as quais convivemos no ambiente da universidade. Aldair e Gustavo são grandes companheiros de residência, os quais considero como família; Eduardo, amigo fiel e confidente. Vou evitar fazer uma lista de nomes, mas agradeço aqui a todos os colegas e amigos que, de forma direta ou indireta, estiveram comigo em algum momento. Vocês todos são muito importantes pra mim!

Resumo

Esta dissertação tem dois objetivos.

Nosso primeiro objetivo é apresentar alguns aspectos da teoria dos grupos de Lie e ações próprias, baseado em aulas dadas por M. Alexandrino

Nosso segundo objetivo é rever a prova da conjectura de Terng e Palais dada por Alexandrino [A]. Este teorema nos garante que folheações riemannianas singulares com distribuição normal é uma folheação riemanniana singular com seções.

Adaptamos a demonstração para o caso particular das ações isométricas.

Abstract

The aim of this work is twofold.

Our first goal is to present some aspects of the theory of Lie group and proper action based on lectures given by M. Alexandrino.

The second goal is to review the proof of the conjecture of Terng and Palais given by Alexandrino [A]. This theorem assure us that a singular riemannian foliation with integrable normal distributions is is a singular riemannian foliation with section.

We adapt the proof for the particular case of isometric action.

Sumário

1	Resultados Básicos de Grupos de Lie	3
1.1	Grupos e Álgebras de Lie	3
1.2	Colchete de Campos	7
1.3	Campos Invariantes à Esquerda	9
1.4	Subgrupos e Homomorfismos de Lie	12
1.5	Aplicação Exponencial e Representação Adjunta	19
1.6	Subgrupos Fechados	22
1.7	Fatos de Geometria Riemanniana	26
1.8	Métricas Bi-invariantes	28
1.9	Forma de Killing	32
1.10	Decomposição em Ideais Simples	34
2	Ações Próprias	39
2.1	Definições e Resultados Iniciais	39
2.2	Fibrados	48
2.3	Existência de Slice	57
2.4	Fibrados Associados	61
2.5	Vizinhança Tubular	62
2.6	Ações Isométricas	67
2.7	Órbita Principal	73
2.8	Campos de Killing	76
2.9	Tipos de Órbita	80
3	A Conjectura de Terng-Palais	85
3.1	Fatos sobre Imersões Riemannianas	85
3.2	A Prova da Conjectura	86
3.2.1	Demonstração do Teorema 3.8	90
	Referências Bibliográficas	92
	Referências Bibliográficas	93

Introdução

Apresentamos aqui um texto introdutório auto-suficiente sobre grupos de Lie e ações, no intuito de organizar um instrumental teórico importante para compreender e demonstrar o teorema final deste texto (a conjectura de Palais-Terng). Algumas vezes, alguns conceitos e teoremas importantes que exigiriam uma abordagem mais geral serão utilizados, mas para evitar o desvio de nosso foco central e prolongar demasiadamente a dissertação, nos ocuparemos em indicar referências onde tais conceitos podem ser elucidados para eventual consulta do leitor.

Os dois primeiros capítulos desta dissertação são baseados em notas de aula da disciplina "Introdução aos Grupos de Lie e Ações Próprias" ministrada no primeiro semestre de 2006 pelo professor Marcos Alexandrino no IME/USP. Em nosso primeiro capítulo, buscamos reunir as definições e resultados da teoria dos grupos e álgebras de Lie de maneira sucinta e compreensível para um leitor a nível de mestrado, também apresentando relações importantes que podem ser feitas ao pensar nos subgrupos e subálgebras de Lie. A disposição das seções permite um estudo cuidadoso das proposições principais e finalizamos com importante resultado sobre decomposição de álgebras e grupos de Lie.

O segundo capítulo se preocupa em introduzir as ações de um grupo de Lie em uma variedade. Neste capítulo é que tratamos das ações isométricas próprias bem como dos espaços de órbitas e slice tão necessárias para o trabalho no capítulo 3.

No capítulo 3 finalmente vamos atacar o problema proposto por Palais-Terng, que garante a existência de uma seção imersa completa totalmente geodésica sempre ortogonal às órbitas de uma ação isométrica própria caso a distribuição normal às órbitas seja integrável. Nesta demonstração, vamos reunir todo o conhecimento acumulado sobre ações de grupos de Lie na tentativa de demonstrar um resultado recente. Para tal, faremos uma adaptação da prova de Alexandrino ([A]) ao caso particular de órbitas de uma ação isométrica própria.

Capítulo 1

Resultados Básicos de Grupos de Lie

Este capítulo consiste em um texto claro e objetivo sobre a teoria dos grupos de Lie. Os conceitos principais dessa teoria são aqui apresentados e as propriedades enunciadas e demonstradas.

De início, vamos introduzir as definições de grupos de Lie e álgebras de Lie, estabelecendo condições para construir álgebra de Lie a partir de grupo de Lie (através de campos invariantes à esquerda) e admitindo o terceiro teorema de Lie que nos garante a existência de um grupo de Lie conexo para uma álgebra de Lie dada.

Um estudo importante de subgrupos e subálgebras de Lie é realizado na seção 1.4, o que a torna rica em proposições e teoremas importantes sobre homomorfismos de grupos e de álgebras de Lie. Estudamos em seguida a exponencial de Lie e sua relação com os conceitos de adjunta e adjunta pequena. Finalizamos com o estudo das métricas bi-invariantes e mostrando um importante resultado de decomposição de grupos de Lie por meio do qual estabelecemos condições para a existência de uma única métrica bi-invariante.

1.1 Grupos e Álgebras de Lie

Procuramos nesta seção introduzir de forma clara os conceitos de grupos de Lie e álgebras de Lie. Para isto, iniciamos definindo variedade suave e depois dando a ela a estrutura de grupo necessária para torná-la um grupo de Lie. Exibiremos alguns exemplos importantes na compreensão da definição e mostraremos o primeiro resultado interessante desse capítulo que dá estrutura de grupo de Lie a uma subvariedade mergulhada de grupo de Lie.

Definição 1.1 (Variedade). Uma *variedade suave (analítica)* M , de *dimensão* m (usualmente denotada por M^m), é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável munido de uma família de homeomorfismos

$$\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \longrightarrow \mathcal{V}_\alpha$$

de abertos $\mathcal{U}_\alpha$ de M em abertos $\mathcal{V}_\alpha$ de $\mathbb{R}^m$ satisfazendo as propriedades:

- 1) $M = \cup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$
- 2) Se $\mathcal{W} = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, então

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{W}) \longrightarrow \varphi_\beta(\mathcal{W})$$

é suave (analítica)

3) A família $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é máxima com relação às condições acima.

Observação 1.2. Algumas denominações especiais são dadas aos homeomorfismos e abertos da definição acima. O par $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ é chamado de *carta local* e, sendo $p \in \mathcal{U}_\alpha$, costumamos dizer que $\mathcal{U}_\alpha$ é *vizinhança coordenada* de p , φ_α é *coordenada local* em p e sua inversa φ_α^{-1} *parametrização local* em p . A composição $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ é chamada de *mudança de coordenadas*, e uma família $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ satisfazendo 1) e 2) da definição acima é chamada *atlas suave (analítico)* de M . No caso em que 3) é satisfeita, dizemos que M possui uma *estrutura suave (analítica)*.

Definição 1.3. Sejam M e N duas variedades suaves (analíticas), com respectivas estruturas $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}$ e $\{(\mathcal{V}_\beta, \varphi_\beta)\}$. Dizemos que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é *suave (analítica)* em $p \in M$ se $\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$ for suave (analítica) em $\psi_\alpha(p)$. Vamos denotar o conjunto das funções suaves de M em N por $\mathcal{C}^\infty(M, N)$, e $\mathcal{C}^\infty(M)$ o conjunto das funções suaves com domínio M e contra-domínio $\mathbb{R}$.

Observação 1.4. Diremos que a função f é suave se ela for suave em todos os pontos de seu domínio. Note ainda que a definição 1.3 independe da escolha das cartas.

Definição 1.5 (Grupo de Lie). Uma variedade suave (analítica) G é chamada *Grupo de Lie* se:

- a) G é grupo;
- b) As aplicações

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G & \text{e} & & i : G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b & & & a &\longmapsto a^{-1} \end{aligned}$$

são suaves (analíticas).

Observação 1.6. Na definição acima, a condição (b) é equivalente a afirmar que

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b^{-1} \end{aligned}$$

é suave (analítica).

Teorema 1.7. *Seja G um grupo de Lie suave. Então, G admite uma estrutura analítica que o torna um grupo de Lie analítico.*

Este resultado é enunciado devido à sua relevância, apesar de que neste texto trabalharemos apenas com estruturas suaves. Sua demonstração foge ao escopo deste texto, mas pode ser encontrada em [DK], pg. 28. Convém observar, porém, que todos os resultados aqui apresentados também são válidos em grupos de Lie analíticos.

Exemplo 1.8. Alguns exemplos de Grupos de Lie são:

- a) $(\mathbb{R}^n, +)$;
- b) $(S^1, \cdot)$ sendo $\cdot$ a multiplicação complexa dada por $e^{i\theta} \cdot e^{i\sigma} = e^{i(\theta+\sigma)}$
- c) $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$, com a operação obtida a partir da regra usual para o produto cartesiano de $(S^1, \cdot)$;
- d) $GL_n(\mathbb{R})$, o grupo multiplicativo das matrizes quadradas de ordem n inversíveis sobre $\mathbb{R}$;
- e) $SL_n(\mathbb{R})$, o grupo das matrizes reais quadradas de ordem n , com determinante 1;
- f) $O_n = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^{-1} = A^t\}$;
- g) $U_n = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^{-1} = \bar{A}^t\}$

Observação 1.9. Cabem alguns comentários com relação aos exemplos d), e), f) e g) apresentados acima. O espaço das matrizes quadradas $M_n(\mathbb{R})$ possui uma estrutura natural de variedade, e considerando a aplicação determinante (a qual é suave) obtemos $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Portanto, $GL_n(\mathbb{R})$ é um aberto de $M_n(\mathbb{R})$ e possui estrutura de variedade. A multiplicação de matrizes é polinomial em cada componente, e a inversa é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$$

onde $\text{adj } A$ denota a adjunta clássica da matriz A dada por $(\text{adj } A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ji}$, sendo M_{ji} obtida pela omissão da j -ésima linha e i -ésima coluna da matriz A . Consequentemente, tais aplicações são suaves e, como $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, resulta que $GL_n(\mathbb{R})$ é grupo de Lie.

Usando as funções $\det$ e $f(X) = XX^t$ (esta última também suave por ter entradas polinomiais), temos que $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ e $O_n = f^{-1}(I)$. Fixando uma matriz A , é válido que $\det(AX) = \det A \det X$ e $f(AX) = Af(X)A^t$, para toda matriz X ; disso segue que $\det$ e $f(X) = XX^t$ são aplicações de posto constante e, por consequência do teorema do posto, $SL_n(\mathbb{R})$ e O_n são subvariedades (def. 1.10) de $GL_n(\mathbb{R})$. A proposição 1.12 vai garantir que essas subvariedades são grupos de Lie. (O caso U_n é análogo, usando a função $g(X) = X\bar{X}^t$).

Definição 1.10 (Imersão, Mergulho, Subvariedade).

- a) Uma aplicação suave entre variedades $f : M \longrightarrow N$ é *imersão* se df_p é injetora, $\forall p \in M$.
- b) Uma imersão $f : M \longrightarrow N$ é *mergulho* se $f : M \longrightarrow f(M)$ é homeomorfismo, considerando $f(M)$ com a topologia induzida de N .
- c) Dada uma variedade M e um subconjunto $N \subset M$, diremos que N é *subvariedade imersa* de M se N possui uma estrutura suave na qual a inclusão $i : N \longrightarrow M$ é uma imersão. Se existir uma estrutura suave de N em que a inclusão seja um mergulho, N será chamada *subvariedade (mergulhada)* de M .

Lema 1.11. *Sejam L, M variedades e N uma subvariedade mergulhada de M . Seja $f : L \longrightarrow M$ suave tal que $f(L) \subset N$. Então, $f : L \longrightarrow N$ é suave.*

Demonstração: Tomemos um ponto arbitrário $p \in L$, e seja $q = f(p)$ sua imagem. Podemos considerar uma vizinhança coordenada $(\mathcal{U}, \varphi)$ de p a qual é levada por f em uma vizinhança coordenada $(\mathcal{V}, \psi)$ de q tal que $\psi(\mathcal{V})$ é uma bola $\mathcal{B}_\varepsilon(0)$ e $\psi(q) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Como N é subvariedade mergulhada de M , temos que $\psi(\mathcal{V} \cap N) = \mathcal{W} \cap \{(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n\}$, sendo $\mathcal{W}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$. Assim, temos que $\psi \circ f \circ \varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x), 0, \dots, 0)$, para todo $x \in \varphi^{-1}(\mathcal{U})$. Tomando π a projeção nas m primeiras componentes (a qual é uma aplicação suave), temos $\pi \circ \psi \circ f \circ \varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ uma aplicação suave em $\varphi^{-1}(p)$. Como p foi tomado arbitrário, concluímos que $f : L \longrightarrow N$ é suave. ■

Proposição 1.12. *Seja G um grupo de Lie e H uma subvariedade mergulhada de G a qual é um grupo com relação ao produto de G . Então H é também um grupo de Lie.*

Demonstração: Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f : H \times H &\longrightarrow G \\ (h_1, h_2) &\longmapsto h_1 \cdot h_2^{-1} \end{aligned}$$

a qual é suave pela definição de grupo, e além disso $f(H \times H) \subset H$. Como assumimos H subvariedade mergulhada de G , resulta do lema 1.11 que $f : H \times H \longrightarrow H$ é uma função suave, concluindo portanto que H possui estrutura de grupo de Lie. ■

Definimos a seguir o conceito de álgebra de Lie:

Definição 1.13 (Álgebra de Lie). Uma *Álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial (real) dotado de uma aplicação bilinear

$$[\ , \] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

chamada colchete de Lie, satisfazendo às propriedades:

- i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anti-comutatividade);
- ii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (equação de Jacobi);

Exemplo 1.14. Alguns exemplos de álgebras de Lie são:

- a) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, com $[A, B] = AB - BA$;
- b) $\mathbb{R}^3$ com o produto vetorial $[v, w] = v \times w$;

1.2 Colchete de Campos

Definimos recentemente álgebra de Lie, onde a aplicação colchete é essencial. Dada uma variedade, vamos agora pensar no módulo dos campos suaves em uma variedade e estabelecer uma aplicação do tipo colchete. Na verdade, mostraremos que esta aplicação é de fato um colchete de Lie, dando o primeiro exemplo prático desta operação. O conteúdo necessário para trabalharmos em campos em uma variedade será dado nesta seção.

Definição 1.15 (Campo em Variedade). Um *campo* X em uma variedade M é uma seção do fibrado tangente $TM := \cup_{p \in M} T_p M$ (cf. [dC2], pg. 15), ou seja, é uma aplicação

$$X : M \longrightarrow TM \quad \text{tal que} \quad \pi \circ X(p) = p$$

onde $\pi : TM \longrightarrow M$ é a projeção canônica.

Observação 1.16. Tomando um ponto $p \in M$ (m -dimensional) e considerando x uma parametrização local em p , podemos escrever:

$$X(p) = \sum_{i=1}^m a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.1)$$

sendo cada a_i uma função real e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1 \dots n}$ base de $T_p M$ associada a x .

O campo X será *suave* em p se para todo i , $a_i \circ x$ for suave em $x^{-1}(p)$. Vamos denotar o conjunto dos campos suaves em uma variedade M por $\Xi(M)$.

Definição 1.17 (Derivada Direcional). Seja $v \in T_p M$. Definimos a *derivada direcional* em $p \in M$ na direção de v de uma função $f \in C^\infty(M)$ por:

$$\begin{aligned} v \cdot f_p &:= df_p(v) \\ &= \left. \frac{d}{dt} (f \circ \alpha) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Observação 1.18. A definição acima nos dá outra interpretação de um campo: podemos pensá-lo como uma aplicação entre espaços de funções. De fato, dada uma função $f \in C^\infty(M)$, definimos $Xf(p) = X_p f$, ou seja, a derivada direcional de f na direção do campo. Por (1.1), temos que:

$$Xf(p) = \sum_{i=1}^m a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Expressando desse modo temos que X é suave se, e somente se, Xf é suave para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Como uma variedade suave é localmente difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, os teoremas locais de equações diferenciais ordinárias são naturalmente estendidos a variedades suaves. Por isso podemos admitir o seguinte resultado, o qual pode ser verificado em qualquer livro de equações diferenciais ordinárias:

Teorema 1.19. *Seja X um campo suave em uma variedade M e $p \in M$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p em M , um intervalo $(-\delta, \delta)$ com $\delta > 0$ e uma aplicação suave $\varphi : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ tal que a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$, $t \in (-\delta, \delta)$, $q \in \mathcal{U}$ é a única curva que satisfaz $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi(t, q))$ e $\varphi(0, q) = q$.*

Definição 1.20. A aplicação $\varphi_t : \mathcal{U} \rightarrow M$ sendo $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ dada pelo teorema 1.19 é chamada *fluxo local* de X .

Definição 1.21 (Colchete de Campos). Sejam X e Y campos em M . Definimos o campo $[X, Y]$ por:

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad (1.2)$$

Observação 1.22 (Expressão em coordenadas). Em uma variedade n -dimensional, considere $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Assim,

$$\begin{aligned} XY &= X \left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$YX = \sum_{i,j=1}^n b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= XY - YX \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^n b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

resultando:

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (1.3)$$

Observação 1.23. Em particular, quando M é aberto de $\mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)$, temos:

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= D_Y X - D_X Y \\
&= D_X Y - D_Y X
\end{aligned}$$

onde D é a derivada de aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.24. Vamos verificar que o colchete de campos é um colchete de lie:

1.

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= XY - YX \\
&= -(YX - XY) \\
&= -[Y, X]
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] &= [XY - YX, Z] + [YZ - ZY, X] + [ZX - XZ, Y] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Proposição 1.25 (cf. [CL], pg. 213).

$$[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \varphi_t^X \circ \varphi_s^Y = \varphi_s^Y \circ \varphi_t^X$$

1.3 Campos Invariantes à Esquerda

Dado um grupo de Lie G , considere a aplicação:

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto g \cdot a \end{aligned}$$

Diremos que um campo X é *invariante à esquerda* se

$$X_{g \cdot a} = dL_g X_a$$

De modo mais simples, denotamos apenas $X = dL_g X$, $\forall g \in G$.

Analogamente, considerando a função:

$$\begin{aligned} R_g : G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto a \cdot g \end{aligned}$$

vamos dizer que o campo X é *invariante à direita* se $X = dR_g X$. O campo será *bi-invariante* se for invariante à direita e à esquerda.

Lema 1.26. *Campos invariantes à esquerda (ou à direita) são suaves.*

Demonstração: Seja g pertencente a uma vizinhança da identidade e , e considere a função $L(g, h) = g \cdot h$. Temos assim $DL : TG \times TG \longrightarrow TG$ e, definindo

$$\begin{aligned} s : G &\longrightarrow TG \times TG \\ g &\longmapsto (g, X_e) \end{aligned}$$

segue que $\pi \circ DL \circ s(g) = g$ e $X(g) = DL \circ s(g)$. Isto prova que o campo é suave. ■

Dado um vetor $v \in T_e G$, podemos definir o campo invariante à esquerda X por $X_g = dL_g v_e$. Com isto temos um campo invariante à esquerda em G de maneira tal que $X_e = v$.

Proposição 1.27. *O conjunto dos campos invariantes à esquerda num grupo de Lie G tem estrutura de álgebra de Lie.*

Demonstração: Primeiro, mostremos que tem estrutura de espaço vetorial. A soma e a multiplicação por escalar são induzidas das operações usuais com funções, faltando verificar que os resultados destas operações ainda são invariantes à esquerda. Tomando dois campos invariantes à esquerda X e Y , temos que $X = dL_g X$ e $Y = dL_g Y$. Assim,

$$\begin{aligned} X + Y &= dL_g X + dL_g Y \\ &= dL_g (X + Y) \end{aligned}$$

Logo, a soma de campos invariantes à esquerda é invariante à esquerda. Agora, tome $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha X &= \alpha dL_g X \\ &= dL_g(\alpha X)\end{aligned}$$

ficando clara a estrutura de espaço vetorial. Já provamos na observação 1.24 que o colchete de campos é colchete de Lie, mas precisamos verificar que o colchete de campos invariantes à esquerda é ainda invariante à esquerda:

$$\begin{aligned}dL_g[X, Y]f &= dL_g(XY - YX)f \\ &= (dL_g X)Yf - (dL_g Y)Xf \\ &= XYf - YXf \\ &= [X, Y]f\end{aligned}$$

Concluimos que o conjunto dos campos invariantes à esquerda em um dado grupo de Lie é uma álgebra de Lie. ■

Definição 1.28. A álgebra de Lie dos campos invariantes à esquerda sobre um grupo de Lie G é chamada *álgebra de Lie do grupo de Lie*, e denotada por $\mathfrak{g}$.

Observação 1.29.

$$\mathfrak{g} \cong T_e G$$

Lembre-se que a cada vetor de $T_e G$, está associado um único campo invariante à esquerda. Do mesmo modo, dado um campo X , ele nos dá um único vetor X_e , evidenciando a biunivocidade entre $\mathfrak{g}$ e $T_e G$. Em $T_e G$, definimos

$$[X_e, Y_e] := [X, Y]$$

onde X e Y são os campos invariantes à esquerda construídos a partir de $X_e, Y_e \in T_e G$ (veja comentário no início desta seção). Isto dá a $T_e G$ uma estrutura de álgebra de Lie que, por construção, é isomorfa a $\mathfrak{g}$

Finalizamos esta seção apresentando o terceiro teorema fundamental de Lie, o qual será usado em diversas situações ao longo do texto. Omitimos sua demonstração por estar além dos nossos objetivos, mas pode ser conferida em [DK], pg. 32.

Teorema 1.30 (3º Teorema de Lie). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então, existe um único grupo de Lie simplesmente conexo G que tem álgebra de Lie G .*

1.4 Subgrupos e Homomorfismos de Lie

Nesta seção, estamos preocupados em estabelecer relações entre os subgrupos de Lie e as sub-álgebras de Lie. Sob que condições um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G possui uma álgebra de Lie que coincide com uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$? Será possível criar um homomorfismo de álgebras de Lie a partir de um homomorfismo de grupos de Lie? E a recíproca, será possível? Em que condições?

Estas perguntas norteiam esta seção, o que a torna repleta de resultados importantes da teoria dos grupos de Lie. Alguns conceitos necessários serão rapidamente introduzidos, como o de folheação, distribuição e recobrimento mas, para evitar o desvio de nosso objetivo principal, usaremos alguns resultados sempre dando indicações de onde podem ser encontrados.

Definição 1.31 (Homomorfismo de Grupos de Lie). Sejam G e H grupos de Lie. Uma aplicação $\varphi : G \longrightarrow H$ é *homomorfismo de grupos de Lie* se:

- a) φ é suave.
- b) $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$

Definição 1.32 (Homomorfismo de Álgebras de Lie). Dadas duas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, a aplicação $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é *homomorfismo de álgebras de Lie* se ψ é linear (no sentido de espaço vetorial) e, além disso, $\psi[X, Y] = [\psi X, \psi Y]$.

Em algumas demonstrações faremos uso do teorema de Frobenius, o qual enunciamos em duas versões. A seguir colocamos rapidamente os conceitos envolvidos, mas para um estudo mais cuidadoso recomendamos o apêndice dois de [CL] (vide pg. 215).

Definição 1.33 (Distribuição). Uma *distribuição* D de dimensão k em uma variedade M^m é uma escolha de k -subespaços vetoriais em TM , isto é,

$$D_p \subset T_p M, \quad \forall p \in M.$$

Diremos *distribuição suave* se, para cada $p \in M$, existir uma vizinhança $\mathcal{V}$ de p e campos suaves $X_1, \dots, X_k$ definidos em $\mathcal{V}$ satisfazendo, para todo $q \in \mathcal{V}$:

- a) $X_i(q) \in D_q, \forall i = 1, \dots, k$
- b) $\{X_i(q)\}_{1 \leq i \leq k}$ é base de D_q .

E, ainda, a distribuição será *involutiva* se satisfizer a seguinte condição:

“Sejam X, Y campos definidos em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p em M , tais que $X_q, Y_q \in D_q, \forall q \in \mathcal{U}$. Então $[X, Y]_q \in D_q, \forall q \in \mathcal{U}$ ”.

Teorema 1.34 (Frobenius). *Seja D uma k -distribuição suave involutiva em uma variedade M . Então:*

a) Dado $p \in M$, existe uma subvariedade L_p tal que

$$T_x L_p = D_x, \quad \forall x \in L_p$$

A subvariedade acima é chamada subvariedade integral

b) Se L^1 e L^2 são subvariedades integrais máximas e $T_p L^1 = T_p L^2$, então $L^1 = L^2$.

c) (quase mergulhada) Supondo K outra variedade e $\psi : K \longrightarrow L$ uma função tal que $i \circ \psi : K \longrightarrow M$ é suave, a função $\psi : K \longrightarrow L$ também é suave.

Definição 1.35 (Folheação). Uma folheação de dimensão k de uma variedade M^m é uma partição de M por uma família de subvariedades $\mathcal{F}$ (todas de dimensão k) de maneira que, para cada $p \in M$ e cada $v \in T_p F_p$ (sendo F_p a folha que contém p) existe um campo suave X definido numa vizinhança $\mathcal{U}$ de p em M satisfazendo:

a) $X_p = v$

b) $X_q \in T_q F_q, \quad \forall q \in \mathcal{U}$

Observação 1.36. Se $\mathcal{F} = \{F\}$ é uma folheação de dimensão k de uma variedade M^m , então para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p , uma vizinhança $\mathcal{W}$ de $0 \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ e um difeomorfismo

$$\psi : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{U}$$

tal que $\psi(\mathcal{W} \cap (\mathbb{R}^k \times \{y_0\})) = \mathcal{P}_{\psi(0, y_0)}$, onde $\mathcal{P}_{\psi(0, y_0)}$ é a componente conexa de $F_{\psi(0, y_0)} \cap \mathcal{U}$ que contém $\psi(0, y_0)$.

Teorema 1.37 (Frobenius Reformulado). *Seja D uma k -distribuição suave involutiva em uma variedade M . Então, existe uma única folheação $\mathcal{F} = \{F\}$ de dimensão k satisfazendo $D_q = T_q F_q, \quad \forall q \in M$.*

Definição 1.38 (Subgrupo de Lie). Seja G um grupo de Lie. Dizemos que $H \subset G$ é subgrupo de Lie de G se:

a) H é subgrupo algébrico de G .

b) H é subvariedade imersa de G .

c)

$$\begin{aligned} H \times H &\longrightarrow H \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b^{-1} \end{aligned}$$

é suave.

Definição 1.39 (Campos f -relacionados). Dada uma função suave entre variedades $f : M \longrightarrow N$, $X \in \Xi(M)$, $Y \in \Xi(N)$. Dizemos que X é f -relacionado a Y se

$$Y_{f(p)} = df_p X_p, \quad \forall p \in M$$

Observação 1.40. Outra maneira de trabalhar com campos f -relacionados é tomando uma função $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$ e, conforme a observação 1.18, fazer:

$$\begin{aligned} Y_{f(p)}(g) &= df_p X_p(g) \\ &= X_p(g \circ f) \end{aligned}$$

daí, X e Y são f -relacionados se, e somente se, para toda função $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$, ocorrer $(Yg) \circ f = X(g \circ f)$.

Proposição 1.41. *Sejam $X^1, X^2 \in \Xi(M)$ e $Y^1, Y^2 \in \Xi(N)$. Suponha X^i f -relacionado a Y^i , $i = 1, 2$. Então, $[X^1, X^2]$ é f -relacionado a $[Y^1, Y^2]$.*

Demonstração: Tome $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$. Segundo a observação 1.40, temos:

$$(Y^i g) \circ f = X^i(g \circ f), \quad i = 1, 2 \tag{1.4}$$

Usando a eq. 1.4, temos:

$$\begin{aligned} ([Y^1, Y^2]g) \circ f &= (Y^1(Y^2g)) \circ f - (Y^2(Y^1g)) \circ f \\ &= X^1((Y^2g) \circ f) - X^2((Y^1g) \circ f) \\ &= X^1(X^2(g \circ f)) - X^2(X^1(g \circ f)) \\ &= [X^1, X^2](g \circ f) \end{aligned}$$

■

Definição 1.42 (Subálgebra de Lie). Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um subespaço $\mathfrak{h}$ é uma *subálgebra de Lie* se é fechado com relação à operação colchete.

Lema 1.43. *Seja $H \subset G$ um subgrupo de Lie. Então $\mathfrak{h}$ é subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Sendo $a \in H$, considere a aplicação $L_a^H := L_a \Big|_H$. Temos assim que $i \circ L_a^H = L_a \circ i$, sendo $i : H \longrightarrow G$ a inclusão. Seja $X \in T_e H$, e defina os campos $X_a^H = dL_a^H X$, $\forall a \in H$ e $X_a = dL_a X$, $\forall a \in G$. Mostremos que X e X^H são i -relacionados:

$$\begin{aligned}
X_{i(a)} &= dL_{i(a)} diX \\
&= di dL_a^H X \\
&= di_a X^H
\end{aligned}$$

Como consequência da proposição 1.41, resulta que $[X, Y]_{i(e)} = di_e[X^H, Y^H] \in di(T_e H) \cong T_e H$. ■

Teorema 1.44. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja $\mathfrak{h}$ subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Então existe um único subgrupo de Lie conexo $H \subset G$ com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.*

Demonstração: Defina $D_q = \{X_q : X_q = dL_q X, \text{ com } X \in \mathfrak{h}\}$. Como $\mathfrak{h}$ é uma álgebra de Lie, então D_q é involutiva. Pelo teorema de Frobenius (teorema 1.37), existe uma única folheação $\mathcal{F}$ tal que $D_q = T_q F_q$, $\forall q$. Definindo $H = F_e$, temos que:

i) L_g leva folha em folha, pois:

$$\begin{aligned}
dL_g D_a &= dL_g T_a F_a \\
&= T_{g \cdot a} F_{g \cdot a} \\
&= D_{g \cdot a}
\end{aligned}$$

e portanto $dL_g D_a = D_{g \cdot a}$.

ii) Se $h \in H$, então $L_{h^{-1}}(H)$ é folha contendo e . Portanto $L_{h^{-1}}(H) = H$, resultando que H é grupo.

iii) Defina

$$\begin{aligned}
\psi : H \times H &\longrightarrow H \\
(a, b) &\longmapsto a^{-1} \cdot b
\end{aligned}$$

como i e $i \circ \psi$ são suaves, resulta do teorema de Frobenius (teo. 1.34) que ψ é suave. Assim, H é grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. ■

Proposição 1.45. *Sejam G e H grupos de Lie com respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$. Se $\varphi : G \longrightarrow H$ é homomorfismo de grupos de Lie, então $d\varphi_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demonstração: Tomando $a \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi \circ L_a^G(x) &= \varphi(a \cdot x) \\
&= \varphi(a) \cdot \varphi(x) \\
&= L_{\varphi(a)}^H \circ \varphi(x)
\end{aligned}$$

Disso, segue que:

$$d\varphi \circ dL_a^G = dL_{\varphi(a)}^H \circ d\varphi \quad (1.5)$$

Sendo $h \in H$ e $g \in G$, vamos definir os campos:

$$X_h^H = dL_h^H d\varphi_e X_e$$

$$X_g^G = dL_g^G X_e$$

Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
X_{\varphi(g)}^H &= dL_{\varphi(g)}^H d\varphi_e X_e \\
&= d\varphi \, dL_g^G X_e \\
&= d\varphi X_g^G
\end{aligned}$$

E portanto os campos X^H e X^G são φ -relacionados. Resulta da prop.1.41 que:

$$[X^H, Y^H]_e = d\varphi_e[X, Y] \subset d\varphi_e T_e G$$

De onde concluímos que $d\varphi_e$ é homomorfismo de álgebras de Lie. ■

Definição 1.46 (Recobrimento). Uma aplicação sobrejetora e contínua $\pi : E \longrightarrow B$ é chamada *recobrimento* se, para cada $p \in B$, existe vizinhança $\mathcal{U}$ de p tal que $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ é a união disjunta de abertos $\mathcal{U}_\alpha \subset E$ com $\pi \Big|_{\mathcal{U}_\alpha} : \mathcal{U}_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}$ homeomorfismo.

O seguinte teorema pode ser verificado em [B], pg. 98, ou então em [DK], pg. 67. As duas

demonstrações são bem distintas, sendo que a primeira envolve ações (conceito a ser trabalhado no próximo capítulo) e a segunda, homotopia.

Teorema 1.47. *Dado um grupo de Lie conexo G , existe um único grupo de Lie simplesmente conexo $\tilde{G}$ com homomorfismo de Lie $\pi : \tilde{G} \longrightarrow G$ que é também recobrimento.*

Proposição 1.48. *Sejam G, H grupos de Lie conexos e $\pi : G \longrightarrow H$ homomorfismo de Lie sobrejetor.*

$$\pi \text{ é recobrimento} \Leftrightarrow d\pi_e \text{ é isomorfismo.}$$

Demonstração:

($\Leftarrow$) Suponha $d\pi_e$ isomorfismo, $d\pi_e : T_e G \longrightarrow T_{e'} H$, onde e' denota o elemento neutro de H .

Do teorema da função inversa, existe vizinhança $\mathcal{U}$ de e e vizinhança $\mathcal{W}$ de e' tal que $\pi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}$ é difeomorfismo. Como π é sobrejetor, dado $p \in H$ é possível encontrar $q \in G$ tal que $\pi(q) = p$. Daí, $\pi : q \cdot \mathcal{U} \longrightarrow p \cdot \mathcal{W}$ é difeomorfismo, pois $\pi(q \cdot x) = \pi(q) \cdot \pi(x) = p \cdot \pi(x)$. Logo π é recobrimento.

($\Rightarrow$) Como π é recobrimento, existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de e tal que $\pi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ é homeomorfismo. Além disso, como por hipótese π é homomorfismo de Lie, segue conjuntamente com a proposição 1.45 que $d\pi_e$ é isomorfismo de álgebras de Lie. ■

Teorema 1.49. *Sejam G, H grupos de Lie e $\theta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ homomorfismo de álgebras de Lie. Então:*

1. *Existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de e e aplicação $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow H$ suave tal que*

(a) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para $a, b, ab \in \mathcal{U}$ (homomorfismo local).

(b) $d\varphi_e = \theta$.

2. *Se G for simplesmente conexo, então existe um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $d\varphi_e = \theta$.*

3. *Se G é conexo e existem dois homomorfismos $\varphi, \psi : G \longrightarrow H$ com $d\varphi_e = d\psi_e = \theta$ então $\varphi = \psi$.*

4. *Se G e H são conexos e simplesmente conexos e θ é um isomorfismo, então G e H são isomorfos.*

Demonstração:

1. Considere $\mathcal{K} = \{(x, \theta(x)) : x \in \mathfrak{g}\}$, o qual é subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Segue do teo.1.44 que existe um subgrupo de Lie conexo R de $G \times H$ com álgebra de Lie $\mathcal{K}$.

Considere a inclusão $i : R \longrightarrow G \times H$ e a projeção $\pi_1 : G \times H \longrightarrow G$. Então, $\pi_1 \circ i : R \longrightarrow G$ é suave e um homomorfismo de Lie tal que $d(\pi_1 \circ i)(x, \theta(x)) = x$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. Segue do Teorema da Função Inversa que existem vizinhanças $\mathcal{U}$ de e' em R e $\mathcal{V}$ de e em G tais que $\pi_1 \circ i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ é difeomorfismo. Vamos definir $\varphi = \pi_2 \circ (\pi_1 \circ i)^{-1} : \mathcal{V} \longrightarrow H$. Logo, φ é homomorfismo local e $d\varphi_e = \theta$, pois:

$$\begin{aligned}
d\varphi_e(X) &= d(\pi_2 \circ (\pi_1 \circ i)^{-1})_e(X) \\
&= d\pi_2 d((\pi_1 \circ i)^{-1})X \\
&= d\pi_2(X, \theta(X)) \\
&= \theta(X)
\end{aligned}$$

2. Conforme fizemos no item 1 desta prova, verificamos que $\pi_1 \circ i$ é homomorfismo sobrejetor e $d(\pi_1 \circ i)_e$ é isomorfismo. Segue da prop.1.48 que $\pi_1 \circ i : R \longrightarrow G$ é recobrimento. Supondo G simplesmente conexo, temos que $\pi_1 \circ i$ é homeomorfismo e $\varphi = \pi_2 \circ (\pi_1 \circ i)^{-1} : G \longrightarrow H$ é o homomorfismo procurado.
3. Tome $\tilde{K} = \{\tilde{\theta}, \psi(\tilde{\theta})\}$. R e $\tilde{R}$ são subgrupos de Lie conexos com a mesma álgebra de Lie. Logo $R = \tilde{R}$ e $\varphi = \psi$.
4. Do item (2) desta prova, temos que $\varphi : G \longrightarrow H$ é recobrimento. Como H é conexo, simplesmente conexo, segue que φ é isomorfismo.

■

Proposição 1.50. *Seja G um grupo de Lie e G^0 a componente conexa da identidade. Então:*

1. G^0 é um subgrupo de Lie de G normal.
2. As componentes conexas de G são da forma gG^0 , com $g \in G^0$.
3. Dado uma vizinhança $\mathcal{U}$ de e então $G^0 = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$ onde $\mathcal{U}^n = \{g_1^{\pm} \cdots g_n^{\pm} \mid g_i \in \mathcal{U}\}$

Demonstração: É verdade que G^0 é aberto e fechado. Mostremos que é um subgrupo de Lie.

Tome $g \in G^0$ arbitrário, e considere o conjunto $g \cdot G^0 = L_g(G^0)$. Como L_g é suave, $g \cdot G^0$ é conexa e $g \in g \cdot G^0$. Isto implica que $g \cdot G^0 \cap G^0 \neq \emptyset$ e portanto $g \cdot G^0 = G^0$. Da mesma forma, como a inversão é suave, o conjunto $G_{-1}^0 = \{g^{-1} : g \in G^0\}$ é conexo com $e \in G_{-1}^0$. Disso resulta $G_{-1}^0 = G^0$ e portanto G^0 é subgrupo de Lie de G .

Para ver que G^0 é normal, basta tomar a função suave $x \longmapsto g \cdot x \cdot g^{-1}$ e temos $g \cdot G^0 \cdot g^{-1} = G^0$, para todo $g \in G$, haja visto que $e \in g \cdot G^0 \cdot g^{-1}$.

Por fim, basta mostrar que $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$ é aberto e fechado em G^0 . Que é aberto não há dúvida, pois $\mathcal{U}$ é aberto e por consequência $\mathcal{U}^n$ é aberto, para todo n . Verifiquemos que o conjunto é fechado.

Seja p um ponto de acumulação de $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$ e $\mathcal{U}^{-1} = \{u^{-1} : u \in \mathcal{U}\}$. Então, em $p \cdot \mathcal{U}^{-1}$ existe um ponto $g \in \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$, digamos, $g = p \cdot u^{-1}$, com $u \in \mathcal{U}$. Logo, $p = g \cdot u \in \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$. Isto conclui a prova.

■

1.5 Aplicação Exponencial e Representação Adjunta

Definição 1.51. Um homomorfismo de Lie $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ é chamado *subgrupo a 1-parâmetro*.

Fixando $X \in \mathfrak{g}$, considere o homomorfismo de álgebras de Lie

$$\begin{aligned}\theta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \cdot X \\ t &\longmapsto t \cdot X\end{aligned}$$

Do teorema 1.49, existe um único subgrupo a 1-parâmetro $\lambda_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$ tal que $\lambda'_X(0) = X$. Com base nisso, definimos:

Definição 1.52. Em um grupo de Lie G , a aplicação *exponencial de Lie* é definida por:

$$\begin{aligned}\exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \lambda_X(1)\end{aligned}$$

Proposição 1.53. A aplicação exponencial de Lie satisfaz às seguintes propriedades:

- a) $\exp(tX) = \lambda_X(t)$
- b) $\exp(-tX) = \exp(tX)^{-1}$
- c) $\exp(t_1X + t_2X) = \exp(t_1X) \cdot \exp(t_2X)$
- d) $\exp : T_e G \longrightarrow G$ é suave e $d\exp_0 = I$

Demonstração: Para mostrar o item a), basta verificar que $\lambda_X(t) = \lambda_{tX}(1)$. De fato, considere o grupo a 1-parâmetro $\lambda(s) = \lambda_X(st)$. Assim,

$$\begin{aligned}\lambda'(0) &= \left. \frac{d}{dt} \lambda_X(st) \right|_{s=0} \\ &= \lambda'_X(t) \\ &= tX\end{aligned}$$

Portanto:

$$\lambda_X(st) = \lambda_{tX}(s)$$

e, tomando $s = 1$, segue que

$$\lambda_X(t) = \exp(tX) \tag{1.6}$$

Os itens b) e c) seguem diretamente do fato de $\exp(tX)$ ser um homomorfismo de Lie e, para verificar d), basta derivar a equação 1.6 em $t = 0$. ■

Corolário 1.54. *Existe uma vizinhança da identidade onde a exponencial de Lie é um difeomorfismo.*

Demonstração: Isto segue diretamente do item d) da proposição 1.53 acima e do teorema da função inversa. ■

Observação 1.55. Alguns fatos interessantes com relação à exponencial de Lie são:

1. Em um grupo de matrizes, a exponencial de Lie coincide com a exponencial de matrizes (cf. [S], pg. 10-21), ou seja,

$$\exp(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (1.7)$$

2. Em geral, $\exp(X + Y) \neq \exp(X) \cdot \exp(Y)$. (cf. [S], pg 10-55)

3. $\exp$ nem sempre é sobrejetora. (cf. [DK], pg. 22)

Proposição 1.56. *Seja $\varphi : G \longrightarrow H$ um homomorfismo entre os grupos de Lie G e H . Então $\varphi \circ \exp^G = \exp^H \circ d\varphi$.*

Demonstração: $\alpha(t) = \varphi \circ \exp^G(tX)$ e $\beta(t) = \exp^H \circ d\varphi(tX)$ são ambos subgrupo a 1-parâmetro com $\alpha'(0) = \beta'(0) = d\varphi_X$. Segue do teorema 1.49 que $\alpha = \beta$. ■

A seguir, enunciamos as fórmulas de Campbell. Omitimos sua demonstração, mas pode ser conferida em [S], pg. 10-28.

Teorema 1.57 (Fórmulas de Campbell). *Seja G um grupo de Lie e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para $|t| \leq \varepsilon$, temos:*

$$a) \exp(tX) \exp(tY) = \exp(t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3))$$

$$b) \exp(tX) \exp(tY) \exp(-tX) = \exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3))$$

$$c) \exp(-tX) \exp(-tY) \exp(tX) \exp(tY) = \exp(t^2[X, Y] + O(t^3))$$

onde $\frac{O(t^3)}{|t|^3}$ é limitado.

Definição 1.58 (Conjugação). Fixado um elemento g em um grupo de Lie G , definimos *conjugação por g* como a aplicação:

$$\begin{aligned} C_g : G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto gag^{-1} \end{aligned}$$

ou seja, $C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$.

Definição 1.59 (Adjunta). A *Representação Adjunta* de um grupo de Lie G é a função:

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto dC_g \end{aligned}$$

ou seja, $\text{Ad}(g) = dL_g \circ dR_{g^{-1}}$

Observação 1.60. Como consequência da definição, temos que:

$$\text{Ad}(g)X = \left. \frac{d}{dt}(g \exp(tX)g^{-1}) \right|_{t=0} \quad (1.8)$$

e, da proposição 1.56:

$$g \exp(X)g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)X) \quad (1.9)$$

Definição 1.61 (Adjunta pequena). Definimos a *adjunta pequena* de um grupo de Lie G como a aplicação:

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \text{End}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto d \text{Ad}_e X \end{aligned}$$

isto é,

$$\text{ad}(X)Y = \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp(tX))Y \right|_{t=0} \quad (1.10)$$

Observação 1.62. Usando novamente a proposição 1.56, temos:

$$\text{Ad}(\exp(X)) = \exp(\text{ad}(X))$$

Lema 1.63.

$$\text{ad}(X)Y = [X, Y]$$

Demonstração: Pelas fórmulas de Campbell (teorema 1.57), temos que:

$$\exp(tX) \exp(tY) \exp(-tX) = \exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3))$$

e, pela equação 1.9, resulta:

$$\exp(\text{Ad}(\exp(tX))tY) = \exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3))$$

Tomando t suficientemente pequeno, vale:

$$\text{Ad}(\exp(tX))Y = Y + t[X, Y] + O(t^2)$$

por fim, derivando, concluímos por meio da equação 1.10 que:

$$\operatorname{ad}(X)Y = [X, Y]$$

■

Proposição 1.64. *Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos que $[X, Y] = 0$ se, e somente se, $\exp(X)\exp(Y) = \exp(Y)\exp(X)$. Em particular, se o colchete de Lie for nulo para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$, o grupo G será abeliano.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Pela observação 1.62, temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad}(\exp(X))Y &= \exp(\operatorname{ad}(X))Y \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ad}(X)^k}{k!} Y \\ &= Y \end{aligned}$$

Pois $\operatorname{ad}(X)Y = [X, Y] = 0$ (lema 1.63). Usando a equação 1.9, resulta:

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(-X) = \exp(Y)$$

($\Leftarrow$) Supondo

$$\exp(sX)\exp(tY)\exp(-sX) = \exp(tY)$$

temos, da equação 1.9, que:

$$\exp(\operatorname{Ad}(\exp(sX))tY) = \exp(tY)$$

Derivando com relação a s em $s = 0$, resulta $[X, Y] = 0$. Por meio da proposição 1.50, segue o resultado para todo o grupo G .

■

1.6 Subgrupos Fechados

Teorema 1.65. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo algébrico fechado de G . Então, H é subgrupo de Lie mergulhado.*

Demonstração: Vamos, primeiramente, definir nosso candidato a $T_e H$:

$$\mathfrak{h} := \{X \in T_e G : \exp(tX) \in H, \forall t\}$$

Vamos demonstrar o teorema a partir de uma sequência de afirmações; a primeira delas vai garantir, em particular, que $\mathfrak{h} \neq \emptyset$

Afirmção 1.66. Seja (X_i) uma sequência em $T_e G$ com $X_i \rightarrow X$ e (t_i) sequência real com $t_i \rightarrow 0$. Se $\exp(t_i X_i) \in H, \forall i$, então $X \in \mathfrak{h}$.

Note primeiramente que as hipóteses da afirmação 1.66 são satisfeitas em nosso problema, haja visto que podemos supor H não-discreto, e então existe uma sequência (h_i) em H com $h_i \rightarrow e$. Com isto, podemos tomar $\tilde{X}_i$ tal que $\exp(\tilde{X}_i) = h_i$, e definir $t_i = \|\tilde{X}_i\|$, $X_i = \frac{\tilde{X}_i}{t_i}$. Como (X_i) é uma sequência na esfera unitária, admite subsequência convergente e portanto as hipóteses estão satisfeitas.

Vamos demonstrar a afirmação 1.66:

Prova: Supondo $t_i > 0$, definimos

$$R_i(t) := \left\lfloor \frac{t}{t_i} \right\rfloor$$

ou seja, a função que toma o maior inteiro menor ou igual a $\frac{t}{t_i}$. Como:

$$\frac{t}{t_i} - 1 < R_i(t) \leq \frac{t}{t_i} \Rightarrow t - t_i < t_i R_i(t) \leq t$$

concluimos que:

$$t_i R_i(t) \rightarrow t \Rightarrow t_i R_i(t) X_i \rightarrow tX$$

Da continuidade da exponencial, resulta:

$$\exp(t_i R_i(t) X_i) \rightarrow \exp(tX)$$

Por outro lado,

$$\exp(t_i R_i(t) X_i) = \exp(t_i X_i) \in H$$

Como H é fechado, $\exp(tX) \in H$ e então $X \in \mathfrak{h}$. ◇

Afirmção 1.67. $\mathfrak{h}$ é um espaço vetorial.

Prova: Sejam $X, Y \in \mathfrak{h}$, pelas fórmulas de Campbell (teorema 1.57):

$$\exp(t_i(X + Y) + \frac{t_i^2}{2}[X, Y] + O(t_i^3)) = \exp(t_i X) \exp(t_i Y) \in H$$

portanto,

$$\exp(t_i(X + Y + \frac{t_i}{2}[X, Y] + O(t_i^2))) \in H$$

e

$$X + Y + \frac{t_i}{2}[X, Y] + O(t_i^2) \longrightarrow X + Y$$

quando $t_i \longrightarrow 0$. Como consequência da afirmação 1.66, temos que $X + Y \in \mathfrak{h}$. $\diamond$

Afirmação 1.68. Seja $\mathfrak{h}'$ espaço vetorial tal que

$$T_e G = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$$

e

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}' &\longrightarrow G \\ (X, X') &\longmapsto \exp(X) \cdot \exp(X') \end{aligned}$$

Então, existe vizinhança de $(0, 0)$ tal que ψ é difeomorfismo restrito a tal vizinhança.

Prova: Para demonstrar a afirmação 1.68, vamos derivar ψ :

$$\begin{aligned} D_1 \psi_{(0,0)}(X, 0) &= d \exp_0 X \\ &= X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 \psi_{(0,0)}(0, X') &= d \exp_0 X' \\ &= X' \end{aligned}$$

Disso temos que $D\psi_0 = I$ e, pelo teorema da função inversa, ψ é difeomorfismo em uma vizinhança de $(0, 0)$. $\diamond$

Afirmação 1.69. Existe uma vizinhança $\mathcal{V}'$ de 0 em $\mathfrak{h}'$ tal que $\exp(X')$ não pertence a H , para $X' \in \mathcal{V}'$.

Prova: Suponha por absurdo que exista sequência $\tilde{X}_i \longrightarrow 0$ tal que $\tilde{X}_i \in \mathfrak{h}'$ e $\exp(\tilde{X}_i) \in H$. Defina $t_i = \|\tilde{X}_i\|$ e

$$X_i := \frac{\tilde{X}_i}{t_i}$$

Como X_i é uma sequência em um conjunto compacto, podemos tomar uma subsequência convergente (vamos denotar com o mesmo índice i) $X_i \rightarrow X$, $t_i \rightarrow 0$ e $\exp(t_i X_i) \in H$. Pela afirmação 1.66, $X \in \mathfrak{h}$, o que contraria $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}' = \{0\}$ $\diamond$

Afirmção 1.70. Existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de 0 em $T_e G$ tal que

$$H \cap \exp(\mathcal{U}) = \exp(\mathfrak{h} \cap \mathcal{U}) \quad (1.11)$$

Note que, sendo a equação 1.11 verdadeira, temos que H é uma variedade mergulhada em uma vizinhança de e . Como H é grupo, H é uma variedade mergulhada, e portanto H é um subgrupo mergulhado. Segue da proposição 1.12 que H é subgrupo de Lie mergulhado de G .

Basta então provar que a equação 1.11 é verdadeira:

Prova: Segue da construção de $\mathfrak{h}$ que

$$H \cap \exp(\mathcal{U}) \supset \exp(\mathfrak{h} \cap \mathcal{U})$$

Escolha $\mathcal{U}$ vizinhança de 0 em $T_e G$ de maneira que:

- a) $\exp \Big|_{\mathcal{U}}$ é difeomorfismo
- b) $\psi \Big|_{\mathcal{U}}$ é difeomorfismo (conforme a afirmação 1.68)
- c) $(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}') \subset \mathcal{V}'$, conforme a afirmação 1.69).

Seja $a \in H \cap \exp(\mathcal{U})$. Por b), existem únicos $X \in \mathfrak{h}$ e $X' \in \mathfrak{h}'$ com $a = \exp(X) \cdot \exp(X')$, e assim $\exp(X') = [\exp(X)]^{-1} \cdot a \in H$. Segue da afirmação 1.69 que $X' = 0$, ou seja, $a = \exp(X)$, com $X \in \mathfrak{h}$. Como a foi tomado arbitrário, segue a equação 1.11. $\diamond$

Corolário 1.71. *Sejam G, H grupos de Lie e $\varphi : G \rightarrow H$ um homomorfismo contínuo. Então, φ é suave.*

Demonstração: Considere o gráfico $K = \{(g, \varphi(g)) : g \in G\}$. K é um subgrupo algébrico fechado de $G \times H$, então por consequência do teorema 1.65, K é subgrupo de Lie mergulhado de $G \times H$. Tomando a inclusão $i : K \rightarrow G \times H$, e as projeções π_1, π_2 respectivamente na primeira e segunda componente, temos que $\pi_1 \circ i$ é aplicação de posto constante, pois $\pi_1 \circ i \circ L^K = L^G \circ \pi_1 \circ i$. O fato de K ser gráfico em conjunto com o teorema do posto garante que $\pi_1 \circ i$ é imersão.

Necessariamente, $\dim(K) = \dim(G)$, pois se não $\pi_1 \circ i(K)$ teria medida nula em G , contrariando $\pi_1 \circ i(K) = G$. Usando o teorema da função inversa, temos que $\pi_1 \circ i$ é difeomorfismo local e, como

$\pi_1 \circ i$ é bijeção, é um difeomorfismo global. Por fim, $\varphi = \pi_2 \circ (\pi_1 \circ i)^{-1}$, e portanto uma aplicação suave. ■

Observação 1.72. Se $\varphi : G \longrightarrow H$ é um homomorfismo de Lie, então $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(e)$ é subgrupo de Lie fechado.

Observação 1.73. Seja G um grupo de Lie conexo e

$$\mathcal{Z}(G) = \{g \in G : gb = bg, \quad \forall b \in G\}$$

Então, $\mathcal{Z}(G) = \ker(\text{Ad})$. De fato, se $g \in \mathcal{Z}(G)$ evidentemente $\text{Ad}(g) = I$. Tomemos $g \in \ker(\text{Ad})$, usando a equação 1.9 temos:

$$g \exp(tX) g^{-1} = \exp(tX)$$

E portanto g comuta com todos os elementos numa vizinhança de e onde $\exp$ está definida. O resultado segue da proposição 1.50.

1.7 Fatos de Geometria Riemanniana

A partir de agora, vamos envolver em nosso estudo alguns conceitos de geometria riemanniana. Mas, para não desviar o objetivo central deste capítulo, apenas faremos uma listagem das definições e resultados a serem utilizados. Para um estudo mais cuidadoso, recomendamos a leitura do segundo e terceiro capítulo de [dC2].

Definição 1.74. Seja M uma variedade riemanniana com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma *conexão riemanniana* (compatível com a métrica) é uma aplicação:

$$\nabla : \Xi(M) \times \Xi(M) \longrightarrow \Xi(M)$$

satisfazendo:

- a) $\nabla_{fX+Y}Z = f\nabla_XZ + \nabla_YZ$
- b) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$
- c) $\nabla_XfY = (Xf)Y + f\nabla_XY$
- d) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle + \langle Y, \nabla_XZ \rangle$
- e) $[X, Y] = \nabla_XY - \nabla_YX$

Observação 1.75 (Fórmula da Conexão).

$$2\langle \nabla_YX, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle + Y\langle Z, X \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle$$

Note que esta fórmula exhibe o candidato natural a conexão em uma variedade riemanniana e além disso mostra que esta está unicamente determinada pela métrica. (cf. [dC2], pg. 61)

Definição 1.76 (Derivada Covariante). Seja $\tilde{V}$ um campo em uma variedade M e $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva suave. Considere $V(t) = \tilde{V} \circ \alpha(t)$. Definimos a *derivada covariante* de V ao longo de α como:

$$\frac{\nabla}{dt}V := \nabla_{\alpha'(t)}\tilde{V}$$

Seja $V(t)$ um campo ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow M$.

$$\nabla_{\alpha'(t)}V := \nabla_{\alpha'(t)}\tilde{V}$$

onde $\tilde{V}$ é uma extensão de V na vizinhança de α .

Definição 1.77. Uma curva $\alpha : I \rightarrow M$ é geodésica se

$$\nabla_{\alpha'(t)}\alpha'(t) = 0$$

Proposição 1.78 (cf. [dC2], pg. 58). *Seja γ uma curva. Dado $v \in T_{\gamma(0)}M$, existe um único campo V ao longo de γ com $\nabla_{\gamma'(t)}V = 0$. V é chamado transporte paralelo de v .*

Proposição 1.79 (cf. [dC2], pg. 70). *Dado $p \in M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, dado $X \in \mathcal{B}_\varepsilon(0) \subset T_pM$, existe uma única curva $\alpha : [-1, 1] \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X$.*

Definição 1.80 (Exponencial Riemanniana).

$$\begin{aligned} \exp_p : \mathcal{B}_\varepsilon(0) &\rightarrow M \\ x &\mapsto \alpha_X(1) \end{aligned}$$

Observação 1.81. Se α é geodésica, então $\|\alpha'\|$ é constante.

Proposição 1.82 (cf. [dC2], pg. 73, 77). *Dado $p \in M$, existe $\mathcal{B}_\varepsilon(0) \subset T_pM$ tal que:*

- a) $\exp_p \Big|_{\mathcal{B}_\varepsilon(0)}$ é difeomorfismo, e $d\exp_p = I$
- b) $\alpha(t) = \exp_p(tX)$ minimiza a distância entre p e $\exp(X)$

Teorema 1.83 (cf. [dC2], pg. 80). *Seja $p \in M$. Então, existe $\varepsilon > 0$ e vizinhança $\mathcal{W}$ de p sendo que:*

- a) Para $x \in \mathcal{W}$, $\exp_x : \mathcal{B}_\varepsilon(0) \rightarrow M$ é difeomorfismo.
- b) $\exp_x(\mathcal{W}) \supset \mathcal{W}$, $\forall x \in \mathcal{W}$.
- c) Dado $X, Y \in \mathcal{W}$, a geodésica minimizante ligando X a Y está contida em $\mathcal{W}$.

A seguir, enunciamos o teorema de Hopf-Rinow, cuja demonstração pode ser vista em [dC2], pg. 162.

Teorema 1.84 (Hopf-Rinow). *Seja M uma variedade e $p \in M$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

1. $\exp_p : T_p M \longrightarrow M$, ou seja, a exponencial riemanniana em p está globalmente definida
2. Todo fechado e limitado em M é compacto
3. M é espaço métrico completo
4. A exponencial riemanniana $\exp_x : T_x M \longrightarrow M$ está definida em todo $x \in M$.

Uma variedade riemanniana é completa se atende a alguma das asserções acima (e portanto todas).

Definição 1.85. Em uma variedade riemanniana, definimos a *curvatura* por:

$$R(X, Y)Z := \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z$$

E *curvatura de Ricci* por:

$$Ric(X, Y) := \text{tr} R(X, \bullet)Y$$

A demonstração do teorema de Bonnet-Myers abaixo pode ser conferida em [dC2], pg. 221.

Teorema 1.86 (Bonnet-Myers). *Seja M uma variedade riemanniana completa. Suponha que $Ric(X, Y) \geq \frac{1}{\lambda} \langle X, Y \rangle$. Então*

- a) M é compacta
- b) $\text{diam}(M) \leq \pi \sqrt{\frac{n-1}{\lambda}}$, sendo n a dimensão de M
- c) $\pi_1(M)$ é finito
- d) O recobrimento $\widetilde{M}$ é compacto

1.8 Métricas Bi-invariantes

Definição 1.87 (Métrica Invariante à Esquerda). Seja G um grupo de Lie. Uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é *invariante à esquerda* se L_g é isometria, $\forall g \in G$. Isto quer dizer:

$$\langle (dL_g)_h U, (dL_g)_h V \rangle_{gh} = \langle U, V \rangle_h, \quad \forall g, h \in G, \quad \forall U, V \in T_h G$$

Analogamente, definimos métrica invariante à direita.

Dada uma métrica em $T_e G$, podemos construir uma métrica invariante à esquerda em G por:

$$\langle V, W \rangle_g := \langle dL_{g^{-1}} V, dL_{g^{-1}} W \rangle_e$$

onde g é qualquer elemento em G e V, W são vetores em $T_g G$.

Definição 1.88. Uma k -forma ω é *invariante à esquerda* se $L_g^* \omega = \omega$

Analogamente, definimos k -forma invariante à direita.

Dado um k -tensor alternado em $T_e G$, definimos uma k -forma invariante à esquerda como:

$$\omega_g(v_1, \dots, v_k) = \omega_e(dL_{g^{-1}}v_1, \dots, dL_{g^{-1}}v_k)$$

Definição 1.89. Uma métrica é *bi-invariante* se L_g e R_g são isometrias, $\forall g \in G$.

Proposição 1.90. *Seja G um grupo de Lie compacto. Então G admite métrica bi-invariante.*

Demonstração: Seja ω uma n -forma invariante à direita ($n = \dim G$) e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica invariante à direita. Defina:

$$\leq V, W \geq_x := \int_G \langle dL_g V, dL_g W \rangle_{gx} \omega \quad (1.12)$$

Mostremos que:

1. $\leq, \geq$ é invariante à esquerda.

$$\begin{aligned} \leq dL_h V, dL_h W \geq_{hx} &= \int_G \langle dL_g(dL_h V), dL_g(dL_h W) \rangle_{g(hx)} \omega \\ &= \int_G \langle dL_{gh} V, dL_{gh} W \rangle_{(gh)x} \omega \end{aligned}$$

Vamos fixar V, W, x e denotar:

$$f(g) = \langle dL_g V, dL_g W \rangle_{gx}$$

Assim, usando que $R_h^* \omega = \omega$ e aplicando mudança de variável, temos:

$$\begin{aligned} \int_G \langle dL_{gh} V, dL_{gh} W \rangle_{(gh)x} \omega &= \int_G f(gh) \omega \\ &= \int_G R_h^*(f \omega) \\ &= \int_G f \omega \\ &= \int_G \langle dL_g V, dL_g W \rangle_{gx} \omega \\ &= \leq V, W \geq_x \end{aligned}$$

2. $\leq, \geq$ é invariante à direita.

$$\begin{aligned}
 \leq dR_h V, dR_h W \geq_{xh} &= \int_G \langle dL_g(dR_h V), dL_g(dR_h W) \rangle_{g(xh)} \omega \\
 &= \int_G \langle dR_h dL_g V, dR_h dL_g W \rangle_{(gx)h} \omega \\
 &= \int_G \langle dL_g V, dL_g W \rangle_{gx} \omega \\
 &= \leq V, W \geq_x
 \end{aligned}$$

■

Teorema 1.91. *Seja G um grupo de Lie conexo com métrica bi-invariante. Para cada $a \in G$, defina*

$$\begin{aligned}
 I^a : G &\longrightarrow G \\
 g &\longmapsto ag^{-1}a
 \end{aligned}$$

Então:

- a) I^a é uma isometria que inverte geodésica, isto é, se α é geodésica com $\alpha(0) = a$, $I^a(\alpha(t)) = \alpha(-t)$.
- b) A geodésica α , com $\alpha(0) = e$ e $\alpha'(0) = X$ é o subgrupo a um parâmetro $\exp(tX)$.

Demonstração:

- a) Veja que $d_I^e = -I$, e portanto uma isometria, e $I^e(\alpha(t)) = \alpha(t)^{-1}$ sendo $\frac{d}{dt}I^e(\alpha(t)) = -\alpha'(t)$. Logo, I^e é uma isometria que inverte geodésica.

Agora, tomando $a \in G$ arbitrário, temos $I^a = R_a \circ I^e \circ L_{a^{-1}}$; é isometria por ser composta de isometria, e inverte geodésica, já que I^e inverte geodésica.

- b) Vamos provar por indução em n que $\alpha(nt) = \alpha(t)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

De fato, tomando $u, t \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) \cdot \alpha(u) \cdot \alpha(t) &= I^{\alpha(t)} \circ I^e(\alpha(u)) \\
 &= I^{\alpha(t)}(\alpha(-u))
 \end{aligned}$$

Fazendo $\tilde{\alpha}(u) = \alpha(u+t)$, continuamos:

$$\begin{aligned}
 I^{\alpha(t)}(\alpha(-u)) &= I^{\tilde{\alpha}(0)}\tilde{\alpha}(-u-t) \\
 &= \tilde{\alpha}(u+t) \\
 &= \alpha(u+2t)
 \end{aligned}$$

Agora, tomando $u = 0$, resulta:

$$\alpha(2t) = \alpha(t)^2$$

Supondo válido para n , segue:

$$\begin{aligned}\alpha(t)^{n+1} &= \alpha(t)^n \cdot \alpha(t) \\ &= \alpha(nt) \cdot \alpha(t) \\ &= \alpha(nt + t) \\ &= \alpha((n+1)t)\end{aligned}$$

E portanto a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $\alpha \Big|_{\mathbb{Q} \cap (-\varepsilon, \varepsilon)}$ é um homomorfismo.

Sejam $a, b \in \mathbb{Q} \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$, e tome um racional t de maneira que $a = nt$ e $b = mt$, com n, m números inteiros. Assim:

$$\begin{aligned}\alpha(a+b) &= \alpha((n+m)t) \\ &= \alpha(t)^{n+m} \\ &= \alpha(t)^n \cdot \alpha(t)^m \\ &= \alpha(nt) \cdot \alpha(mt) \\ &= \alpha(a) \cdot \alpha(b)\end{aligned}$$

Usando a continuidade de α , resulta que $\alpha \Big|_{(-\varepsilon, \varepsilon)}$ é homomorfismo local. Para verificar que α é um homomorfismo de Lie, basta notar que $\alpha \Big|_{(-\varepsilon, \varepsilon)}$ é segmento de geodésica contida no subgrupo $\exp(tX) = \beta(t)$, e portanto $L_{\alpha(\frac{\varepsilon}{2})}\alpha$ é um segmento de geodésica contido em β . Dado um certo $I \subset \mathbb{R}$, podemos repetir este processo de forma que α se estenda em I . ■

Corolário 1.92. *A exponencial de Lie em um grupo de Lie compacto é sobrejetora.*

Demonstração: Se G é compacto, então G admite métrica bi-invariante (proposição 1.90) e, para tal métrica, $\exp(X) = \exp_e(X)$ (teorema 1.91). Pelo teorema 1.84, G é variedade riemanniana completa, e portanto $\exp = \exp_e : T_e G \longrightarrow G$ é sobrejetor. ■

Proposição 1.93. *Sejam G grupo de Lie com métrica bi-invariante, X, Y, Z campos invariantes a esquerda. Então:*

- (a) $\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle$
- (b) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$
- (c) $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$
- (d) $\langle R(X, Y)X, Y \rangle = \frac{1}{4}\langle [X, Y], [X, Y] \rangle$.

Em particular, a curvatura seccional

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\sqrt{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}} \geq 0$$

Demonstração:

(a) Derivando a expressão:

$$\langle \text{Ad}(e^{tX})Y, \text{Ad}(e^{tX})Z \rangle = \langle Y, Z \rangle$$

temos que (vide equação 1.10 e lema 1.63):

$$\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle = 0$$

(b) Segue diretamente da fórmula da conexão (observação 1.75), com uso do item a) desta proposição.

(c)

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z \\ &= \frac{1}{2}[[X, Y], Z] - \frac{1}{2}\nabla_X[Y, Z] + \frac{1}{2}\nabla_Y[X, Z] \\ &= \frac{1}{2}[[X, Y], Z] - \frac{1}{4}[X, [Y, Z]] + \frac{1}{4}[Y, [X, Z]] \\ &= \frac{1}{4}[[X, Y], Z] + \left(\frac{1}{4}[[X, Y], Z] + \frac{1}{4}[[Z, X], Y] + \frac{1}{4}[[Y, Z], X] \right) \\ &= \frac{1}{4}[[X, Y], Z] \end{aligned}$$

devido à igualdade de Jacobi (definição 1.13).

(d)

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)X, Y \rangle &= \frac{1}{4}\langle [[X, Y], X], Y \rangle \\ &= -\frac{1}{4}\langle [X, [X, Y]], Y \rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle [X, Y], [X, Y] \rangle \end{aligned}$$

fazendo uso do item (a) dessa proposição.

■

1.9 Forma de Killing

Para completar o estudo de métricas bi-invariantes em grupos de Lie, introduzimos as formas de Killing por meio da qual estabeleceremos condições para a compacidade de um grupo de Lie.

Definição 1.94 (Forma de Killing). Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, onde G é grupo de Lie, a *forma de Killing* é definida por

$$B(X, Y) := \text{tr}(ad(X) \cdot ad(Y))$$

Observação 1.95. B é bilinear e simétrica

Definição 1.96. $\mathfrak{g}$ é *semi-simples* se B é não-degenerada.

Proposição 1.97.

$$B(X, Y) = B(Ad(g)X, Ad(g)Y)$$

Demonstração: Seja $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ um automorfismo de álgebras de Lie. Então:

$$\text{ad}(\varphi(X))\varphi(Y) = \varphi \text{ad}(X)Y$$

E, consequentemente

$$\text{ad}(\varphi(X)) = \varphi \text{ad}(X)\varphi^{-1}$$

Daí:

$$\begin{aligned} B(\varphi(X), \varphi(Y)) &= \text{tr} \text{ad}(\varphi(X))\varphi(Y) \\ &= \text{tr}(\varphi \text{ad}(X)\varphi^{-1}) \\ &= \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) \\ &= B(X, Y) \end{aligned}$$

Como $\text{Ad}(g)$ é um automorfismo de Lie, o resultado é válido. ■

Corolário 1.98. Suponha $\mathfrak{g}$ semi-simples e B negativo-definida. Então $-B$ é métrica bi-invariante.

Observação 1.99. Sendo G um grupo de Lie com métrica bi-invariante, então:

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= Ric(X, Y) := \text{tr} R(X, \bullet)Y \\ &= \text{tr} \frac{1}{4} [[X, \bullet], Y] \\ &= -\frac{1}{4} \text{tr} [[\bullet, X], Y] \\ &= -\frac{1}{4} \text{tr} [Y, [X, \bullet]] \\ &= -\frac{1}{4} B(Y, X) \\ &= -\frac{1}{4} B(X, Y) \end{aligned}$$

E portanto segue a fórmula

$$Ric(X, Y) = -\frac{1}{4}B(X, Y) \quad (1.13)$$

Em particular, a curvatura de Ricci independe da métrica bi-invariante.

Teorema 1.100. *Seja G um grupo de Lie conexo semi-simples. G é compacto se, e somente se, B é negativo-definida.*

Demonstração: $(\Leftarrow)$ Suponha B negativo-definida, então $-B$ é métrica bi-invariante. Assim, $(G, -B)$ é uma variedade Riemanniana completa (teorema 1.84), onde a equação 1.13 é satisfeita. Segue do teorema de Bonnet-Myers (teorema 1.86) que G é compacto.

$(\Rightarrow)$ Suponha G compacto. Pela proposição 1.90, G admite métrica bi-invariante e assim:

$$\begin{aligned} B(X, X) &= \text{tr ad}(X)\text{ad}(X) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \text{ad}(X)\text{ad}(X)e_i, e_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle \text{ad}(X)e_i, \text{ad}(X)e_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^n \|\text{ad}(X)e_i\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Na segunda passagem da conta acima, fizemos uso do item a) da proposição 1.93 e do lema 1.63

Como B é semi-simples, $B(X, X) < 0$ e portanto negativo-definida. ■

1.10 Decomposição em Ideais Simples

Finalizamos este capítulo com um resultado importante de decomposição, por meio do qual é possível enxergar um grupo de Lie como o produto de retas com grupos compactos. Sob algumas condições, conseguimos assim garantir a existência de uma única métrica bi-invariante, induzida da forma de Killing.

Definição 1.101 (Ideal). Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é chamada *ideal* se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, $\forall X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{g}$.

Quando os únicos ideais de $\mathfrak{h}$ forem $\{0\}$ e $\mathfrak{h}$, então o ideal será *simples*.

Teorema 1.102. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com métrica bi-invariante, isto é, $\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle$.*

(a) $\mathfrak{g}$ é igual à soma direta ortogonal $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ de ideais simples.

(b) Se $\tilde{G}$ é o grupo de Lie conexo e simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, então $\tilde{G}$ é isomorfo a um produto de subgrupos normais de Lie $G_1 \times \cdots \times G_n$ tais que:

(b1) $\mathfrak{g}_i$ é álgebra de Lie de G_i .

(b2) Se $\mathfrak{g}_i$ é comutativa, então $G_i = \mathbb{R}$. Se $\mathfrak{g}_i$ não é comutativa, então G_i é compacto.

Demonstração:

(a) Basta mostrar que se $\mathfrak{h}$ é um ideal, $\mathfrak{h}^\perp$ é também um ideal. Seja $X \in \mathfrak{h}^\perp, Y \in \mathfrak{g}$ e $Z \in \mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned}\langle [X, Y], Z \rangle &= -\langle [Y, X], Z \rangle \\ &= \langle X, [Y, Z] \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

e portanto $[X, Y] \in \mathfrak{h}^\perp$.

(b) Pelo 3º Teorema de Lie (teorema 1.30), dado $\mathfrak{g}_i$ existe um único subgrupo de Lie conexo, simplesmente conexo G_i com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_i$. Assim, $G_1 \times \dots \times G_n$ é grupo de Lie conexo, simplesmente conexo, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$. Pela unicidade dada pelo 3º teorema de Lie, $G_1 \times \dots \times G_n \cong \tilde{G}$ do enunciado.

Antes de provar que os subgrupos G_i são normais observamos que, sendo $\mathfrak{g}_i$ comutativo e simples, então $\mathfrak{g}_i \cong \mathbb{R}$. Daí, como G_i é conexo e simplesmente conexo, segue que $G_i \cong \mathbb{R}$.

No caso em que $\mathfrak{g}_i$ não é comutativo, observamos que não pode existir $X \in \mathfrak{g}_i, X \neq 0$ tal que $[X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}_i$, pois se existisse $\{X\}$ seria um ideal de $\mathfrak{g}_i$, o que contraria nossa hipótese. Usando o argumento da demonstração da proposição 1.100 ($\Rightarrow$), temos que a forma de Killing de $\mathfrak{g}_i$ é negativo-definida. Pela mesma proposição, concluimos que G_i é compacto.

Lema 1.103. $\mathfrak{g}_i$ ideal implica que G_i é subgrupo normal

Prova: Tomando $X \in \mathfrak{g}_i, Y \in \mathfrak{g}$, temos $[X, Y] \in \mathfrak{g}_i$. Usando a observação 1.62, temos que:

$$\begin{aligned}\text{Ad}(\exp(Y))X &= \exp(\text{ad}(Y))X \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{ad}(Y)^k}{k!} X \in \mathfrak{g}_i\end{aligned}$$

Por outro lado, pela equação 1.9

$$\exp(Y) \exp(X) \exp(Y)^{-1} = \exp(\text{Ad}(\exp(Y))X)$$

Isto implica

$$\exp(Y) \exp(X) \exp(Y)^{-1} \in G_i$$

Concluimos o resultado a partir da proposição 1.50

◇

■

Proposição 1.104. *Seja G um grupo de Lie compacto, com métrica bi-invariante, cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ seja simples. Então, a métrica bi-invariante é única, a menos de multiplicação por constante, e além disso:*

$$\text{Ric}(X, Y) = k \langle X, Y \rangle$$

Demonstração: Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica bi-invariante dada, e $(\cdot, \cdot)$ outra métrica bi-invariante. Então, existe uma matriz simétrica A positivo-definida tal que:

$$(X, Y) = \langle AX, Y \rangle$$

Afirmção 1.105.

$$A \text{ ad } (X) = \text{ad } (X) A$$

Prova:

$$\begin{aligned} \langle A \text{ ad } (X) Y, Z \rangle &= (\text{ad } (X) Y, Z) \\ &= -(Y, \text{ad } (X) Z) \\ &= -\langle AY, \text{ad } (X) Z \rangle \\ &= \langle \text{ad } (X) AY, Z \rangle \end{aligned}$$

◇

Afirmção 1.106. $\text{ad } (X)$ deixa os auto-espacos de A invariantes, isto é, os auto-espacos são ideais.

Prova: Seja V tal que $AV = \lambda V$. Então:

$$\begin{aligned} A \text{ ad } (X) V &= \text{ad } (X) AV \\ &= \lambda \text{ad } (X) V \end{aligned}$$

◇

Como $\mathfrak{g}$ é simples, segue da afirmação 1.106 que $A = \lambda I$ e portanto:

$$(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle$$

Além disso, como G é compacto, segue da proposição 1.100 e corolário 1.98 que $-B$ é métrica bi-invariante, e então existe uma constante k tal que $-B(X, Y) = 4k \langle X, Y \rangle$. Pela equação 1.13, resulta:

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= -\frac{1}{4}B(X, Y) \\ &= \frac{1}{4}4k \langle X, Y \rangle \\ &= k \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Ações Próprias

Se antes efetuamos o estudo cuidadoso dos grupos de Lie, agora queremos estudar a ação deste grupo em uma variedade. Neste capítulo definimos ações e ações próprias, e um estudo inicial de fibrados é realizado afim de mostrar que o espaço de órbitas de uma ação livre e própria é variedade e ainda que $\pi : M \longrightarrow M/G$ é fibrado principal.

A seguir definimos subvariedade slice e mostramos que tal subvariedade sempre existe se a ação for própria. Além disso, construímos uma vizinhança tubular de uma órbita regular por meio da subvariedade slice.

As ações isométricas são então introduzidas, visto que ações isométricas próprias desempenham um papel fundamental nesta dissertação. Demonstramos alguns teoremas pertinentes a ações isométricas próprias e em seguida definimos representação isotrópica e representação slice.

O importante Teorema da Órbita Principal (dentro os mais relevantes deste trabalho) é demonstrado e finalizamos o capítulo apresentando tipos de órbitas e uma forma de estratificar uma variedade M através das componentes conexas dos tipos de órbitas.

2.1 Definições e Resultados Iniciais

Aqui definimos ações de grupos de Lie em variedades (à esquerda e à direita) sempre exibindo exemplos para familiarizar o leitor com este conceito. Apresentamos também uma gama de resultados sobre ações e terminamos por definir ação própria, inclusive exibindo versões equivalentes para sua definição.

Definição 2.1 (Ação à Esquerda). Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. A aplicação suave

$$\mu : G \times M \longrightarrow M$$

é uma *ação à esquerda* de G em M se:

- a) $\mu(e, x) = x, \forall x \in M$
- b) $\mu(g_1, \mu(g_2, x)) = \mu(g_1 g_2, x), \forall g_1, g_2 \in G \text{ e } \forall x \in M.$

Por simplicidade, denotaremos $g \cdot x = \mu(g, x)$.

Exemplo 2.2. Alguns exemplos de ação à esquerda são listados abaixo:

1.

$$\begin{aligned} H \times G &\longrightarrow G \\ (h, g) &\longmapsto h \cdot g \end{aligned}$$

onde H um subgrupo de Lie de G .

2.

$$\begin{aligned} SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (A, v) &\longmapsto Av \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \cdot a^{-1} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} Ad : G \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (g, V) &\longmapsto Ad(g)V \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos definir ação à direita, como fazemos abaixo:

Definição 2.3 (Ação à Direita). Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. A aplicação suave

$$\mu : M \times G \longrightarrow M$$

é uma *ação à direita* de G em M se:

- a) $\mu(x, e) = x, \forall x \in M$
- b) $\mu(\mu(x, g_1), g_2) = \mu(x, g_1 g_2), \forall g_1, g_2 \in G \text{ e } \forall x \in M.$

Por simplicidade, denotaremos $x \cdot g = \mu(x, g)$.

Exemplo 2.4. Alguns exemplos de ação à direita:

- 1. Considerando novamente H subgrupo de Lie de G , temos a ação

$$\begin{aligned} G \times H &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g \cdot h \end{aligned}$$

- 2. Seja V um espaço vetorial n -dimensional e $B(V)$ o espaço dos referenciais de V , ou seja, dos isomorfismos lineares $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$. Uma ação à direita de $GL_n(\mathbb{R})$ em $B(V)$ é dada por

$$\begin{aligned} B(V) \times GL_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow B(V) \\ (Z, g) &\longmapsto Z \circ g \end{aligned}$$

Observação 2.5. Considere M uma variedade e $B(TM)$ seu fibrado de referenciais, isto é, $B(TM) = \cup_{p \in M} B(T_p M)$. Temos uma ação à direita dada por:

$$\begin{aligned} B(TM) \times GL_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow B(TM) \\ (Z, g) &\longmapsto Z \circ g \end{aligned}$$

Observação 2.6. Se $\mu : G \times M \longrightarrow M$ é ação à esquerda, então $\tilde{\mu} : M \times G \longrightarrow M$ definida por $\tilde{\mu}(x, g) = \mu(g^{-1}, x)$ é ação à direita. De fato, $\tilde{\mu}(x, e) = \mu(e, x) = x$ e

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(\tilde{\mu}(x, g_1), g_2) &= \mu(g_2^{-1}, \mu(g_1^{-1}, x)) \\ &= \mu(g_2^{-1}g_1^{-1}, x) \\ &= \mu((g_1g_2)^{-1}, x) \\ &= \tilde{\mu}(x, g_1g_2)\end{aligned}$$

Definição 2.7. Dada uma ação à esquerda $G \times M \longrightarrow M$, definimos:

1. *Grupo de Isotropia de $x \in M$* como

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

2. *Órbita de $x \in M$* como

$$G(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$$

Tal ação será chamada:

3. *Transitiva* se, dados $x, y \in M$, existir $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.
4. *Efetiva* se o fato de $g \cdot x = x$, para todo $x \in M$ implicar $g = e$. Em outros termos, se $\bigcap_{x \in M} G_x = \{e\}$.
5. *Livre*, se $G_x = \{e\}$, $\forall x \in M$.

Proposição 2.8. *Seja $G \times M \longrightarrow M$ ação à esquerda.*

- i) $G(x) \cap G(y) \neq \emptyset \Rightarrow G(x) = G(y)$
- ii) $G_{g \cdot x} = g \cdot G_x \cdot g^{-1}$

Demonstração:

- i) Suponha que exista $z \in G(x) \cap G(y)$. Então, $z = g_1 \cdot x = g_2 \cdot y$, sendo $g_1, g_2 \in G$. Portanto, $x = (g_1^{-1}g_2)y$, o que implica $x \in G(y)$. De modo análogo, mostramos que $y \in G(x)$, resultando a igualdade das órbitas.

- ii) Vamos mostrar as inclusões:

$$\bullet \quad g \cdot G_x \cdot g^{-1} \subset G_{g \cdot x}$$

Seja $h \in g \cdot G_x \cdot g^{-1}$. Então $h = glg^{-1}$, sendo $l \cdot x = x$, e podemos efetuar:

$$h \cdot (g \cdot x) = (glg^{-1})(g \cdot x) = g(l \cdot x) = g \cdot x$$

Logo, $h \in G_{g \cdot x}$

$$\bullet \quad G_{g \cdot x} \subset g \cdot G_x \cdot g^{-1}$$

Seja $h \in G_{g \cdot x}$, então $h(g \cdot x) = g \cdot x$. Tomando $l = g^{-1}hg$, temos

$$l \cdot x = (g^{-1}hg) \cdot x = g^{-1}h(g \cdot x) = g^{-1}g \cdot x = x$$

concluindo que $l \in G_x$. Como $h = glg^{-1}$, resulta que $h \in gG_xg$. ■

Lema 2.9. *Seja $(G, \cdot)$ um grupo de Lie. Definindo $\overline{G} := (G, *)$, com $g_1 * g_2 = g_2 \cdot g_1$, temos:*

i) $\overline{G}$ é um grupo de Lie e os campos invariantes à esquerda de $\overline{G}$ são os campos invariantes à direita de G .

ii) A aplicação

$$\begin{aligned} \text{inv} : G &\longrightarrow \overline{G} \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de Lie.

iii) $\overline{[\cdot, \cdot]} = -[\cdot, \cdot]$.

Demonstração:

i) $\overline{G}$ tem a mesma estrutura suave de G , e $g_1 * g_2 = g_2 \cdot g_1$ é suave, visto que $\cdot$ é suave. Além disso, $\overline{L}_g(x) = g * x = x \cdot g = R_g(x)$, $\forall x \in G$, e com isso temos $d\overline{L}_g = dR_g$, $\forall g \in G$. Tomando X um campo invariante à esquerda em $\overline{G}$, temos que $X = d\overline{L}_g X = dR_g X$, $\forall g \in G$ e portanto X é um campo invariante à direita em G . Da mesma forma concluímos que todos os campos invariantes à direita em G são campos invariantes à esquerda em $\overline{G}$.

ii) O fato da aplicação ser bijetora e suave segue imediatamente da hipótese de G ser grupo de Lie, visto que o elemento inverso por $*$ é o mesmo que por $\cdot$. Para verificar que é homomorfismo de Lie, tome $g_1, g_2 \in G$:

$$(g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} = g_1^{-1} * g_2^{-1}$$

iii) Da proposição 1.45, temos que $d \text{ inv}_e = -I$ é um isomorfismo de álgebras de Lie entre $T_e G$ e $T_e \overline{G}$. Logo, $-[X, Y] = d \text{ inv}_e[X, Y] = \overline{[d \text{ inv}_e X, d \text{ inv}_e Y]} = \overline{[-X, -Y]} = \overline{[X, Y]}$. ■

Proposição 2.10. *Considere $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação à esquerda.*

i) Dado $\xi \in T_e G$, definimos $\vec{\xi} \in \Xi(M)$ como

$$\vec{\xi}_p = \left. \frac{d}{dt} (\exp(t\xi) \cdot p) \right|_{t=0}$$

ii) O fluxo de $\vec{\xi}$ é $\varphi_t(p) := \exp(t\xi) \cdot p$.

iii) A aplicação

$$\begin{aligned} (T_e G, -[\ , \]) &\longrightarrow \Xi(M) \\ \xi &\longmapsto \vec{\xi} \end{aligned}$$

é homomorfismo de álgebra de Lie.

Demonstração:

i) Defina

$$\begin{aligned} s^\xi : M &\longrightarrow T_e G \times TM \\ p &\longmapsto (\xi, 0_p) \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} d\mu_{(e,p)} s^\xi(p) &= d\mu_{(e,p)}(\xi, 0_p) \\ &= d\mu_{(e,p)} \left(\left. \frac{d}{dt} (\exp(t\xi), p) \right|_{t=0} \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \mu(\exp(t\xi), p) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \exp(t\xi) \cdot p \right|_{t=0} \\ &= \vec{\xi}_p \end{aligned}$$

onde denotamos $\cdot = \mu(\ , \)$.

ii) Considere $\varphi_t(p) = \exp(t\xi) \cdot p$. Temos $\varphi_0(p) = e \cdot p = p$. Basta mostrar que:

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi_t(p) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{dt} \exp(t\xi) \cdot p \right|_{t=t_0}$$

Façamos a mudança $s = t - t_0$, obtendo

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \exp(t\xi) \cdot p \right|_{t=t_0} &= \left. \frac{d}{ds} \exp((s+t_0)\xi) \cdot p \right|_{s=0} \\
&= \left. \frac{d}{ds} (\exp(s\xi) \exp(t_0\xi)) \cdot p \right|_{s=0} \\
&= \left. \frac{d}{ds} \exp(s\xi) \cdot (\exp(t_0\xi) \cdot p) \right|_{s=0} \\
&= \left. \frac{d}{ds} \exp(s\xi) \cdot \varphi_{t_0}(p) \right|_{s=0} \\
&= \vec{\xi}_{\varphi_{t_0}(p)}
\end{aligned}$$

Portanto, φ_t é o fluxo de $\vec{\xi}$.

iii) Dado $\xi \in T_e G$, definimos o campo $X^\xi(g, p) = (dR_g \xi, 0_p)$. Mostremos que os campos $\vec{\xi}$ e $\vec{X}^\xi$ são μ relacionados.

$$\begin{aligned}
d\mu_{(g,p)} X^\xi(g, p) &= d\mu_{(g,p)}(dR_g \xi, 0_p) \\
&= d\mu_{(g,p)} \left. \frac{d}{dt} (\exp(t\xi)g, p) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \mu(\exp(t\xi)g, p) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} (\exp(t\xi)g) \cdot p \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \exp(t\xi)(g \cdot p) \right|_{t=0} \\
&= \vec{\xi}_{g \cdot p} \\
&= \vec{\xi}_{\mu(g,p)}
\end{aligned}$$

Resulta da proposição 1.41 que

$$[\vec{\xi}, \vec{\eta}]_{g \cdot p} = d\mu_{(g,p)}[X^\xi, X^\eta]_{(g,p)} \quad (2.1)$$

Usando a idéia sugerida pelo lema 2.9, podemos considerar $R(G)$ a álgebra dos campos invariantes à direita em G e definir:

$$\begin{aligned}
\theta : R(G) &\longrightarrow \Xi(G \times M) \\
dR_g V_e &\longmapsto (dR_g V_e, 0)
\end{aligned}$$

A equação 2.1 implica que

$$\begin{aligned}
d\mu \circ \theta : R(G) &\longrightarrow \Xi(M) \\
\xi &\longmapsto \vec{\xi}
\end{aligned}$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie. O resultado segue diretamente do isomorfismo provado no lema 2.9. ■

Observação 2.11. Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação à esquerda.

1. Podemos fixar $g \in G$ e definir:

$$\begin{aligned}\mu^g : M &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

2. Analogamente, fixando $x \in M$ obtemos:

$$\begin{aligned}\mu_x : G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

Proposição 2.12. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação à esquerda. Então, para cada $x \in M$ fixado, temos $\ker d(\mu_x)g_0 = T_{g_0}(g_0G_x)$.*

Demonstração: Vamos demonstrar as inclusões:

i) $T_{g_0}(g_0G_x) \subset \ker d(\mu_x)g_0$

Seja $v \in T_{g_0}(g_0G_x)$. Então, existe $w \in T_e(G_x)$ de maneira que $dL_{g_0}w = v$. Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned}v &= dL_{g_0}w \\ &= \left. \frac{d}{dt} L_{g_0}(\exp(tw)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} g_0 \cdot (\exp(tw)) \right|_{t=0}\end{aligned}$$

Aplicamos $d(\mu_x)_{g_0}$ a v :

$$\begin{aligned}(d\mu_x)_{g_0}v &= (d\mu_x)_{g_0} \left. \frac{d}{dt} g_0 \exp(tw) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \mu_x(g_0 \exp(tw)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (g_0 \exp(tw)) \cdot x \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} g_0 \cdot (\exp(tw) \cdot x) \right|_{t=0}\end{aligned}$$

Mas, como $w \in T_e(G_x)$, temos que $\exp(tw) \in G_x$ e portanto $\exp(tw) \cdot x = x$. Logo, a última expressão nos dá:

$$(d\mu_x)_{g_0}v = \frac{d}{dt}(g_0 \cdot x) \Big|_{t=0} = 0$$

Com isto provamos que $v \in \ker d(\mu_x)_{g_0}$

ii) $\ker d(\mu_x)_{g_0} \subset T_{g_0}(g_0G_x)$

Se $v \in \ker d(\mu_x)_{g_0} \subset T_{g_0}G$, então existe $w \in T_eG$ com $dL_{g_0}w = v$. Novamente, pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} v &= dL_{g_0}w \\ &= \frac{d}{dt}L_{g_0}(\exp(tw)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}g_0 \exp(tw) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Usando a hipótese,

$$\begin{aligned} d(\mu_x)_{g_0}v = 0 &\Rightarrow d(\mu_x)_{g_0} \frac{d}{dt}g_0 \exp(tw) \Big|_{t=0} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\mu_x(g_0 \exp(tw)) \Big|_{t=0} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\mu(g_0 \exp(tw), x) \Big|_{t=0} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\mu(g_0, \exp(tw) \cdot x) \Big|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

Note que g_0 está fixado, e com notação da observação 2.11 temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mu^{g_0}(\exp(tw) \cdot x) \Big|_{t=0} &= 0 \\ \Rightarrow d\mu^{g_0} \frac{d}{dt}(\exp(tw) \cdot x) \Big|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

Pelo item i) da proposição 2.10, $\frac{d}{dt}(\exp(tw) \cdot x) \Big|_{t=0} = \vec{w}_x$ campo em M , e nossos cálculos indicam $d\mu^{g_0}\vec{w}_x = 0$. Como $d\mu^{g_0}$ é invertível, resulta $\vec{w}_x = 0$. Usando o item ii) da proposição 2.10, temos o fluxo de $\vec{w}$ dado por $\varphi_t(x) = \exp(tw) \cdot x$, de onde concluimos por unicidade de EDO que $\exp(tw) \cdot x = x$ para todo t e portanto $\exp(tw)$ é curva em G_x . Lembre que $v = \frac{d}{dt}g_0 \exp(tw) \Big|_{t=0}$ e pelo último argumento $g_0 \exp(tw)$ é curva em g_0G_x , sendo possível concluir que $v \in T_{g_0}(g_0G_x)$.

■

Definição 2.13. Aplicações $\varphi : M \longrightarrow N$ são *próprias* se $\varphi^{-1}(K) \subset M$ for compacto, para todo

compacto $K \subset N$.

Definição 2.14 (Ações Próprias). A ação à esquerda $\mu : G \times M \longrightarrow M$ é *própria* se a aplicação

$$\begin{aligned} H : G \times M &\longrightarrow M \times M \\ (g, x) &\longmapsto (g \cdot x, x) \end{aligned}$$

for própria.

Proposição 2.15. *São equivalentes:*

- i) $G \times M \longrightarrow M$ é uma ação própria
- ii) Sejam $L, K \subset M$ compactos, então $\{g \in G : g \cdot K \cap L \neq \emptyset\}$ é compacto
- iii) Sejam (x_n) e $(g_n x_n)$ sequências em M tais que $x_n \longrightarrow x \in M$ e $g_n x_n \longrightarrow y \in M$. Então, (g_n) admite uma subsequência convergente em G .

Demonstração:

- $i) \Rightarrow ii)$. Seja $B = \{g \in G : g \cdot K \cap L \neq \emptyset\}$ e

$$\begin{aligned} H : G \times M &\longrightarrow M \times M \\ (g, x) &\longmapsto (g \cdot x, x) \end{aligned}$$

então, $W = H^{-1}(L, K) = \{(g, x) \in G \times M : g \cdot x \in L \text{ e } x \in K\}$ é compacto. Como a projeção $\pi_1 : G \times M \longrightarrow G$ é contínua, $\pi_1(W)$ é também compacto. Mostremos que $\pi_1(W) = B$:

$$\pi_1(W) \subset B, \text{ pois se } g \in \pi_1(W) \Rightarrow (g, x) \in W \Rightarrow (g \cdot x, x) \in L \times K \Rightarrow gK \cap L \neq \emptyset \Rightarrow g \in B$$

$$B \subset \pi_1(W), \text{ pois se } g \in B \Rightarrow gK \cap L \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in K : g \cdot x \in L \Rightarrow (g, x) \in W \Rightarrow g \in \pi_1(W)$$

- $ii) \Rightarrow i)$. Tomando $A \subset M \times M$ compacto, podemos encontrar L, K compactos em M de maneira que $A \subset L \times K$. Por $ii)$, $B = \{g \in G : g \cdot K \cap L \neq \emptyset\}$ é compacto e $H^{-1}(A) \subset H^{-1}(L, K) \subset (B, K)$. Visto que $H^{-1}(A)$ é fechado e está contido em um compacto, segue que $H^{-1}(A)$ é também compacto.
- $ii) \Rightarrow iii)$. Seja $K = \{x_n\} \cup \{x\}$ e $L = \{g_n \cdot x_n\} \cup \{y\}$. K e L são compactos e para todo n , $g_n \in B = \{g \in G : g \cdot K \cap L \neq \emptyset\}$. Como assumimos B compacto, (g_n) admite uma subsequência convergente.
- $iii) \Rightarrow ii)$. Tomando L e K compactos em M , vamos considerar $B = \{g \in G : g \cdot K \cap L \neq \emptyset\}$ e uma sequência (g_n) em B . Então, existe (x_n) em K tal que $(g_n \cdot x_n)$ é sequência em L . Como K e L são compactos, podemos supor (tomando uma subsequência se necessário) que $x_n \longrightarrow x \in K$ e $g_n \cdot x_n \longrightarrow y \in L$. De $iii)$, (g_n) admite uma subsequência convergente e portanto B é compacto. ■

Observação 2.16. Se a ação for própria, decorre imediatamente da definição que G_x é compacto, pois $H^{-1}(x, x) = \{(G_x, x)\}$

Exemplo 2.17. .

1. Se G é compacto, então $G \times M \longrightarrow M$ é própria.

2. Se $H \subset G$ um subgrupo de Lie fechado, então

$$\begin{aligned} G \times H &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

é própria.

2.2 Fibrados

Definição 2.18 (Fibrado Coordenado). Sejam E, F, B variedades suaves e G um grupo de Lie. Suponha que $G \times F \longrightarrow F$ seja uma ação à esquerda efetiva, e $\pi : E \longrightarrow B$ uma aplicação suave sobrejetora. Suponha ainda que B admite uma cobertura aberta $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ e existem difeomorfismos $\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ satisfazendo às propriedades abaixo:

a) $\pi \circ \psi_\alpha = \pi_1$, onde $\pi_1(b, f) = b$

b) Sejam $\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta$ abertos tais que $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$. Então, $\psi_\beta^{-1} \psi_\alpha(b, f) = (b, \theta_{\alpha\beta}(b)f)$, onde $\theta_{\alpha\beta}(b) \in G$ e $\theta_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \longrightarrow G$ é suave.

A 7-upla $(E, B, F, G, \pi, \mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)$ é o *fibrado coordenado*.

Observação 2.19. Na definição acima, os elementos que copõem um fibrado recebem algumas denominações especiais, sendo elas:

E: Espaço Total

B: Base

F: Fibra

G: Grupo Estrutural

π : Projção

ψ_α : Trivialização Local

$\theta_{\alpha\beta}$: Função de Transição

Definição 2.20. Dois fibrados coordenados $(E, B, F, G, \pi, \mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)$ e $(E, B, F, G, \pi, \mathcal{V}_\beta, \varphi_\beta)$ são *equivalentes* se $\varphi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha(b, f) = (b, \tilde{\theta}_{\beta\alpha}(b)f)$. Assim, a classe de equivalência é chamada simplesmente de *fibrado*.

Exemplo 2.21. Alguns exemplos de fibrados são:

1. Seja $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ o cilindro circular reto. Para ilustrar a definição de fibrado, basta tomar $E = C$, $B = S^1$, $F = \mathbb{R}$ e $G = \{I\}$. Geometricamente falando, as fibras são as retas verticais e a base o círculo formado pelo cilindro na intersecção com o plano xOy . $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ são as vizinhanças parametrizadas de S^1 , π leva cada reta vertical r em $r \cap S^1$ e $\theta_{\alpha\beta}(b) = 1$, $\forall b \in B$.
2. Considerando E a faixa de Möbius, $B = S^1$, $F = \mathbb{R}$ e $G = \{I, -I\} \cong \mathbb{Z}_2$, temos as vizinhanças $\mathcal{U}_\alpha = \{e^{i\theta} \in S^1 : -\pi - \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}\}$ e $\mathcal{U}_\beta = \{e^{i\theta} \in S^1 : -\frac{\pi}{3} < \theta < \pi + \frac{\pi}{3}\}$. Assim, $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ onde $\theta_{\beta\alpha}|_{\mathcal{W}_1} = I$ e $\theta_{\beta\alpha}|_{\mathcal{W}_2} = -I$.
3. (Fibrado Tangente)

Dada uma variedade M , podemos considerar $E = TM$, $F = \mathbb{R}^n$, $B = M$, sendo π a projeção canônica de TM em M . Daí,

$$\psi_\beta^{-1}\psi_\alpha(b, v) = (b, d(\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)_b v)$$

onde $\{\varphi_\alpha\}$ é atlas de M . Neste caso, temos $G = GL_n(\mathbb{R})$.

Definição 2.22 (Fibrado Vetorial e Fibrado Principal). .

- a) Um fibrado (E, B, F, G, π) é chamado *fibrado vetorial* se $F = \mathbb{R}^n$ e $G \subset GL_n(\mathbb{R})$.
- b) Um fibrado (E, B, F, G, π) é chamado um *fibrado principal* se $F = G$. Neste caso, denotamos apenas (E, B, G, π) .

Proposição 2.23. *Seja (E, B, G, π) um fibrado principal. Então, existe uma ação livre e própria à direita de G em E tal que $\{\pi^{-1}(x)\}_{x \in B}$ são órbitas.*

Demonstração: Sendo $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ a ação dada pela definição de fibrado, vamos definir uma ação à direita $* : E \times G \longrightarrow G$ por $x * g := \psi_\alpha(b, f \cdot g)$, onde $x = \psi_\alpha(b, f)$. Mostremos que nos pontos $b \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ a ação independe da trivialização.

Do item b) da definição 2.18, se $b \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ temos que $x = \psi_\alpha(b, f) = \psi_\beta(b, \theta_{\alpha\beta}(b) \cdot f)$. Daí,

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(b, f \cdot g) &= \psi_\beta(b, \theta_{\alpha\beta}(b) \cdot (f \cdot g)) \\ &= \psi_\beta(b, (\theta_{\alpha\beta}(b) \cdot f) \cdot g) \end{aligned}$$

Segue diretamente da definição de ação e de fibrado coordenado que a ação é livre e $\pi^{-1}(b)$ é órbita, para todo $b \in B$. Mostremos que a ação é própria:

se $(b_n, f_n) \longrightarrow (b, f)$ e $(b_n, f_n \cdot g_n) \longrightarrow (b, k)$, então $f_n \cdot g_n \longrightarrow k$ e, como $f_n \longrightarrow f$, temos que $g_n \longrightarrow f^{-1} \cdot k \in G$. Compendo por trivialização concluímos a prova. ■

Definição 2.24 (Espaço de Órbita). Dada uma ação à esquerda $\mu : G \times M \longrightarrow M$, considere a relação de equivalência

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : g \cdot x = y$$

Definimos o *espaço de órbita* de μ por:

$$M/G = \{[x] : x \in M\}$$

Observação 2.25. .

1. O espaço M/G pode ser dotado da topologia quociente, isto é, $\mathcal{U}$ é aberto em M/G se $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ é aberto em M .

2. $\pi : M \longrightarrow M/G$ é contínua e aberta.

π é contínua, pela definição de topologia quociente. Agora, tomando $\mathcal{U}$ aberto, temos que $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{U})) = \cup_{g \in G} g\mathcal{U}$, o qual é união de abertos.

3. $\pi : M \longrightarrow M/G$ não é fechada.

Como exemplo, podemos tomar $M = \mathbb{R}^2$ e $G = \{f_\alpha(x, y) = (x, y + \alpha)\}$. O conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ é fechado, porém $\pi(C) = \mathbb{R} - \{0\}$ não é fechado.

4. M/G pode ser não-Hausdorff. Como contra-exemplo, temos a ação irracional do toro.

Proposição 2.26. Se $G \times M \longrightarrow M$ for própria, então M/G será Hausdorff.

Demonstração: A prova se seguirá por meio das afirmações:

Afirmção 2.27. Um espaço topológico N é Hausdorff se, e somente se, $\Delta := \{(x, x) \in N \times N\}$ é fechado em $N \times N$

Afirmção 2.28. Como a ação é própria, o conjunto

$$C = \{(x, g \cdot x) \in M \times M : x \in M, g \in G\}$$

é fechado.

Prova: De fato, se $x_n \longrightarrow x$ e $g_n \cdot x_n \longrightarrow y$, então existe subsequência (usando o mesmo índice n) $g_n \longrightarrow g$ o que resulta em $g \cdot x = y$ (usamos aqui o fato de M ser Hausdorff). Assim temos que $(x, y) \in C$ e portanto C é fechado. $\diamond$

Afirmção 2.29.

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : M \times M &\longrightarrow \frac{M}{G} \times \frac{M}{G} \\ (x, y) &\longrightarrow (\pi(x), \pi(y)) \end{aligned}$$

é contínua, aberta e sobrejetora.

Prova: Isto segue diretamente dos itens 1) e 2) da observação 2.25. $\diamond$

Afirmção 2.30. $\tilde{\pi}(C) = \Delta$, diagonal de $\frac{M}{G} \times \frac{M}{G}$, e $\tilde{\pi}^{-1}(\Delta) = C$

Prova: Consequência direta da definição de C . $\diamond$

Como $\tilde{\pi}$ é aberta, $\tilde{\pi}(C^c)$ é aberto e, como $\tilde{\pi}$ é sobrejetora, resulta que Δ é fechado. O resultado segue então da afirmação 2.27 ■

Teorema 2.31. *Seja $\mu : M \times G \longrightarrow M$ uma ação à direita livre e própria. Então M/G admite uma estrutura de variedade tal que $(M, \pi, M/G, G)$ é fibrado principal, sendo $\pi : M \longrightarrow M/G$.*

Demonstração: Já sabemos pela proposição 2.26 que M/G é espaço de Hausdorff. Seja $x \in M$ e S_x uma subvariedade de M tal que

$$T_x M = T_x S_x \oplus d(\mu_x)_e \mathfrak{g}$$

Vamos provar por meio de lemas:

Lema 2.32. *Reduzindo S_x se necessário, temos que a restrição $\varphi := \mu \Big|_{S_x \times G}$ é um difeomorfismo.*

Prova: Pela proposição 2.12,

$$\ker d(\mu_x)g_0 = T_{g_0}(g_0 G_x)$$

Visto que a ação é livre ($G_x = \{e\}$, $\forall x \in M$), temos

$$\ker d(\mu_x)_e = \{0\}$$

e portanto $d(\mu_x)_e$ é injetora. Como $d\mu$ é contínua, podemos reduzir S_x se necessário, e obter:

$$d(\mu_y)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow T_y M \text{ injetora para todo } y \in S_x \quad (2.2)$$

$$T_y M = T_y S_x \oplus d(\mu_y)_e \mathfrak{g} \quad (2.3)$$

Por outro lado

$$\mu^e : S_x \longrightarrow M$$

tem por derivada $d\mu^e = I$, e então

$$\mu \Big|_{S_x \times \{e\}} : S_x \times \{e\} \longrightarrow M \text{ é imersão} \quad (2.4)$$

Das equações 2.2, 2.3 e 2.4 resulta que $d\mu_{(y,e)}$ é isomorfismo para todo $y \in S_x$.

Vamos provar agora que o mesmo ocorre nos demais pontos $g \in G$. Para isso, consideramos os caminhos suaves α em S_x e β em G com $\alpha(0) = y$ e $\beta(0) = e$.

$$\begin{aligned} d\mu_{(y,g)}(\alpha'(0), dR_g\beta'(0)) &= \left. \frac{d}{dt} \mu(\alpha(t), \beta(t) \cdot g) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \mu(\mu(\alpha(t), \beta(t)), g) \right|_{t=0} \\ &= d\mu_y^g d\mu_{(y,e)}(\alpha'(0), \beta'(0)) \end{aligned}$$

Como $d\mu_y^g$ é inversível, segue da igualdade acima que $d\mu_{(y,g)}$ é isomorfismo. Aplicando o teorema da função inversa, concluímos que $\varphi := \mu \Big|_{S_x \times G}$ é difeomorfismo local.

Vamos mostrar que φ é injetora para concluir que é um difeomorfismo global. Suponha por absurdo que não seja injetora, então podemos tomar duas sequências (x_n, g_n) e (y_n, h_n) em $S_x \times G$ com

$$x_n \longrightarrow x$$

$$y_n \longrightarrow x$$

de maneira que $x_n \cdot g_n = y_n \cdot h_n$ mas $(x_n, g_n) \neq (y_n, h_n)$.

Tomando

$$k_n = g_n h_n^{-1} \tag{2.5}$$

temos

$$x_n \cdot k_n = y_n$$

e daí

$$x_n \cdot k_n \longrightarrow x \tag{2.6}$$

Pela hipótese da ação ser própria, é possível encontrar uma subsequência convergente $k_n \longrightarrow k$ (mantemos o mesmo índice por simplicidade de notação). Assim, temos também

$$x_n \cdot k_n \longrightarrow x \cdot k \tag{2.7}$$

Das equações 2.6 e 2.7, resulta

$$x \cdot k = x$$

e portanto $k \in G_x = \{e\}$. Pela equação 2.5

$$g_n \cdot h_n^{-1} \longrightarrow e \tag{2.8}$$

A equação 2.8 juntamente com nossa suposição por absurdo contraria o fato de φ ser injetora na

vizinhança de (x, e) . Este argumento prova que φ é um difeomorfismo global.

◇

Lema 2.33. $\pi(S_x)$ é aberto em M/G .

Prova: De fato, $\pi^{-1}(\pi(S_x)) = (S_x)G = \{s \cdot g : s \in S_x, g \in G\}$, o qual é aberto. Segue do lema 2.32 que cada órbita em $(S_x)G$ intersecta S_x em um único ponto, e portanto $\pi \Big|_{S_x} : S_x \longrightarrow \pi(S_x)$ é homeomorfismo.

◇

Desejamos mostrar que:

- Para outra variedade S_y , temos

$$\left(\pi \Big|_{S_y} \right)^{-1} \circ \pi \Big|_{S_x} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V} \text{ é suave.}$$

(no lema 2.34, especificamos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$)

- $\psi_y^{-1} \circ \psi_x(b, g) = (b, \theta_{yx}(b)g)$, onde

$$\begin{aligned} \psi_x : \pi(S_x) \times G &\longrightarrow \pi^{-1}(S_x) \\ (b, g) &\longmapsto \left(\pi \Big|_{S_x} \right)^{-1} (b) \cdot g \end{aligned}$$

Mostraremos estes dois itens no próximo lema:

Lema 2.34. *Sendo $x, y \in M$ e S_x, S_y tomados como no início desta demonstração, suponha que*

$$\emptyset \neq \mathcal{W} = (S_x)G \cap (S_y)G$$

Então:

- i) *Existem abertos $\mathcal{U}$ em S_x e $\mathcal{V}$ em S_y tal que*

$$\mathcal{W} = \varphi(\mathcal{U}, G) = \varphi(\mathcal{V}, G)$$

- ii) *A aplicação $K : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ definida por $K(z) = (z)G \cap S_x$ é suave.*

Prova:

- i) Pelo lema 2.32, $\varphi^{-1}(\mathcal{W})$ é aberto em $S_x \times G$ e invariante pela ação de G . Portanto, é da forma $\mathcal{U} \times G$. Pelo mesmo argumento, é também da forma $\mathcal{V} \times G$.
- ii) Temos que $\varphi^{-1}(\mathcal{U}) = \{(z, \tilde{\theta}(z)) : z \in \mathcal{V}\}$. Logo $\tilde{\theta}$ é suave, e consequentemente $K(z) = z \cdot \tilde{\theta}(z)$ é suave e $K(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. Agora, basta definir

$$\theta(b) := \tilde{\theta}\left(\left(\pi \Big|_{\mathcal{V}}\right)^{-1}(b)\right)$$

◇

■

Corolário 2.35. *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo normal. Então, G/H admite estrutura suave que o torna um grupo de Lie. Mais ainda, $\pi : G \longrightarrow G/H$ é homomorfismo de Lie.*

Demonstração: Pelo exemplo 2.4.1, a ação $(g, h) \longrightarrow g \cdot h$ é livre e própria. Do teorema 2.31, G/H é variedade e $\pi : G \longrightarrow G/H$ é suave. Tomando

$$\alpha(a, b) = a \cdot b^{-1}$$

temos do fato de H ser subgrupo normal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \pi \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \frac{G}{H} \times \frac{G}{H} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \frac{G}{H} \end{array}$$

comuta e portanto

$$\tilde{\alpha}(aH, bH) = ab^{-1}H$$

A comutatividade do diagrama e o fato de π admitir seções suaves (isto é, existe $s : \mathcal{U} \subset G/H \longrightarrow G$ tal que $\pi \circ s(b) = b$) garantem que $\tilde{\alpha}$ é suave.

■

Proposição 2.36. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação e, fixando $x \in M$, considere μ_x conforme a observação 2.11. Então:*

- i) $\tilde{\mu}_x : G/G_x \rightarrow M$ tal que $\tilde{\mu}_x \circ \pi = \mu_x$ é imersão injetora.
- ii) Se a ação for própria, $\tilde{\mu}_x : G/G_x \rightarrow M$ é um mergulho. Em particular, $G(x)$ é variedade mergulhada.

Demonstração:

- i) Segue do teorema 2.31 que G/G_x é variedade. Visto que $g \cdot G_x = \pi^{-1}([g])$ e $\mu_x(g \cdot G_x) = g \cdot x$, concluímos que existe uma aplicação $\tilde{\mu}_x$ que faz com que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mu_x} & G(x) \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\mu}_x & \\ \frac{G}{G_x} & & \end{array}$$

comute, ou seja, $\mu_x = \tilde{\mu}_x \circ \pi$. Como $\pi : G \longrightarrow G_x$ admite seções locais, resulta que $\tilde{\mu}_x$ é suave.

Da proposição 2.12, $d\tilde{\mu}_x$ é injetora. Logo, $\tilde{\mu}_x : \frac{G}{G_x} \longrightarrow G(x)$ é bijeção, em particular sem auto-interseção.

- ii) Desejamos mostrar que existe vizinhança $\mathcal{W}$ de $g_0 \cdot x$ em M e vizinhança $\mathcal{U}$ de $g_0 \cdot G_x$ em $\frac{G}{G_x}$ tal que

$$\tilde{\mu}_x(\mathcal{U}) = \mathcal{W} \cap G(x)$$

Suponha que isto não seja verdade. Então, existe sequência $(g_n x)$ tal que

$$g_n \cdot x \longrightarrow g_0 \cdot x \tag{2.9}$$

e

$$\pi(g_n) \not\rightarrow \pi(g_0)$$

Visto que a ação é própria, existe uma subsequência (a qual usamos o mesmo índice) g_n convergente a $\tilde{g}$. Pela equação 2.9

$$\tilde{g} \cdot x = g_0 \cdot x$$

e portanto $\pi(\tilde{g}) = \pi(g_0)$, uma contradição. ■

Sabemos pelo teorema 1.47 que dado um grupo de Lie conexo G , existe um único grupo de Lie conexo e simplesmente conexo $\tilde{G}$ e uma aplicação recobrimento $\rho : \tilde{G} \longrightarrow G$.

Proposição 2.37. *Seja G um grupo de Lie conexo e considere $\rho : \tilde{G} \longrightarrow G$ dada acima. Então:*

- i) $H = \rho^{-1}(e)$ é um subgrupo de Lie fechado, normal e discreto. Além disso, $ghg^{-1} = h$, para todo $h \in H, g \in \tilde{G}$.

- ii) G é isomorfo a $\tilde{G}/H$

- iii) $\pi_1(G)$ é abeliano.

Demonstração:

- i) Como ρ é contínuo, evidentemente H é fechado e, sendo ρ um homomorfismo, podemos tomar $g \in \tilde{G}$ arbitrário e obter:

$$\begin{aligned}\rho(gHg^{-1}) &= \rho(g)\rho(H)\rho(g^{-1}) \\ &= \rho(g)e\rho(g^{-1}) \\ &= e\end{aligned}$$

Portanto H é normal. Que H é discreto segue diretamente da definição de recobrimento.

Fixando $h \in H$, considere a função

$$\begin{aligned}f : \tilde{G} &\longrightarrow H \\ g &\longmapsto ghg^{-1}\end{aligned}$$

Como $\{h\}$ é aberto e fechado em H e a função é contínua, segue que $f^{-1}(h)$ é aberto e fechado em $\tilde{G}$. Mas $\tilde{G}$ é conexo, e portanto

$$f^{-1}(h) = \tilde{G}$$

Logo, $ghg^{-1} = h$ para todo $g \in \tilde{G}$.

- ii) Visto que

$$\rho(ah) = \rho(a) \text{ para todo } a \in G, h \in H$$

temos

$$\rho \circ \pi^{-1}(aH) = \rho(a)$$

e portanto fica bem definida

$$\varphi := \rho \circ \pi^{-1} : \tilde{G}/H \longrightarrow G$$

Note que φ é homomorfismo contínuo, e por consequência um homomorfismo de Lie (vide corolário 1.71). Como φ é bijetora, é um isomorfismo.

Como $\pi : \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}/H$ é fibrado (teorema 2.31), segue que φ é suave e, dado que H é discreto, $d\pi$ e $d\rho$ são isomorfismos, resultando $d\varphi$ um isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, φ é um difeomorfismo local e, como é bijetor, é isomorfismo de Lie.

- iii) Sejam α_i caminhos em G com $\alpha_i(0) = e = \alpha_i(1)$, para $i = 1, 2$ e $\tilde{\alpha}_i$ levantamento de α_i (isto é, $\rho(\tilde{\alpha}_i) = \alpha_i$) com $\tilde{\alpha}_i(0) = \tilde{e}$.

Defina

$$h_i := \tilde{\alpha}_i(1)$$

Note que:

(1) $\beta = \tilde{\alpha}_2 \cdot h_1$ é o levantamento de α_2 que passa por h_1 , isto é, $\beta(0) = h_1$ e $\rho(\beta) = \alpha_2$.

(2) $\beta(1) = h_2 \cdot h_1$

(1) e (2) implicam que:

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha_2 * \alpha_1}(1) &= h_2 \cdot h_1 \\ &= h_1 \cdot h_2 \\ &= \widetilde{\alpha_1 * \alpha_2}(1) \end{aligned}$$

onde $*$ é concatenação.

Assim, $\widetilde{\alpha_2 * \alpha_1}$ e $\widetilde{\alpha_1 * \alpha_2}$ são curvas em $\tilde{G}$ com mesmos pontos finais e iniciais, e portanto são homotópicas por homotopia que fixa os extremos. Isto implica que $\alpha_2 * \alpha_1$ e $\alpha_1 * \alpha_2$ são homotópicas por homotopia que fixa e , ou seja:

$$\begin{aligned} [\alpha_2] * [\alpha_1] &= [\alpha_2 * \alpha_1] \\ &= [\alpha_1 * \alpha_2] \\ &= [\alpha_1] * [\alpha_2] \end{aligned}$$

Concluimos que $\pi_1(G)$ é abeliano. ■

2.3 Existência de Slice

Iniciamos esta seção definindo subvariedade slice em x , exibindo exemplos do que isso significa e terminamos por provar que se a ação for própria é sempre possível encontrar uma subvariedade desse tipo.

Definição 2.38 (Slice). Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação à esquerda e $x \in M$ fixado. Dizemos que uma subvariedade S_x contendo x é *slice* em x se:

a)

$$T_x M = T_x S_x \oplus T_x G(x)$$

e

$$T_y M = T_y S_x + T_y G(y)$$

para todo $y \in S_x$.

b) S_x é invariante pela ação de G , ou seja, se $y \in S_x$ e $g \in G_x$, então $g \cdot y \in S_x$

c) Se $y \in S_x$, $g \in G$ e $g \cdot y \in S_x$, então $g \in G_x$

Lema 2.39. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação e $x \in M$ fixado. Suponha a existência de uma subvariedade S tal que $T_x M = T_x G(x) \oplus T_x S$. Então:*

i) *Existe uma subvariedade $C \subset G$ contendo e tal que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x \oplus T_x C$$

ii) *Reduzindo S , se necessário, temos que $\varphi := \mu \Big|_{C \times S}$ é um difeomorfismo.*

Demonstração: Denotando $\mathfrak{g}_x := T_e(G_x)$, seja V tal que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x \oplus V$$

Considere $\mathcal{B}_\varepsilon(0) \subset V$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, e defina

$$C := \exp(\mathcal{B}_\varepsilon(0))$$

Pela proposição 2.12, $\ker(d\mu_x)_e = T_e G_x$, de onde concluímos que

(1) $d(\mu_x)_e \Big|_V$ é injetor

(2) $d(\mu_x)_e V = T_x G(x)$.

Por outro lado,

(3) $d\mu^e \Big|_{T_x S} = I$

(1), (2) e (3) acima implicam que $(d\varphi)_{(e,x)}$ é um isomorfismo, e o resultado segue do teorema da função inversa. ■

Lema 2.40. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria e G_x o grupo de isotropia de um elemento $x \in M$ fixado. Então, existe uma métrica riemanniana em M tal que G_x é subgrupo do grupo de isometrias de M . Em particular:*

i) $\exp_x : \mathcal{B}_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathcal{U}$ é difeomorfismo

ii) $d(\exp_x)_0 = I$

iii) $\mu^g(\exp_x(v)) = \exp_x(d\mu^g v)$ sendo $g \in G_x$.

Demonstração: Tomando uma métrica arbitrária $(\cdot, \cdot)$ em M , definimos:

$$\langle x, y \rangle_p = \int_{G_x} (d\mu^g x, d\mu^g y)_{g \cdot p} w$$

onde w é uma n -forma volume invariante à direita ($n = \dim G$). Daí:

$$\begin{aligned} \langle d\mu^h x, d\mu^h y \rangle_{h \cdot p} &= \int_{G_x} (d\mu^g d\mu^h x, d\mu^g d\mu^h y)_{g \cdot (h \cdot p)} w \\ &= \int_{G_x} (d\mu^{gh} x, d\mu^{gh} y)_{(gh) \cdot p} w \end{aligned}$$

fazendo $f(g) = (d\mu^g x, d\mu^g y)_{g \cdot p}$, continuamos:

$$\begin{aligned} \int_{G_x} f(gh)w &= \int_{G_x} R_h^*(fw) \\ &= \langle x, y \rangle_p \end{aligned}$$

O resultado segue das propriedades da exponencial riemanniana (proposição 1.82) e do fato de isometria levar geodésica em geodésica. ■

Teorema 2.41. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria. Fixando $x \in M$, existe slice em x .*

Demonstração: Vamos provar por afirmações, como segue:

Afirmção 2.42. $T_x G(x)$ é $d\mu^h$ -invariante se $h \in G_x$.

Prova:

$$\begin{aligned} \mu(h, \exp(t\xi) \cdot x) &= \mu(h, \exp(t\xi)h^{-1} \cdot x) \\ &= \mu(h \exp(t\xi)h^{-1}, x) \end{aligned}$$

Derivando em $t = 0$, temos

$$d\mu^h \vec{\xi}(x) = \overrightarrow{\text{Ad}(h)} \xi(x) \in T_x G(x)$$

◇

Da suposição de G_x ser um grupo de isometrias juntamente com a afirmação 2.42 resulta que para

$$v \in (T_x G(x))^\perp \quad \text{temos} \quad d\mu^h(v) \in (T_x G(x))^\perp$$

ou seja,

$$(T_x G(x))^\perp \text{ é também } d\mu^h \text{ invariante para } h \in G_x$$

Vamos definir

$$S_x = \exp(\mathcal{B}_\varepsilon(0))$$

com $\mathcal{B}_\varepsilon(0) \subset (T_x G(x))^\perp$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Do lema 2.40, item *iii*), resulta $\mu^h(S_x) \subset S_x$. Isto prova os itens a) e b) da definição de slice (definição 2.38).

Vamos provar o item c) da definição, supondo por absurdo que este não seja satisfeito.

Suponha por absurdo que existam sequências (x_n) em S_x e (g_n) em G tais que

$$x_n \longrightarrow x$$

e $(g_n \cdot x_n)$ é sequência em S_x com

$$g_n \cdot x_n \longrightarrow x, \text{ mas } g_n \notin G_x$$

Visto que a ação é própria, existe uma subsequência (a qual usamos o mesmo índice n) (g_n) tal que

$$g_n \longrightarrow g$$

Da continuidade da ação, $g \in G_x$. Vamos definir

$$\tilde{g}_n = g^{-1} g_n$$

daí

$$\tilde{g}_n \longrightarrow e, \tilde{g}_n \cdot x_n \in S_x \text{ e } \tilde{g}_n \notin G_x \quad (2.10)$$

Considere a variedade C definida no lema 2.39.

Afirmção 2.43. Existe vizinhança $\mathcal{W}$ de e em G tal que, dado $g \in \mathcal{W}$, existe $h \in G_x$ e um único $c \in C$, com $g = c \cdot h$.

Prova: Esta afirmação segue do fato de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x \oplus T_e C$ e do teorema da função inversa.

◇

Por meio da afirmação 2.43, temos que

$$\tilde{g}_n = c_n \cdot h_n \quad (2.11)$$

Do item b) da definição de slice (definição 2.38), resulta

$$h_n \cdot x_n \in S_x$$

Se $c_n \neq e$, sabemos pelo lema 2.39 que $c_n \cdot (h_n \cdot x_n) \notin S_x$, porém isto contraria o fato de $\tilde{g}_n \cdot x_n \in S_x$.

Se $c_n = e$, temos que $\tilde{g}_n = c_n \cdot h_n \in G_x$, o que também contraria $\tilde{g}_n \notin G_x$. ■

2.4 Fibrados Associados

Seja $\rho : P \longrightarrow B$ um fibrado principal com grupo estrutural H , F uma variedade de maneira que H age sobre F .

Sabemos que H age à direita de P por uma ação livre e própria (proposição 2.23). Vamos definir uma ação:

$$\begin{aligned} H \times (P \times F) &\longrightarrow (P \times F) \\ (h, (p, f)) &\longmapsto (p \cdot h^{-1}, h \cdot f) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Observação 2.44. A ação 2.12 dada acima é à esquerda livre e própria. Pelo teorema 2.31, o espaço de órbitas

$$P \times_H F := \{(p \cdot h^{-1}, h \cdot f) : h \in H, (p, f) \in P \times F\} \quad (2.13)$$

é uma variedade.

Definição 2.45. A variedade $P \times_H F$ definida na equação 2.13 acima é chamada *produto torcido* de P e F .

Proposição 2.46. *Seja*

$$\begin{aligned} \pi : P \times_H F &\longrightarrow B \\ [x, f] &\longmapsto \rho(x) \end{aligned}$$

Então, $(P \times_H F, B, \pi, F, H)$ é fibrado.

Definição 2.47. O fibrado dado pela proposição 2.46 acima é chamado *fibrado associado* ao fibrado principal $\rho : P \longrightarrow B$ com fibra F .

Demonstração: Seja S a variedade transversal a $(x)H$ e $\mathcal{U} := (S)H$ a vizinhança H -invariante construída na demonstração do teorema 2.31.

Defina

$$\begin{aligned} \psi : H \times (S \times F) &\longrightarrow \mathcal{U} \times F \\ (h, (x, f)) &\longmapsto (x \cdot h^{-1}, h \cdot f) \end{aligned} \quad (2.14)$$

observe que ψ é difeomorfismo

Lema 2.48. *Sejam M e N variedades. Suponha que H age livre e propriamente à esquerda em M e em N . Seja $\varphi : M \longrightarrow N$ um difeomorfismo H -invariante. Então, existe um único difeomorfismo $\tilde{\varphi} : M/H \longrightarrow N/H$ tal que $\tilde{\varphi} \circ \pi = \pi \circ \varphi$.*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \frac{M}{H} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \frac{N}{H} \end{array}$$

Segue do lema acima que existe um único difeomorfismo

$$\begin{aligned}\phi : S \times F &\longrightarrow \mathcal{U} \times_H F \\ (x, f) &\longmapsto [x, f]\end{aligned}$$

Por fim, para duas variedades transversais S_1 e S_2 defina:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_i : \pi(S_i) \times F &\longrightarrow \mathcal{U} \times_H F \\ (b, f) &\longmapsto [\pi_i^{-1}(b), f]\end{aligned}$$

onde $\pi_i := \pi \Big|_{S_i}$, com $i = 1, 2$. O resultado é consequência da afirmação 2.49 a seguir:

Afirmação 2.49.

$$\tilde{\phi}_2^{-1} \circ \tilde{\phi}_1 = (b, \theta(b) \cdot f)$$

onde $\theta : \mathcal{V} \subset S_2 \longrightarrow \mathcal{U} \subset S_1$ é definido como na demonstração do teorema 2.31.

Prova: De fato, se

$$[x_1, f_1] = [x_2, f_2]$$

concluimos que

$$(x_1 \cdot h^{-1}, h \cdot f_1) = (x_2, f_2)$$

para algum h . Assim:

$$f_2 = h \cdot f_1 \tag{2.15}$$

$$x_1 = x_2 \cdot h \tag{2.16}$$

$$x_1 = x_2 \cdot \theta(x_2) \tag{2.17}$$

Equações 2.16 e 2.17 e o fato da ação ser livre implica que

$$\theta(x_2) = h \tag{2.18}$$

Para obter o resultado, basta substituir a equação 2.18 na equação 2.15.

◇

■

2.5 Vizinhança Tubular

Proposição 2.50. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria e S_x slice em $x \in M$.*

a) *Então a ação*

$$\begin{aligned}\alpha : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto ab\end{aligned}$$

induz uma única ação

$$\tilde{\alpha} : G \times G/G_x \longrightarrow G/G_x$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha_g} & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \frac{G}{G_x} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_g} & \frac{G}{G_x} \end{array}$$

comuta.

b) Seja

$$\beta : G \times (G \times S_x) \longrightarrow (G \times S_x)$$

tal que

$$\beta(a, (g, y)) = (ag, y)$$

Então, existe um único

$$\tilde{\beta} : G \times (G \times_{G_x} S_x) \longrightarrow (G \times_{G_x} S_x)$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times S_x & \xrightarrow{\beta_g} & G \times S_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times_{G_x} S_x & \xrightarrow{\tilde{\beta}_g} & G \times_{G_x} S_x \end{array}$$

comuta.

c) O diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc}
G \times_{G_x} S_x & \xrightarrow{\tilde{\beta}_g} & G \times_{G_x} S_x \\
\downarrow & & \downarrow \\
G/G_x & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_g} & G/G_x
\end{array}$$

Teorema 2.51. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria e S_{x_0} um slice. Então:*

a) $G(S_{x_0})$ é vizinhança G -invariante da órbita $G(x_0)$.

b)

$$\begin{aligned}
\psi : G \times_{G_{x_0}} S_{x_0} &\longrightarrow G(S_{x_0}) \\
[g, x] &\longmapsto g \cdot x
\end{aligned}$$

é um difeomorfismo G -equivariante, isto é, $g \cdot \psi[a, x] = \psi[ga, x]$.

Demonstração: Seja

$$\begin{aligned}
\varphi : G \times S_{x_0} &\longrightarrow M \\
(g, x) &\longmapsto g \cdot x
\end{aligned}$$

Afirmção 2.52. $d\varphi_{(g,x)}$ é sobrejetora

Prova: De fato,

$$T_x M = d\mu_x(\mathfrak{g}) + T_x S_{x_0}$$

Efetuando

$$\begin{aligned}
\varphi(g_0 h, x) &= g_0 \cdot (h \cdot x) \\
&= g_0 \cdot \varphi(h, x) \\
&= \mu(g_0, \varphi(h, x))
\end{aligned}$$

resulta que

$$d\varphi_{(g_0, x)} = d\mu^{g_0} d\varphi_{(e, x)}$$

mas como $d\mu^{g_0}$ é inversível e $d\varphi_{(e, x)}$ é sobrejetor, podemos concluir a afirmação.

◇

A afirmação 2.52 implica que $G(S_{x_0})$ é aberto G -invariante.

Afirmção 2.53. $\varphi(g, x) = \varphi(h, y)$ se, e somente se, $h = gk^{-1}$ e $y = k \cdot x$, onde $k \in G_{x_0}$.

Prova:

$(\Leftarrow)$ é imediatamente verdadeira.

Vamos verificar $(\Rightarrow)$. Se

$$g \cdot x = h \cdot y$$

então

$$y = k \cdot x \quad (2.19)$$

onde

$$k = h^{-1}g \quad (2.20)$$

Usando que $y, x \in S_{x_0}$, onde S_{x_0} é slice juntamente com a equação 2.19 resulta que

$$k \in G_{x_0}$$

Por fim, concluímos pela equação 2.20 que:

$$h = gk^{-1}$$

◇

A afirmação 2.53 e o fato de

$$\pi : G \times S_{x_0} \longrightarrow G \times_{G_{x_0}} S_{x_0}$$

ser fibrado principal implicam na existência de uma única aplicação

$$\psi : G \times_{G_{x_0}} S_{x_0} \longrightarrow G(S_{x_0})$$

suave e bijetora tal que

$$\varphi = \psi \circ \pi$$

ou seja, que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times S_{x_0} & \xrightarrow{\varphi} & G(S_{x_0}) \\ \pi \downarrow & \nearrow \psi & \\ G \times_{G_{x_0}} S_{x_0} & & \end{array}$$

comuta.

Afirmação 2.54. ψ é difeomorfismo.

Prova: Visto que $d\varphi$ é sobrejetora e $\varphi = \psi \circ \pi$, concluímos que $d\psi$ é sobrejetora. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \dim G \times_{G_{x_0}} S_{x_0} &= \dim G/G_{x_0} + \dim S_{x_0} \\ &= \dim M \\ &= \dim S(G_{x_0}) \end{aligned}$$

Assim, $d\varphi$ é isomorfismo, e pelo teorema da função inversa ψ é difeomorfismo local. Como ψ é bijetora, é difeomorfismo global. $\diamond$

Corolário 2.55. *Seja ψ definido no teorema 2.51. Então*

$$\psi[g_0, S_{x_0}] = S_{g_0 \cdot x_0}$$

Em outras palavras

$$g_0 \cdot S_{x_0} = S_{g_0 \cdot x_0}$$

Demonstração: Seja

$$S := \psi[g_0, S_{x_0}]$$

Afirmção 2.56. S atende ao item a) da definição de slice (definição 2.38).

Prova:

$$\begin{aligned} S &= \psi[g_0, S_{x_0}] \\ &= g_0 \cdot \psi[e, S_{x_0}] \\ &= g_0 \cdot S_{x_0} \end{aligned}$$

Logo, S é também transversal às órbitas. $\diamond$

Para verificar o item b) da definição 2.38, devemos provar que

Afirmção 2.57.

$$G_{g_0 \cdot x}(S) \subset S$$

Prova: Se $h \in G_{g_0 \cdot x}$, segue da proposição 2.8 que

$$h = g_0 k g_0^{-1} \text{ com } k \in G_{x_0}$$

Seja $y \in S$:

$$\begin{aligned} h \cdot y &= h \cdot \psi[g_0, \tilde{y}] \\ &= \psi[h g_0, \tilde{y}] \\ &= \psi[g_0 k g_0^{-1} g_0, \tilde{y}] \\ &= \psi[g_0 k, \tilde{y}] \\ &= \psi[g_0, k^{-1} \cdot \tilde{y}] \in S \end{aligned}$$

$\diamond$

Afirmção 2.58. Satisfaz o item c) da definição 2.38.

Prova: Suponha

$$g \cdot \psi[g_0, x] = \psi[g_0, y]$$

Então

$$[gg_0, x] = [g_0, y]$$

e temos

$$g_0 = gg_0h^{-1}$$

$$y = h \cdot x$$

com $h \in G_x$. Assim

$$h = g_0^{-1}gg_0$$

implicando

$$g = g_0hg_0^{-1} \in G_{g_0 \cdot x}$$

◇

■

Observação 2.59. Existe uma única retração G -invariante

$$r : G(S_{x_0}) \longrightarrow G(x_0)$$

tal que

$$r \circ \psi = \mu_{x_0} \circ \pi$$

ou seja, de maneira que o diagrama abaixo comute.

$$\begin{array}{ccc} G \times_{G_{x_0}} S_{x_0} & \xrightarrow{\psi} & G(S_{x_0}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow r \\ \frac{G}{G_{x_0}} & \xrightarrow{\tilde{\mu}_{x_0}} & G(x_0) \end{array}$$

2.6 Ações Isométricas

As ações isométricas desempenham um papel essencial em nosso estudo, até porque o resultado final que apresentamos no capítulo 3 supõe ações isométricas próprias. Mostraremos teoremas importantes com relação a ações isométricas próprias e estabeleceremos uma topologia em $Iso(M)$ (a saber, o conjunto das isometrias na variedade M) de maneira que este seja um grupo de Lie.

Definição 2.60 (Ação Isométrica). Uma ação riemanniana $\mu : G \times M \longrightarrow M$ é *isométrica* se μ^g é isometria para todo $g \in G$.

Definição 2.61. Sejam M, N espaços métricos e (f_n) uma sequência de funções em $\mathcal{C}^0(M, N)$. Dizemos que f_n converge na topologia da convergência compacta para $f \in \mathcal{C}^0(M, N)$ se f_n converge uniformemente em cada compacto para f , ou seja

$$f_n \Big|_K \xrightarrow{u} f \Big|_K$$

em cada compacto $K \subset M$.

Observação 2.62. .

1. Denotamos a convergência na topologia da convergência compacta por:

$$f_n \xrightarrow{u_c} f$$

2. No caso de espaços métricos, tal topologia coincide com a topologia compacta aberta.

Teorema 2.63. *Seja M uma variedade riemanniana conexa. Então, o grupo de isometrias de M , denotado por $\text{Iso}(M)$, é grupo de Lie com a topologia da convergência compacta.*

Proposição 2.64. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação à esquerda.*

- a) *Se $g_n \longrightarrow g$, então $\mu^{g_n} \xrightarrow{u_c} \mu^g$*
- b) *Se a ação é própria e $\mu^{g_n} \xrightarrow{pt} \mu^g$ (converge pontualmente), então $g_n \longrightarrow g$*

Demonstração:

- a) Por definição, $\mu^{g_n} \xrightarrow{u_c} \mu^g$ se, dado um compacto K e $\varepsilon > 0$, existir $N_{K,\varepsilon}$ tal que

$$d(g_n(x), g(x)) < \varepsilon$$

para todo $n > N$ e $x \in K$.

Vamos supor que isto não seja verdade. Então, existe um compacto K e $\varepsilon > 0$ de maneira que para todo $n \in \mathbb{N}$, é possível encontrar $m > n$ e $x_m \in K$ com

$$d(\mu^{g_m}(x_m), \mu^g(x_m)) > \varepsilon \quad (2.21)$$

Como K é compacto, podemos passar para uma subsequência convergente (x_{m_i}) sendo $x_{m_i} \longrightarrow x$. Tomando os índices m_i , temos $g_{m_i} \longrightarrow g$ e $x_{m_i} \longrightarrow x$, resultando

$$g_{m_i} \cdot x_{m_i} \longrightarrow g \cdot x \quad (2.22)$$

Por outro lado,

$$g \cdot x_{m_i} \longrightarrow g \cdot x \quad (2.23)$$

Das equações 2.22 e 2.23, temos que

$$d(g_{m_i} \cdot x_{m_i}, g \cdot x_{m_i}) \longrightarrow 0$$

contrariando a equação 2.21.

b)

Afirmção 2.65. Suponha que $\mu^{k_n} \xrightarrow{pt} \mu^k$. Então existe uma subsequência (k_{n_i}) tal que $k_{n_i} \longrightarrow k$.

Prova: Para cada x ,

$$\mu^{k_n} \cdot x \longrightarrow \mu^k \cdot x$$

Como a ação é própria, existe uma subsequência $k_{n_i} \longrightarrow t \in G$. Mas

$$\mu^{k_{n_i}} \xrightarrow{pt} \mu^t \quad (2.24)$$

$$\mu^{k_{n_i}} \xrightarrow{pt} \mu^k \quad (2.25)$$

Das equações 2.24 e 2.25, resulta que $\mu^k(x) = \mu^t(x)$, para todo $x \in M$, e portanto $k = t$.

◇

Agora, suponha por absurdo que g_n não convirja para g . Então, existe uma subsequência (g_{n_i}) tal que

$$d(g_{n_i}, g) > \varepsilon \quad (2.26)$$

Como $\mu^{g_{n_i}} \xrightarrow{pt} \mu^g$, conseguimos por meio da afirmação 2.65 uma subsequência

$$g_{n_{ij}} \longrightarrow g$$

o que contraria a equação 2.26.

■

Lema 2.66 (Partição da Unidade G -invariante). *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria e $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ uma cobertura de abertos localmente finita G -invariante. Então, existe uma partição da unidade G -invariante $\{f_\alpha\}$, estritamente subordinada a $\{\mathcal{U}_\alpha\}$. Em outras palavras, existe $\{f_\alpha\}$ sendo:*

$$a) f_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha \geq 0$$

$$b) \overline{\text{supp}(f_\alpha)} \subset \mathcal{U}_\alpha$$

$$c) \sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$$

$$d) f_\alpha(g \cdot x) = f_\alpha(x)$$

Teorema 2.67. *Dada uma ação própria $\mu : G \times M \longrightarrow M$, existe uma métrica em M de maneira que μ^G é subgrupo fechado de $\text{Iso}(M)$.*

Demonstração: Vamos tomar abertos G -invariantes $\mathcal{U}_\alpha := G(S_{x_\alpha})$ e considerar $\{f_\alpha\}$ a partição da unidade G -invariante associada a $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ (vide lema 2.66).

Afirmção 2.68. A estrutura definida em $TM \Big|_{S_{x_\alpha}}$ por

$$\langle x, y \rangle_p = \int_{G_{x_\alpha}} (d\mu^g x, d\mu^g y)_{g \cdot p} w$$

onde w é uma forma invariante à direita e $(\ , \)$ é métrica qualquer, é G_{x_α} -invariante.

Prova: Usamos aqui o mesmo raciocínio aplicado na demonstração do lema 2.40. ◇

Vamos definir uma métrica em $\mathcal{U}_\alpha$ por:

$$\langle d\mu^g x, d\mu^g y \rangle_{g \cdot s} := \langle x, y \rangle \tag{2.27}$$

onde $s \in S_{x_\alpha}$

Como $\langle \ , \ \rangle$ é G_{x_α} -invariante e $G_s \subset G_{x_\alpha}$ para $s \in S_{x_\alpha}$, o produto definido na equação 2.27 acima está bem definido.

Por fim, basta definir

$$\langle \ , \ \rangle := \sum_\alpha f_\alpha \langle \ , \ \rangle$$

μ^G se torna então um grupo de isometrias. Falta provar que é fechado em $\text{Iso}(M)$.

Suponha que

$$\mu^{g_n} \xrightarrow{u_c} f \in \text{Iso}(M) \tag{2.28}$$

Então

$$g_n \cdot x \longrightarrow f \cdot x$$

como a ação é própria, existe subsequência (g_{n_i}) tal que

$$g_{n_i} \longrightarrow g$$

Do item a) da proposição 2.64

$$\mu^{g_{n_i}} \xrightarrow{u_c} \mu^g \quad (2.29)$$

Das equações 2.28 e 2.29 concluímos que

$$g = f$$

■

Teorema 2.69 (Ascoli-Arzelá). *Sejam X, Y espaços métricos compactos e $\mathcal{C}^0(X, Y)$ dotado da métrica*

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

Seja $\mathcal{F}$ uma família em $\mathcal{C}^0(X, Y)$. Então, $\mathcal{F}$ é relativamente compacta se a família $\mathcal{F}$ é equicontínua, isto é, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, tomando $x, \tilde{x} \in X$ com $d(x, \tilde{x}) < \delta$, então $d(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

Para uma demonstração do teorema de Ascoli-Arzelá, consultar [L1], pg. 244.

Teorema 2.70. *Seja $G \subset \text{Iso}(M)$ um subgrupo fechado e M uma variedade riemanniana conexa. A ação*

$$\begin{aligned} \mu : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

é própria.

Demonstração: Vamos primeiro considerar o caso em que M é completa.

Sejam

$$g_n \cdot x_n \longrightarrow y$$

$$x_n \longrightarrow x$$

e n_0 tal que, para $n > n_0$

$$d(y, g_n \cdot x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Fixe $r_1 > 0$ e tome a bola fechada $K := \bar{\mathcal{B}}_{r_1}(x)$.

Afirmção 2.71.

$$d(g_n \cdot K, y) \leq \varepsilon + r_1$$

Prova: De fato, tomando $z \in K$:

$$\begin{aligned} d(g_n \cdot z, y) &\leq d(y, g_n \cdot x_n) + d(g_n \cdot x_n, g_n \cdot z) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + d(x_n, z) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + d(x_n, x) + d(x, z) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + r_1 \\ &\leq \varepsilon + r_1 \end{aligned}$$

◇

O fato de g_n ser isometria implica que

Afirmção 2.72. (g_n) é família equicontínua

Como a variedade é completa, as bolas fechadas são compactas. Segue das afirmações 2.71 e 2.72, juntamente com o teorema de Ascoli-Arzelá (teorema 2.69) que existe uma subsequência (g_{n_i}) convergindo uniformemente em K para uma função contínua $g \in \mathcal{C}^0(K, M)$. Visto que $g_{n_i} \in \text{Iso}(M)$, podemos concluir que $g \in \text{Iso}(M)$. Além disso, $g \in G$, pois G é fechado.

Por um argumento de diagonal de Cantor, podemos obter uma subsequência $(g_{n_{ij}})$ convergente em cada compacto $\bar{B}_{r_j}(x)$.

Caso geral: Suponha

$$x_n \longrightarrow x$$

$$g_n \cdot x_n \longrightarrow y$$

então, para todo $\varepsilon > 0$ é possível encontrar n_0 tal que, sendo $n > n_0$,

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$d(g_n \cdot x_n, y) < \varepsilon$$

Como g_n é isometria, temos

$$\begin{aligned} d(g_n \cdot x, y) &\leq d(g_n \cdot x, g_n \cdot x_n) + d(g_n \cdot x_n, y) \\ &\leq d(x, x_n) + d(g_n \cdot x_n, y) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

e portanto

$$g_n \cdot x \longrightarrow y$$

O resultado segue do lema abaixo:

Lema 2.73. *Seja (g_n) uma sequência em $\text{Iso}(M)$ e suponha que exista $p \in M$ tal que $(g_n(p))$ converge. Então, (g_n) admite uma subsequência (g_{n_i}) tal que*

$$g_{n_i} \xrightarrow{u_c} g \in \text{Iso}(M)$$

Para uma demonstração deste lema, consultar [KN], pg. 46. ■

Observação 2.74. Existe um grupo de isometrias fechado de uma variedade M de dimensão finita que não age propriamente.

Seja $M = \ell^2$, com o produto

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

e $G = O_n$, grupo ortogonal.

Se G agisse propriamente então $O_n = G_0$ seria grupo compacto, uma contradição pois tomando

$$T_k(a_1, a_2, \dots) = (a_2, a_3, \dots, a_k, a_1, a_{k+1}, \dots)$$

podemos notar que $T_k(e_1)$, com $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ não admite subsequência convergente, pois

$$\|T_n(e_1) - T_m(e_1)\| = 2$$

para quaisquer $n \neq m$.

2.7 Órbita Principal

Agora vamos definir o conceito de órbita principal e de representação isotrópica e slice. A partir da definição de campo equivariante normal, vamos mostrar que o fibrado normal de órbitas principais é trivial.

Definição 2.75 (Órbita Principal). Dada uma ação própria $\mu : G \times M \longrightarrow M$, uma órbita $G(x)$ é *principal* se existir uma vizinhança $\mathcal{U}_x$ de x em M onde, para todo $y \in \mathcal{U}_x$, existe $g \in G$ tal que $G_x \subset gG_y g^{-1}$.

Observação 2.76. Seja $G(x)$ órbita principal e $y \in S_x$. Então, $G_y = G_x$.
De fato, $G_y \subset G_x$, pela definição de slice, e como $G(x)$ é órbita principal

$$G_y \subset G_x \subset gG_yg^{-1}$$

Como G_y é compacto,

$$G_y = gG_yg^{-1}$$

e portanto $G_y = G_x$.

Definição 2.77. Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação riemanniana própria. Definimos *representação isotrópica* em $x \in M$ como a aplicação

$$\begin{aligned} G_x &\longrightarrow GL(T_x M) \\ g &\longmapsto d\mu^g \end{aligned}$$

Observação 2.78. Como a representação isotrópica deixa $T_x G(x)$ invariante, também deixa $T_x G(x)^\perp$ invariante.

Definição 2.79. Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação riemanniana própria. Definimos *representação slice* por:

$$\begin{aligned} G_x &\longrightarrow \mathcal{O}(T_x G(x))^\perp \\ g &\longmapsto d\mu^g \end{aligned}$$

Observação 2.80. Para uma ação isométrica própria,

$$S_x = \exp_x(\mathcal{B}_\varepsilon(0))$$

onde $\mathcal{B}_\varepsilon(0) \subset T_x G(x)^\perp$.

Proposição 2.81. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação riemanniana própria. $G(x)$ é órbita principal se, e somente se, a representação slice é trivial (isto é, $d\mu^g = I$ para todo $g \in G_x$).*

Demonstração: Se $G(x)$ é órbita principal, pela observação 2.76, $G_x = G_y$ para todo $y \in S_x$. Logo, a representação slice é trivial.

Supondo que a representação slice seja trivial, temos que

$$d\mu^g v = v$$

para todo $g \in G_x$ e para todo $v \in T_x S_x$

Assim

$$\begin{aligned} \mu^g \exp_x(v) &= \exp_x(d\mu^g v) \\ &= \exp_x(v) \end{aligned}$$

Isto implica que $G_x \subset G_y$ para todo $y \in S_x$. Visto que $G_y \subset G_x$, temos $G_y = G_x$ para todo $y \in S_x$. Logo $G(x)$ é órbita principal. ■

Proposição 2.82. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação riemanniana própria, $G(x)$ órbita principal e $v \in T_x G(x)^\perp$. Então*

$$\vec{V}_{g \cdot x} := d(\mu^g)_x v_x$$

é um campo bem definido.

Demonstração: Se

$$g \cdot x = k \cdot x$$

então

$$(k^{-1}g) \cdot x = x$$

logo

$$k^{-1}g \in G_x$$

e por consequência existe $h \in G_x$ com

$$g = kh$$

Como $G(x)$ é principal, segue da proposição 2.81 que $d\mu^h \Big|_{T_x S_x} = I$, e assim

$$\begin{aligned} d\mu^g \Big|_{T_x S_x} &= d\mu^{kh} \Big|_{T_x S_x} \\ &= d\mu^k d\mu^h \Big|_{T_x S_x} \\ &= d\mu^k \Big|_{T_x S_x} \end{aligned}$$

■

Definição 2.83. Um campo $\vec{V}$ ao longo de $G(x)$ é chamado *equivariante normal* se:

a) $d\mu^g \vec{V}_y = \vec{V}_{g \cdot y}$, para quaisquer $g \in G$ e $y \in G(x)$

b) $\vec{V}_y \in T_y G(x)^\perp$

Corolário 2.84. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação riemanniana própria e $G(x)$ uma órbita principal. Então $G(x)$ admite um referencial normal global do fibrado normal. Em particular, o fibrado normal de $G(x)$ é trivial.*

Proposição 2.85. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação riemanniana própria, $G(x)$ uma órbita principal e $\vec{V}$ um campo normal equivariante. Então:*

- a) $A_{\vec{V}_{g \cdot x}} = d\mu^g A_{\vec{V}_x} d\mu^{g^{-1}}$, onde $A_v(w) = -\nabla_w^t v$
- b) As curvaturas de $G(x)$ ao longo de $\vec{V}$ são constantes.
- c) $\{\exp_y(\vec{V}_y) : y \in G(x)\}$ é uma órbita.

Demonstração:

a)

$$\begin{aligned}
 \langle d\mu^{g^{-1}} A_{\vec{V}_{g \cdot x}} d\mu^g w, z \rangle_x &= \langle A_{\vec{V}_{g \cdot x}} d\mu^g w, d\mu^g z \rangle_{g \cdot x} \\
 &= \langle -\nabla_{d\mu^g w} d\mu^g \vec{V}_x, d\mu^g z \rangle_{g \cdot x} \\
 &= \langle -d\mu^g \nabla_w \vec{V}_x, d\mu^g z \rangle_{g \cdot x} \\
 &= -\langle \nabla_w \vec{V}_x, z \rangle_x \\
 &= \langle A_{\vec{V}_x} w, z \rangle_x
 \end{aligned}$$

b) Temos que $A_{\vec{V}_x} k = \lambda k$. Disso resulta

$$d\mu^{g^{-1}} A_{\vec{V}_{g \cdot x}} k = \lambda k$$

e, por fim

$$A_{\vec{V}_{g \cdot x}}(d\mu^g k) = \lambda(d\mu^g k)$$

c)

$$\begin{aligned}
 \exp_{g \cdot x}(\vec{V}_{g \cdot x}) &= \exp_{g \cdot x}(d\mu^g \vec{V}_x) \\
 &= g \cdot \exp_x(\vec{V})
 \end{aligned}$$

■

2.8 Campos de Killing

Definição 2.86 (Campos de Killing). Seja M uma variedade riemanniana, $\vec{X} \in \Xi(M)$ e

$$\varphi^X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{U} \longrightarrow M$$

o fluxo de $\vec{X}$.

$\vec{X}$ é chamado *Campo de Killing* se

$$\varphi_{t_0}^X : \mathcal{U} \longrightarrow M$$

é isometria para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Proposição 2.87. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação isométrica própria. Então, uma geodésica que é ortogonal a uma órbita é também ortogonal a todas as órbitas que encontra.*

Demonstração: Seja α uma geodésica tal que

$$\alpha'(0) \in T_{\alpha(0)}G(\alpha(0))^\perp$$

Tome $\xi \in \mathfrak{g}$ e seja

$$\vec{\xi}_p = \left. \frac{d}{dt}(\exp(t\xi) \cdot p) \right|_{t=0}$$

conforme definido na proposição 2.10.

Por hipótese,

$$\langle \vec{\xi}_{\alpha(0)}, \alpha'(0) \rangle = 0$$

Desejamos mostrar que, para todo t ,

$$\langle \vec{\xi}_{\alpha(t)}, \alpha'(t) \rangle = 0$$

Como $\vec{\xi}$ é campo de Killing,

$$\langle \nabla_{\alpha'} \vec{\xi}, \alpha' \rangle + \langle \nabla_{\alpha'} \vec{\xi}, \alpha' \rangle = 0$$

e por consequência

$$\langle \nabla_{\alpha'} \vec{\xi}, \alpha' \rangle = 0 \tag{2.30}$$

Assim, usando a equação 2.30:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \vec{\xi}_{\alpha(t)}, \alpha'(t) \rangle &= \langle \nabla_{\alpha'} \vec{\xi}, \alpha' \rangle + \langle \vec{\xi}, \nabla_{\alpha'} \alpha' \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como supomos

$$\langle \vec{\xi}_{\alpha(0)}, \alpha'(0) \rangle = 0$$

resulta que, para todo t

$$\langle \vec{\xi}_{\alpha(t)}, \alpha'(t) \rangle = 0$$

Da arbitrariedade na escolha de ξ resulta a veracidade da proposição.

■

Teorema 2.88 (Teorema da Órbita Principal). *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria onde M é conexa. Então:*

- a) *O conjunto dos pontos contidos em órbitas principais (denotado por M_p) é não-vazio, aberto e denso em M .*
- b) *O conjunto M_p/G é variedade conexa.*
- c) *Sejam $G(x)$, $G(y)$ duas órbitas principais. Então $G_x = gG_yg^{-1}$, para algum $g \in G$.*

Demonstração: Ao longo da demonstração, vamos considerar M dotado de uma métrica em que μ^G se torna subgrupo fechado de $\text{Iso}(M)$ (isto nos é garantido pelo teorema 2.67).

O item a) será provado no lema abaixo:

Lema 2.89. *M_p é conjunto não-vazio, aberto e denso em M .*

Prova: Vamos mostrar por meio de afirmações:

Afirmção 2.90. $M_p \neq \emptyset$

Prova: Visto que os grupos de isotropia são compactos, podemos escolher $x \in M$ tal que G_x tem a menor dimensão possível e para tal dimensão o menor número de componentes conexas.

Seja S_x o slice em x . Pela definição de slice, $G_y \subset G_x$, para $y \in S_x$ e, pela escolha de x , temos $G_y = G_x$. Como $G(S_x)$ é aberto, $G(x)$ é órbita principal.

◇

Afirmção 2.91. M_p é aberto

Prova: Seja $x \in M_p$. Então, para todo $y \in S_x$, temos $G_y = G_x$. Assim $G(S_x) \subset M_p$.

◇

Afirmção 2.92. M_p é denso

Prova: Seja $x \in M$, $\mathcal{U}$ vizinhança de x em M e S_x slice em x .

Escolha $y \in G(S_x) \cap \mathcal{U}$ tal que G_y tem a menor dimensão e para tal dimensão o menor número de componentes conexas.

Seja $z \in G(S_y) \cap \mathcal{U} \cap G(S_x)$. Então, $G_{g^{-1} \cdot z} \cap G_y$. A escolha de y implica que $G_{g^{-1} \cdot z} = G_y$ e portanto $G(y)$ é principal.

◇

◇

Lema 2.93. *Se $(M - M_p)/G$ não desconecta localmente por caminhos M_p/G e M/G é conexo, então M_p/G é conexo por caminhos.*

Prova: Sejam $y, z \in M_p/G$ e α uma curva em M/G com $\alpha(0) = y$ e $\alpha(1) = z$ (isto é possível porque M/G é conexo por caminhos).

Seja $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ uma cobertura aberta de M/G que não desconecta caminhos. Sabemos que M_p/G é aberto e denso em M/G , assim existe

$$p_i \in \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_{i+1} \cap M_p/G$$

Usando a propriedade que $\mathcal{V}_i$ não desconecta por caminhos M_p/G , podemos encontrar uma curva β em M_p/G tal que $y, z, p_i \in \beta$.

◇

Lema 2.94. *$(M - M_p)/G$ não desconecta localmente por caminhos M_p/G .*

Prova: O fato de $S_x/G_x \cong G(S_x)/G$ implica que, para provar o lema 2.94, basta mostrar que :

Afirmção 2.95. $(S_x - (S_x)_p)/G_x$ não desconecta $(S_x)_p/G_x$.

Usando a definição de representação isotrópica e a afirmação 2.95, concluímos que para provar o lema 3, basta provar:

Afirmção 2.96.

Seja K um grupo compacto de isometrias agindo em $\mathbb{R}^n$. Então $(\mathbb{R}^m - \mathbb{R}_p^n)/K$ não desconecta $\mathbb{R}_p^n/K$

Prova: Provemos por indução na dimensão m .

Se $m = 1$, temos $K = \{-1, 1\}$ e $\mathbb{R}/K = [0, \infty)$.

Vamos supor que a afirmação 2.96 seja verdadeira para $m < n$.

Considerando a ação de K em S^{n-1} (esfera unitária), a hipótese de indução, a definição de representação slice, e a afirmação 2.90 temos que

$$(S^{n-1} - S_p^{n-1})/K$$

não desconecta localmente S^{n-1}/K .

Seja $x, y \in \mathbb{R}_p^n$ e $\tilde{x}$ o ponto contido na reta ligando 0 a x tal que $\tilde{x}$ e y estão na mesma esfera.

O fato de $(S^{n-1} - S_p^{n-1})/K$ não desconectar localmente S^{n-1}/K e o lema 2.89 implicam que $G(\tilde{x})$ e $G(y)$ podem ser conectados por uma curva α em $\mathbb{R}_p^n/K$.

Por outro lado, os pontos ao longo da reta que ligam x a $\tilde{x}$ têm a mesma isotropia (representação linear), assim $G(x)$ e $G(\tilde{x})$ estão conectados em $\mathbb{R}_p^n/K$ por uma curva β . Concluimos que $\alpha * \beta$ conecta $G(x)$ a $G(y)$ em $\mathbb{R}_p^n/K$.

◇

◇

O item b) será provado no lema abaixo:

Lema 2.97. M_p/G é variedade conexa.

Prova: Os lemas 2.93 e 2.94 implicam que M_p/G é conexo por caminhos. O fato de M_p/G ser conexo por caminhos e a representação isotrópica em S_x ser trivial (proposição 2.81) junto com o mesmo argumento usado na demonstração do teorema 2.31 implica que M_p/G é variedade conexa.

◇

O item c) é consequência do item b).

■

2.9 Tipos de Órbita

Definição 2.98. Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria.

a) Duas órbitas $G(x)$ e $G(y)$ são do *mesmo tipo* se existir $g \in G$ tal que

$$G_x = gG_yg^{-1} = G_{g \cdot y}$$

b) Se H é grupo de isometrias de algum ponto de M dizemos que $G(x)$ é do tipo (H) se existir $g \in G$ tal que

$$gG_xg^{-1} = H$$

c) $(G_x) \leq (G_y)$ se existir $g \in G$ tal que

$$gG_yg^{-1} \subset G_x$$

d) Uma órbita é chamada *regular* se $\dim G(x)$ é igual à dimensão da órbita principal.

e) Uma órbita que não é regular é chamada *singular*.

f) Uma órbita regular que não é principal é chamada *excepcional*.

Teorema 2.99. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria. Então, dado um ponto $p \in M$, existe uma vizinhança G -invariante $\mathcal{U}$ de p de maneira que $\mathcal{U}$ tem somente um número finito de tipos de órbitas. Em particular, se M é compacta, M tem um número finito de tipos de órbitas.*

Demonstração: Considere S_p o slice em p e defina $\mathcal{U} := G(S_p)$. Considere também M dotado de métrica tal que $\mu^G \subset \text{Iso}(M)$.

Afirmção 2.100. Se duas G_p -órbitas $G_p(x)$ e $G_p(y)$, com $x, y \in S_p$, são do mesmo tipo então as duas G -órbitas $G(x)$ e $G(y)$ são do mesmo tipo.

Observação 2.101. A afirmação 2.100 implica que o número de tipos de G -órbitas em $\mathcal{U}$ é menor ou igual ao número de tipos de G_p -órbitas em S_p .

Observação 2.102. G_p age propriamente em S_p , pois G_p é compacto.

Faremos uma demonstração por indução na dimensão de M .

Quando $\dim M = 0$, o resultado é trivialmente verdadeiro.

Hipótese de Indução: O teorema é verdadeiro para M com $\dim M = k < n$.

Desejamos mostrar que o teorema é verdadeiro para $k = n$.

Se $\dim S_p < n$, podemos utilizar a observação 2.101 e a hipótese de indução para encerrar a demonstração.

Vamos supor que $\dim S_p = n$.

Neste caso, $G_p = G$ e $d\mu^{G_p}$ age em $T_p M \cong \mathbb{R}^n$ como subgrupo de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Note que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ deixa S^{n-1} invariante e, por hipótese de indução, S^{n-1} tem número finito de tipos de órbitas. Os grupos de isotropia (e assim os tipos isotrópicos) são constantes em cada linha que contém 0, e portanto a ação da representação isotrópica tem no máximo uma órbita a mais em S_p do que em S^{n-1} , e consequentemente um número finito.

■

Proposição 2.103. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação riemanniana própria e H um subgrupo compacto de G . Então, cada componente de*

$$M^H = \{x \in M : h \cdot x = x, \forall h \in H\}$$

é variedade mergulhada totalmente geodésica isto é, toda geodésica de M^H é geodésica de M .

Observação 2.104. Componentes conexas de M^H podem ter dimensão diferentes.

Definição 2.105. Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria. $G(x)$ e $G(y)$ são do *mesmo tipo local* se existir um difeomorfismo equivariante

$$\psi : S(S_x) \longrightarrow S(S_y)$$

Observação 2.106. $G(x)$ e $G(y)$ são do mesmo tipo local se:

1. são do mesmo tipo.
2. existir um difeomorfismo

$$\varphi : S_x \longrightarrow S_y$$

com

$$\varphi \cdot g = g \cdot \varphi$$

para $g \in G_x$.

Observação 2.107. Relação de tipo local é mais fina do que a de tipo.

Definição 2.108. Seja $H \in G$ um subgrupo. Definimos o *normalizador* de H como

$$N(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

Teorema 2.109. Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria e $x \in M$. Denote por $M_{\hat{x}}$ o conjunto dos pontos com o mesmo tipo de x e $M_{\hat{x}}$ o conjunto dos pontos com mesmo tipo local de x . Então:

- a) $M_{\hat{x}}$ é aberto e fechado em $M_{\hat{x}}$.
- b) $M_{\hat{x}} \cap M^{G_x}$ é aberto em M^{G_x} . Além disso, é variedade $N(G_x)$ -invariante.
- c) A ação de $N(G_x)/G_x$ em $M_{\hat{x}} \cap M^{G_x}$ é livre e própria.
- d) $M_{\hat{x}}$ é variedade G -equivariante difeomorfa

$$G/G_x \times_{N(G_x)/G_x} (M_{\hat{x}} \cap M^{G_x})$$

Definição 2.110. Uma *estratificação* de uma variedade M é uma partição localmente finita por subvariedades $\{M_i\}_{i \in I}$ de M , chamadas *estratos* tal que:

- a) Para cada $i \in I$,

$$\bar{M}_i = M_i \cup (\cup_{j \in I_i} M_j)$$

onde $I_i \subset I - \{i\}$.

b) $\dim M_j < \dim M_i$ para cada $j \in I_i$.

Teorema 2.111. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria. As componentes conexas dos tipos de órbitas de M formam uma estratificação de M .*

Capítulo 3

A Conjectura de Terng-Palais

Este é o capítulo final desta dissertação, onde usando o instrumental teórico apresentado nos capítulos 1 e 2 vamos compreender e demonstrar o Teorema 3.8, o qual chamamos de Conjectura de Palais-Terng. Segundo [HOL] este teorema garante que se a distribuição normal de uma ação própria é integrável, então a ação é polar, i.e., existem subvariedades imersas, completas, totalmente geodésicas que encontram todas as órbitas ortogonalmente

Algumas provas distintas foram feitas para esta conjectura, sendo uma delas apresentada no próprio artigo [HOL], mas para demonstrá-la optamos por adaptar a prova de Alexandrino ([A]); em seu artigo, apresenta uma versão mais geral válida para folheações riemannianas singulares. Como lidamos com um caso particular, optamos por adaptar esse resultado ao caso de órbitas regulares de ações isométricas próprias.

Na organização desse capítulo iniciamos apresentando alguns fatos de imersões riemannianas que serão utilizados, mas sem a preocupação de demonstrá-los, visto que facilmente podem ser encontrados em qualquer livro-texto de Geometria Riemanniana. A seguir partimos para a demonstração da conjectura, à qual dedicamos uma seção.

3.1 Fatos sobre Imersões Riemannianas

Elencamos aqui alguns fatos sobre imersões riemannianas necessárias para o entendimento da demonstração do teorema 3.8. Para uma demonstração cuidadosa desses fatos, consultar o capítulo 6 de [dC1].

Observação 3.1. Dada uma imersão $f : N \longrightarrow M$, onde M possui uma estrutura riemanniana, podemos induzir em N uma métrica por:

$$\langle u, v \rangle_p := \langle df_p u, df_p v \rangle_{f(p)}$$

Neste caso, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é chamada métrica induzida por f em N , e f é chamada *imersão isométrica*.

Observação 3.2. Dada uma imersão $f : N \longrightarrow M$, como em cada $p \in N$ temos um mergulho $f : \mathcal{U} \longrightarrow f(\mathcal{U})$, onde $\mathcal{U}$ é uma vizinhança de p em N , temos a seguinte decomposição:

$$T_p M = T_p N \oplus (T_p N)^\perp$$

Costumamos também denotar $(T_p N)^\perp$ por $\nu_p N$

Definição 3.3. Definimos $\nu_p N$ da observação 3.2 acima como o *espaço normal* a N em p . Mais geralmente, sendo $\nu N := \cup_{p \in N} \nu_p N$, temos que $(\nu N, \pi, N)$ é o *fibrado normal* a N .

Observação 3.4. Supondo $f : N \longrightarrow M$ uma imersão onde M é uma variedade com conexão riemanniana $\tilde{\nabla}$, sendo X, Y campos locais de vetores em N podemos estendê-los a campos locais $\tilde{X}, \tilde{Y}$ em M , respectivamente, e definir a conexão (riemanniana) em N :

$$\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})^T$$

onde $(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})^T$ denota a componente tangencial de $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$. Esta última coincide com a conexão riemanniana de N com a métrica induzida de M .

Com isso, definimos a aplicação bilinear simétrica

$$B(X, Y) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_X Y$$

Tomando $p \in N$ e $\eta \in \nu_p N$, definimos:

$$H_\eta : T_p N \times T_p N \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$H_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle$$

a qual é também bilinear simétrica.

Definição 3.5 (Segunda Forma Fundamental). A forma quadrática

$$II_\eta(X) = H_\eta(X, X)$$

é chamada *segunda forma fundamental* de f em p segundo o vetor normal η (veja a observação 3.4 acima).

Definição 3.6 (Imersão totalmente geodésica). Uma imersão $f : N \longrightarrow M$ é *geodésica* em $p \in M$ se II_η é identicamente nula para todo $\eta \in \nu_p N$, e *totalmente geodésica* se f é imersão geodésica para todo $p \in N$.

Proposição 3.7. f é imersão totalmente geodésica se, e somente se, toda geodésica em N é também geodésica em M .

3.2 A Prova da Conjectura

Considere uma ação isométrica própria $G \times M \longrightarrow M$. Tomando um ponto regular $q \in M$, podemos considerar uma bola normal $\mathcal{B}_\varepsilon(q)$, que admite uma distribuição horizontal integrável $\mathcal{H}$. Logo, existe uma folha H na bola normal de maneira que $H \perp \{G(x)\}_{x \in \mathcal{B}_\varepsilon(q)}$. Diremos que σ é uma *seção regular* se σ é aberto de uma folha de H .

Teorema 3.8. *Seja M uma variedade riemanniana completa e G um grupo que age propriamente por isometrias em M . Se a distribuição de espaços normais às órbitas regulares for integrável, então existe uma seção imersa totalmente geodésica para a ação de G a qual encontra todas as órbitas e sempre perpendicularmente.*

Na observação a seguir, apresentamos uma definição da variedade grassimaniana por meio do conceito de ação que estudamos no capítulo 2. Uma outra forma muito interessante de definir é identificando as bases ortogonais de um mesmo k -plano, o que pode ser verificado em [B], pg. 62.

Observação 3.9 (Grassimanião de k -planos em $\mathbb{R}^n$). Seja $G_k(\mathbb{R}^n)$, $k \leq n$ o conjunto dos subespaços vetoriais k -dimensionais de $\mathbb{R}^n$. Para dar uma estrutura de variedade a este conjunto, consideramos a ação natural:

$$\mu : \mathcal{O}_n \times G_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$$

Como na proposição 2.36 do capítulo 2, temos a comutatividade do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n & \xrightarrow{\mu_x} & G_k(\mathbb{R}^n) \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\mu}_x & \\ \mathcal{O}_n & & \\ \hline \mathcal{O}_k \times \mathcal{O}_{n-k} & & \end{array}$$

o que dá a $G_k(\mathbb{R}^n)$ estrutura de variedade. Esta é chamada *Variedade de Grassman*.

No caso de uma variedade M , vamos definir $G_k(M) := \cup_p G_k(T_p M)$

Para facilitar o entendimento do texto, adotamos agora uma convenção: dada uma ação isométrica própria $\mu : G \times M \longrightarrow M$, vamos considerar $\mathcal{F} = \{G(x)\}_{x \in M}$ a folheação de M dada pelas órbitas regulares da ação μ . Quando denotarmos $\mathcal{F}$, ficará entendido que tratamos da folheação dada pelas órbitas regulares.

No próximo exemplo pretendemos dar uma visão simples da folheação determinada pelas órbitas regulares de uma ação isométrica própria. Na proposição 3.11 bemo como na observação que a segue, explicamos como ocorre a ação induzida.

Exemplo 3.10. Considere $M = S^2 \times \mathbb{R}$, e $G = SO(2) \times \mathbb{R}$. Tomando q o pólo norte da esfera, temos que as órbitas $G(x)$, para $x \neq q$ e de sua antípoda, são difeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}$ e ortogonais a $S^2 \times 0$, e $G(q)$ é o próprio eixo $0z$. Assim, $S_q = \mathcal{U} \times \{0\}$ onde $\mathcal{U}$ é uma vizinhança de q em S^2 e $G_q = SO(2)$. Neste caso temos que, $\mathcal{F} \Big|_{S_p}$ são os paralelos da esfera e $\tilde{\mathcal{F}} = \{SO(2) \cdot \vec{X}\}_{\vec{X} \in \mathbb{R}^2}$ são circunferências centradas na origem em $T_q S_q$. Note que temos um difeomorfismo entre $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\mathcal{F} \Big|_{S_q}$.

Enunciamos a seguir um resultado importante no processo de demonstração desse teorema. Como não apresentamos sua demonstração, indicamos que pode ser conferida em [P].

Proposição 3.11 (Boualem). *Seja M uma variedade riemanniana completa, $G \times M \longrightarrow M$ uma ação isométrica própria, S_q slice em q de raio ε e σ uma seção regular contida na bola normal $\mathcal{B}_\varepsilon(q)$. Suponha que σ intersecta S_q . Então:*

a) *Existe um subespaço $V \subset T_q S_q$ de maneira que*

$$\sigma \subset \mathcal{D}_\varepsilon(q) := \exp_q(V \cap \mathcal{U})$$

onde $\mathcal{U} = \mathcal{B}_\varepsilon(0) \subset T_q S_q$.

Observação 3.12. Quanto à proposição anterior vale lembrar que pela definição de slice temos uma ação $\mu : G_q \times S_q \longrightarrow S_q$ o que nos dá uma folheação $\mathcal{F} \Big|_{S_q} = \{G_q(y)\}_{y \in S_q}$. Isto induz uma ação

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : G_q \times T_q S_q &\longrightarrow T_q S_q \\ (g, X) &\longmapsto d(\mu^g)_q X \end{aligned}$$

e então temos uma folheação $\tilde{\mathcal{F}} = \{G_q(X)\}_{X \in T_q S_q}$. Desta forma, $\exp_q^{-1}$ é um difeomorfismo entre $\mathcal{F} \Big|_{S_q}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$.

Proposição 3.13. *Se γ é uma geodésica em M ortogonal a uma órbita regular, então o conjunto dos pontos singulares é isolado em γ .*

Demonstração: Considere primeiro o caso linear onde $G = \mathcal{O}_n$ e temos a ação natural:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Neste caso, $\vec{0}$ é órbita singular. Vamos verificar que, se $G(\vec{X})$ é regular, então $G(\lambda \vec{X})$ é regular para qualquer $\lambda \neq 0$.

De fato, $G_{\lambda X} = G_X$ e como $G(X) = G/G_X$, temos que $\dim G(X) = \dim G(\lambda X)$. Logo, $G(\lambda X)$ é regular.

O caso geral segue do caso linear discutido acima junto com as propriedades de representação isotrópica. ■

Lema 3.14. *Seja S_q slice em $q \in M$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ conforme definida na proposição 3.11. Considere V um subespaço ortogonal às folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$. Então:*

- a) *O conjunto dos pontos regulares de $\tilde{\mathcal{F}}$ é aberto e denso em $V \cap \mathcal{U}$, o qual é ortogonal às folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$.*
- b) *O conjunto dos pontos regulares de $\mathcal{F}$ é aberto e denso em $\mathcal{D}_\varepsilon(q) := \exp_q(V \cap \mathcal{U})$.*
- c) *A subvariedade $\mathcal{D}_\varepsilon(q)$ é ortogonal às folhas de $\mathcal{F}$*
- d) *$\mathcal{D}_\varepsilon(q)$ é uma subvariedade totalmente geodésica.*

Demonstração:

a) Vamos separar a prova em três partes:

i) *O conjunto é denso.*

Seja $z \in V \cap \mathcal{U}$. Precisamos mostrar que, tão próximo quanto se queira de z , é possível encontrar pontos regulares.

De fato, tome um ponto regular $x \in V \cap \mathcal{U}$ (o que é possível pois tomamos V ortogonal a uma folha regular). Considere γ a reta em $V \cap \mathcal{U}$ ligando x a z . Como $\gamma \subset V$ e $V \perp G(x)$, temos que $\gamma \perp G(x)$. Já que x é regular, segue da proposição 3.13 que os pontos singulares ao longo de γ são isolados. Em particular, como $z \in \gamma$, é possível encontrar pontos regulares tão próximo de z quanto se queira.

ii) *O conjunto é aberto.*

Seja $z \in V \cap \mathcal{U}$ ponto regular. Mostremos que existe uma vizinhança de z formada por pontos regulares. Como $G(z)$ é regular, as órbitas próximas a $G(z)$ são também regulares. Como $\dim(V) = \text{codim}(G(z))$, tais órbitas intersectam V .

iii) *O conjunto dos pontos regulares em $V \cap \mathcal{U}$ é ortogonal às órbitas.*

Seja $z \in V \cap \mathcal{U}$ um ponto regular e construa $\ell_1, \dots, \ell_k : [0, 1] \rightarrow V$ como segue:

$$\ell_i(0) \in \tilde{\sigma}$$

$$\ell_i(1) = z$$

$$\{\ell'(1)\} \text{ é base de } T_z V$$

Temos que $\ell_i \perp G(\ell_i(0))$, de onde temos que $\ell_i \perp G(z)$, $\forall i$. Consequentemente, $G(z) \perp V$.

b) Sendo A o conjunto dos pontos regulares de $\tilde{\mathcal{F}}$, temos que $\exp_q(A)$ é aberto e denso, visto que $\exp_q$ é suave.

c) Tome $y \in \mathcal{D}_\varepsilon(q)$ ponto regular e σ_y seção regular contendo y . Provemos que $\sigma_y \subset \mathcal{D}_\varepsilon(q)$.

Seja $\tilde{\sigma}_y := \exp_q^{-1}(\sigma_y)$, da proposição 3.11 temos que $\tilde{\sigma}_y$ é seção regular de $\tilde{\mathcal{F}}$. Pelo item (a), $\tilde{\sigma}_y \subset \tilde{V} \cap \mathcal{U}$ já que $G(\tilde{y}) \perp V$.

d) Segue diretamente de c) e do fato que pontos regulares são densos em $\mathcal{D}_\varepsilon(q)$.

■

Proposição 3.15. *Seja $q \in M$ e $\mathcal{D}_\varepsilon(q) = \exp_q(V \cap \mathcal{U})$. Seja $\mathcal{B}_\delta(q)$ bola normal de raio δ em M . Defina*

$$\mathcal{D}_\delta(q) := \{\exp_q(v) : v \in T_q \mathcal{D}_\varepsilon(q), \|v\| < \delta\}$$

Então:

a) *O conjunto dos pontos regulares de $\mathcal{F}$ é aberto e denso em $\mathcal{D}_\delta(q)$.*

b) *$\mathcal{D}_\delta(q)$ é ortogonal às folhas de $\mathcal{F}$.*

c) $\mathcal{D}_\delta(q)$ é totalmente geodésica.

Observação 3.16. Vale ressaltar que δ da proposição 3.15 é frequentemente maior que ε do lema 3.14

Demonstração: Seja $\xi \in T_q\mathcal{D}_\varepsilon(q)$ tal que $\gamma(t) = \exp_q(t\xi)$ tem pontos regulares ($0 \leq t \leq 1$). Da proposição 3.13, os pontos singulares são isolados em γ . Como γ é compacto, podemos cobrir γ com um número finito de slices centrados em $\gamma(t_i)$ tal que $\gamma(t_i)$ é o único ponto singular possível em $\gamma \cap S_{\gamma(t_i)}$.

Construa $T = \cup_i \mathcal{D}_\varepsilon(\gamma(t_i))$ conforme lema 3.14.

Como $\exp_q$ é difeomorfismo e T é totalmente geodésica, podemos encontrar vizinhança $\mathcal{W}$ de ξ em $T_q\mathcal{D}_\varepsilon(q)$ e definir vizinhança de γ em T por $N := \exp_q(\mathcal{W})$. Além disso, $N \subset \mathcal{D}_\delta(q)$. Assim, temos vizinhança N de γ em $\mathcal{D}_\delta(q)$ satisfazendo os itens (a) a (c). Da arbitrariedade da escolha de ξ segue o resultado. ■

Agora que enunciamos alguns resultados necessários, vamos efetuar a prova da conjectura de Palais-Terng.

3.2.1 Demonstração do Teorema 3.8

Seja $q \in M$ e

$$\mathcal{D}_{r_1}(q) := \{\exp_q(v) : v \in T_q\mathcal{D}_\varepsilon(q) \text{ e } \|v\| \leq r_1\}$$

onde $r_1 > 0$. Como $\mathcal{D}_{r_1}(q)$ é compacto, é possível encontrar uma vizinhança compacta $\tilde{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{D}_{r_1}(q)$ e $\delta > 0$ (a saber, o delta de Lebesgue) tal que, para todo $x \in \tilde{\mathcal{U}}$, $\mathcal{B}_\delta(x)$ é bola normal. Seja γ geodésica de comprimento r_1 tal que $\gamma'(0) \in T_q\mathcal{D}_\varepsilon(q)$. Note que podemos estender $\mathcal{D}_\varepsilon(q)$ ao longo da geodésica γ para uma subvariedade (não necessariamente completa) satisfazendo a proposição 3.15, por meio de colagem de discos totalmente geodésicos de raio $\delta/2$. Explicando melhor:

Considere inicialmente $\mathcal{D}_{\delta/2}(q)$, o qual satisfaz os itens (a) – (c) da proposição 3.15. Defina o segundo disco como

$$\mathcal{D}_{\delta/2}(\gamma(\delta/4)) := \{\exp_{\gamma(\delta/4)}(v) : v \in T_{\gamma(\delta/4)}\mathcal{D}_{\delta/2}(q) \text{ e } \|v\| \leq \delta/2\}$$

Este conjunto também satisfaz os itens (a) – (c) da proposição 3.15. Continuando esse processo, obtemos discos por indução e estendemos $\mathcal{D}_\varepsilon(q)$ ao longo de γ .

Seja Σ_{r_1} a união das extensões construídas acima ao longo de todas as geodésicas γ com comprimento r_1 tal que $\gamma'(0) \in T_q\mathcal{D}_\varepsilon(q)$. Usaremos o lema abaixo:

Lema 3.17. Σ_{r_1} pode ser coberto por um número finito de discos $\mathcal{D}_i$'s (de raio δ) satisfazendo os itens (a) – (c) da proposição 3.15.

Demonstração: Vamos provar a seguinte afirmação necessária para o lema:

Afirmção 3.18. Seja $x \in \mathcal{D}_{r_1}(q)$. Então, $\mathcal{D}_{r_1}(q) \cap \mathcal{B}_{\delta/4}(x)$ pertence a um número finito de discos $\mathcal{D}_i$'s de raio $\delta/2$ satisfazendo os itens (a) – (c) da proposição 3.15.

Prova: Seja

$$K = \{v \in T_q \mathcal{D}_\varepsilon(q) : \exp_q(v) \in \bar{\mathcal{B}}_{\delta/4}(x) \text{ e } \|v\| \leq r_1\}$$

Note que K é compacto. Agora tome $v_0 \in K$. Conforme apresentado acima, podemos estender $\mathcal{D}_\varepsilon(q)$ ao longo de $\exp_p(tv_0)$ para uma subvariedade totalmente geodésica T . Como $\exp$ é contínua, podemos encontrar $\mathcal{W}$ vizinhança de v_0 tal que $\exp_q(tu) \subset T$, para todo $u \in \mathcal{W} \cap K$ e $0 < t \leq 1$. Da compacidade de K segue a afirmação. ◇

Para concluir a prova do lema, vamos cobrir $\mathcal{D}_{r_1}(q)$ com um número finito de bolas $\mathcal{B}_{\delta/4}^i$. Pela afirmação, deduzimos que $\mathcal{D}_{r_1}(q)$ está contida em uma união finita de discos $\mathcal{D}_{\delta/2}(p_i)$ satisfazendo (a) – (c) da proposição 3.15. Assim, conforme definimos Σ_{r_1} , concluímos que para todo $x \in \Sigma_{r_1}$, existe i_0 tal que $x \in \mathcal{D}_\delta(p_{i_0})$. ■

Dando continuidade à prova do teorema, vamos provar que Σ_{r_1} é subvariedade imersa em M . Considere $(G^k(M), M, \pi)$ o k -grassimano de M e defina $\mathcal{D}_i^* \subset G^k(M)$ por

$$\mathcal{D}_i^* := \{T_x D_i : x \in D_i\}$$

e $\Sigma_{r_1}^* \subset G^k(M)$ por

$$\Sigma_{r_1}^* = \{T_x D_i\}_{x \in \tilde{\Sigma}_{r_1}}$$

D_i^* é imersa em $G^k(M)$, e se D_i^* e D_j^* têm um ponto em comum então eles coincidem numa vizinhança desse ponto. Como $\Sigma_{r_1}^*$ pode ser recoberto por um número finito de D_i^* , vemos que $\Sigma_{r_1}^*$ é mergulhada em $G^k(M)$. Concluímos que Σ_{r_1} é imerso sendo $\Sigma_{r_1} = \prod \Sigma_{r_1}^*$.

Para concluir a prova, tome uma sequência $r_1 < r_2 < \dots < r_n \rightarrow \infty$ e construa Σ_{r_i} e $\Sigma_{r_i}^*$ como acima. Podemos mostrar assim que $\Sigma_{r_i}^*$ é mergulhada e Σ_{r_i} imersa. Finalmente, defina

$$\Sigma^* := \cup_{r_i} \Sigma_{r_i}^*$$

Temos que Σ^* é uma subvariedade e que $\Sigma := \cup_{r_i} \Sigma_{r_i}$ é imersa para $\Sigma = \prod \Sigma^*$. Usando o Teorema de Hopf-Rinow (teorema 1.84) temos que Σ é completa.

Referências Bibliográficas

- [A] Alexandrino, M. M., Proofs of Conjectures about Singular Riemannian Foliations. *Geom Dedicata* (2006) 119:219-234. Springer.
- [B] Boothby, W. M., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry - Revised Second Edition, San Diego: Academic Press, 2003.
- [CL] Camacho, C., Lins Neto, A., Teoria Geométrica das Folheações, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [dC1] Carmo, M. P. do, Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [dC2] Carmo, M. P. do, Geometria Riemanniana, Terceira Edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [DK] Duistermaat, J., Kolk, J., Lie Groups, Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [F] Fegan, H. D., Introduction to Compact Lie Groups, Series in Pure Mathematics, 13. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1991.
- [HOL] Heintze, E.; Liu, X.; Olmos, C. Isoparametric Submanifolds and a Chevalley-Type Restriction Theorem.
- [KN] Kobayashi, S., Nomizu, K., Foundations of Differential Geometry, Vol. I. John Wiley Sons Inc. 1996.
- [L1] Lima, E. L., Espaços Métricos, Quarta Edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [L2] Lima, E. L., Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, Terceira Edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [P] Pineros, D. A. C., Sobre as folheações e o teorema de slice para folheações riemannianas singulares com seções, Dissertação de Mestrado, São Paulo: IME/USP, 2008.
- [PT] Palais, R.S, Terng, C-L, Critical Point Theory and Submanifold Geometry, Lectures Notes in Mathematics 1353: Springer Verlag, 1988.
- [S] Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. 1, Boston: Publish or Perish, [1970 - 1975].