

2^o Lista de Exercício de MAT5771 (1^o semestre 2008)

Esta lista contém problemas cuja solução poderá ser cobrada em prova. Ela também contém proposições e teoremas, alguns enunciados e outros **demonstrados em sala de aula** (abreviados aqui por **d.s.a**). A demonstração destes resultados também poderá ser cobrada em prova.

Bibliografia Principal:

1. M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides.
2. S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer.
3. J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitext, Springer.
4. R.S. Palais, C-L Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lectures Notes in Mathematics 1353, Springer Verlag. (see Terng).

Bibliografia de Apoio:

1. R. Bishop, R. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, AMS, Chelsea.
2. C. Gorodski, *Notes on Riemannian Geometry*, Notas de Aula, IME-USP, 2007.
3. W. Kuhnel, *Differential Geometry, Curves-surfaces-manifolds*. American Mathematical Society, Second Edition 2005.
4. P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate texts in mathematics, Springer.
5. M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, V. 1 Publish or Perish, Inc. 1979.

1 Campos de Jacobi

Proposição 1.1 (d.s.a). *Seja $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ uma aplicação suave tal que $f(s_0, \cdot)$ é geodésica para todo $s_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$. Então $J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ é campo de Jacobi ao longo da geodésica $\alpha(t) := f(0, t)$.*

Proposição 1.2 (d.s.a). *Seja δ tal que $\exp_p : B_\delta(p) \rightarrow M$ está bem definida. Defina a curva $\alpha(t) := \exp_p(tv_0)$ com $\|v_0\| = 1$ e $|t| < \delta$. Para $w \in T_p M$ considere o campo tw ao longo do segmento $t \rightarrow tv_0$. Então $J(t) := d(\exp_p)_{tv_0} tw$ é campo de Jacobi com $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt} J(0) = w$.*

Proposição 1.3. *Suponha que M é geodesicamente completa, i.e., $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ está bem definida para todo $p \in M$. Seja $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ geodésica e J campo de Jacobi ao longo de α . Então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ para $f(s, t) = \exp_{\beta(s)}(tv(s))$ onde $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma curva tal que $\beta'(0) = J(0)$ e $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é um campo ao longo de β com $v(0) = \alpha'(0)$ e $\frac{\nabla}{ds} v(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$.*

Proposição 1.4 (d.s.a). *Sejam M variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ geodésica com vetor velocidade 1. Então o campo de Jacobi J ao longo de α com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = w$ para w perpendicular a $\alpha'(0)$ é $J(t) = c_K(t)w(t)$ onde $w(\cdot)$ é o transporte paralelo de w ao longo de α e c_K é a função definida como $c_K(t) := \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}$ se $K > 0$, $c_K(t) := t$ se $K = 0$ e $c_K(t) := \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}$ se $K < 0$.*

Proposição 1.5 (d.s.a). *Sejam (M^n, g) variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\psi : (0, \delta) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow B_\delta(p)$ parametrização geodésica polar, i.e., $\psi(r, v) := \exp_p(rAv)$ onde $A : (\mathbb{R}^n, g_0) \rightarrow (T_p M, g)$ é isometria linear. Então a métrica g em coordenadas geodésicas polares é $dr^2 + (c_K(r))^2 ds^2$ onde ds^2 é a métrica canônica da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ e a função c_K foi definida na Proposição 1.4. Em particular, duas variedades Riemannianas com mesma dimensão e mesmas curvaturas seccionais constantes iguais a K são localmente isométricas.*

Proposição 1.6 (d.s.a). *Sejam δ tal que $\exp_p : B_\delta(p) \rightarrow M$ está bem definida. Defina $\alpha(t) = \exp_p(tv)$ com $|t| < \delta$ e $\|v\| = 1$. Então $\alpha(t_0)$ é ponto conjugado a $\alpha(0)$ ao longo de α com multiplicidade k se e somente se $\dim(\ker d(\exp_p)_{t_0 v}) = k$.*

Proposição 1.7 (d.s.a). *Seja $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ geodésica. Suponha que $\alpha(a)$ não é ponto conjugado a $\alpha(0)$ ao longo de α . Então dado $v \in T_{\alpha(0)}M$ e $w \in T_{\alpha(a)}M$ existe um único campo de Jacobi J ao longo de α tal que $J(0) = v$ e $J(a) = w$.*

Problema 1.8. Exercício 5 do Capítulo V do livro do Carmo.

1.1 Sugestões

Proposição 1.5

Seja $\{e_i\} \subset T_v(\mathbb{S}^{n-1})$ referencial ortonormal. Note que

$$\begin{aligned} J_i(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} rAe_i \\ &= d\psi_{(r,v)}(0, e_i), \end{aligned}$$

é campo de Jacobi ao longo da geodésica $r \rightarrow \exp_p(rAv)$. Utilizando Proposição 1.4 verifique que

$$g(J_i, J_j) = \delta_{i,j} c_K^2. \quad (1.1)$$

Por fim defina

$$\begin{aligned} J_0(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} Av \\ &= d\psi_{(r,v)}(1, 0) \end{aligned}$$

e utilizando o Lema de Gauss conclua que

$$g(J_0, J_i) = 0. \quad (1.2)$$

O resultado então seguirá das Equações (1.1) e (1.2).

2 Imersões isométricas

Problema 2.1. Uma subvariedade Riemanniana M de uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamada totalmente geodésica, se a segunda forma se anula ao longo de M . Mostre que M é totalmente geodésica se e somente se toda geodésica de M é geodésica de $\tilde{M}$.

Problema 2.2. Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante e $H \subset G$ subgrupo fechado. Mostre que H é subvariedade totalmente geodésica.

Proposição 2.3 (d.s.a). *Seja M subvariedade Riemanniana de uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e denote $R, \tilde{R}$ os tensores curvaturas de M e $\tilde{M}$ e B o $(1,2)$ tensor segunda forma de M . Então*

$$\langle R(X, Y)X, Y \rangle - \langle \tilde{R}(X, Y)X, Y \rangle = \langle B(X, X), B(Y, Y) \rangle - \langle B(X, Y), B(X, Y) \rangle$$

Problema 2.4. Mostre que as curvaturas seccionais de $\mathbb{S}^n$ são 1.

Proposição 2.5 (d.s.a). *Seja ξ um campo normal unitário a uma subvariedade Riemanniana M de uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Seja $\Psi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset M$ parametrização com $\bar{U}$ compacto. Considere $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi|_{M-U} = 0$. Para U^1 compacto com $\bar{U} \subset U^1$ defina $F : (-\delta, \delta) \times U^1 \rightarrow \tilde{M}$ como $F(t, x) := \exp_x(t\xi)$ e $\hat{\Psi} : (-\delta, \delta) \times V \rightarrow \tilde{M}$ como $\hat{\Psi}(t, x) := F(t\varphi(x), \Psi(x))$. Escolha δ para F ser imersão injetora. Defina $g_{i,j}^t := \langle d\Psi^t e_i, d\Psi^t e_j \rangle$ onde $\Psi^t(x) = \hat{\Psi}(t, x)$. Então:*

$$(a) \quad -n\langle H, \varphi \xi \rangle = \frac{\frac{d}{dt} \sqrt{|g_{i,j}^t|}|_{t=0}}{\sqrt{|g_{i,j}^0|}}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dt} \text{Vol}(\Psi^t(V))|_{t=0} = -n \int_U \langle H, \varphi \xi \rangle \omega$$

onde H é o vetor curvatura média e ω é a forma volume (com orientação induzida por Ψ .)

Proposição 2.6. *Seja M subvariedade Riemanniana de uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Seja $\{e_A\}$ um referencial adaptado a M e denote $\tilde{\omega}_{A,B}$ as 1-formas de conexão e $\tilde{\Omega}_{i,j}$ as 2-formas de curvatura de $\tilde{M}$ associadas a $\{e_A\}$. Então*

- (a) $d\tilde{\omega}_{i,j} = \sum_k \tilde{\omega}_{i,k} \wedge \tilde{\omega}_{k,j} + \sum_\alpha \tilde{\omega}_{i,\alpha} \wedge \tilde{\omega}_{\alpha,j} - \tilde{\Omega}_{i,j}$ é a equação de Gauss escrita no referencial adaptado.
- (b) $d\tilde{\omega}_{i,\alpha} = \sum_k \tilde{\omega}_{i,k} \wedge \tilde{\omega}_{k,\alpha} + \sum_\beta \tilde{\omega}_{i,\beta} \wedge \tilde{\omega}_{\beta,\alpha} - \tilde{\Omega}_{i,\alpha}$ é a equação de Codazzi escrita no referencial adaptado.
- (c) $d\tilde{\omega}_{\alpha,\beta} = \sum_i \tilde{\omega}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\omega}_{i,\beta} + \sum_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha,\gamma} \wedge \tilde{\omega}_{\gamma,\beta} - \tilde{\Omega}_{\alpha,\beta}$ é a equação de Ricci escrita no referencial adaptado.

Concluimos então que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são partes da equação de curvatura:

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} - \tilde{\Omega}.$$

Teorema 2.7 (d.s.a). *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto com métrica Riemanniana g . Considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ referencial ortonormal (em relação a métrica g) definido em U , ω_i as formas duais de $\{e_i\}$ e ω_{ij} as formas de conexão Riemannianas da métrica g em relação ao referencial $\{e_i\}$. Seja A um 2 tensor simétrico definido por $A(X, Y) := \sum_i \omega_{i, n+1}(X) \otimes \omega_i(Y)$. Defina $\omega_{n+1, i} := -\omega_{i, n+1}$ e ω a matriz de 1-formas formada por $\omega_{A, B}$ com A, B variando de 1 a $n+1$. Suponha que ω atende formalmente as equações de Gauss e Codazzi de uma hipersuperfície no espaço Euclidiano, i.e., $d\omega = \omega \wedge \omega$. Então dado $x_0 \in U$, $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ e uma base ortonormal $v_1, \dots, v_{n+1} \in T_{p_0} \mathbb{R}^{n+1}$ existe, para um aberto $\tilde{U} \subset U$ de x_0 suficientemente pequeno, uma única imersão isométrica $\Psi : (\tilde{U}, g) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ tal que $d\Psi_{x_0} e_i = v_i$ onde $i = 1, \dots, n$. Além disto $A(X, Y) = \Pi(d\Psi X, d\Psi Y)$, onde Π é a segunda forma da hipersuperfície $M := \Psi(\tilde{U})$ associada ao vetor N normal a M com $N(p_0) = v_{n+1}$.*

Problema 2.8. Exercício 9 do capítulo 8 do livro do Carmo. Dado uma submersão Riemanniana $F : M \rightarrow B$ o exercício discute a relação entre a conexão Riemanniana de M e a conexão Riemanniana de B .

Problema 2.9. Exercício 10 do capítulo 8 do livro do Carmo. Dado uma submersão Riemanniana $F : M \rightarrow B$ o exercício discute a relação entre a curvatura de $\tilde{M}$ e a curvatura de B .

Problema 2.10. Exercício 12 do capítulo 8 do livro do Carmo. O exercício discute como calcular a curvatura do espaço projetivo complexo.

Problema 2.11. Seja $F : M^{n+k} \rightarrow B^k$ uma submersão Riemanniana. Mostre que os itens abaixo são equivalentes.

- (a) Para todo $c \in B$, a conexão normal da subvariedade $F^{-1}(c)$ é flat.
- (b) A distribuição normal $\mathcal{H}$ é integrável. Em particular, as folhas tangentes a $\mathcal{H}$ são totalmente geodésicas.

Problema 2.12. Considera a ação isométrica $\mu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ definida por $\mu(\lambda, (z_1, z_2)) := (\lambda z_1, \lambda z_2)$. Mostre que a distribuição normal $\mathcal{H}$ as órbitas de μ não é integrável.

2.1 Sugestões

Problema 2.11

Para provar que (a) implica (b) considere $\{e_A\}$ referencial local adaptado a submersão, i.e, e_i ($i = 1, \dots, n$) é tangente as pre-imagens e e_α ($\alpha = n+1, \dots, n+k$) é normal projetável. Pelo teorema de Frobenius se $[e_\alpha, e_\beta]_x \in \mathcal{H}_x$ para qualquer $\alpha, \beta > n$ e para qualquer x então $\mathcal{H}$ será integrável, i.e., existe uma folheação $\{\Sigma\}$ cujas folhas são tangentes a distribuição $\mathcal{H}$. Seja ω_i é o dual de e_i . Note que $\mathcal{H} = \cap_{i=1}^n \ker \omega_i$. Assim para mostrar que $\mathcal{H}$ é integrável, basta mostrar que $0 = \omega_i([e_\alpha, e_\beta]) = \langle \nabla_{e_\alpha} e_\beta - \nabla_{e_\beta} e_\alpha, e_i \rangle$ para todo i, α, β .

Por outro lado, usando o fato da conexão normal ser flat, i.e., $\langle \nabla_{e_i} e_\alpha, e_\beta \rangle = 0$ e o fato de e_α ser projetável temos:

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla_{e_\alpha} e_\beta, e_i \rangle &= -\langle e_\beta, \nabla_{e_\alpha} e_i \rangle \\
 &= -\langle e_\beta, \nabla_{e_i} e_\alpha + [e_\alpha, e_i] \rangle \\
 &= -\langle e_\beta, \nabla_{e_i} e_\alpha \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

De forma analoga temos $\langle \nabla_{e_\beta} e_\alpha, e_i \rangle = 0$ e isto prova que $0 = \omega_i([e_\alpha, e_\beta])$.

Afim de provar que (b) implica (a) considere uma folha Σ tangente a distribuição $\mathcal{H}$. Seja $v \in T_p \Sigma$ e $\alpha(t) := \exp_p(tv)$. O fato de F ser uma submersão Riemanniana implica que a geodésica α é ortogonal a todas as subvariedades $F^{-1}(c)$ que ela encontra. Em particular é sempre tangente a $\mathcal{H}$ e assim deve estar contida em Σ . Em particular note que α também é geodésica de Σ . Assim vemos que Σ é totalmente geodésica. Considere $\{e_A\}$ referencial adaptado a submersão. Como Σ é totalmente geodésica, temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_{e_\alpha} e_i, e_\beta \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_i} e_\alpha + [e_\alpha, e_i], e_\beta \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_i} e_\alpha, e_\beta \rangle \end{aligned}$$

e a última igualdade implica que a conexão normal é flat.

Problema 2.12

Seguindo a notação introduzida no Problema 2.10 considere $N = (1 + 0\mathbf{i}, 1 + 0\mathbf{i})$. Então $iN = (0 + \mathbf{i}, 0 + \mathbf{i})$ é o vetor tangente a órbita que passa pelo ponto N . Considere agora os vetores $\bar{X} = (\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\mathbf{i}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\mathbf{i})$ e $\bar{Y} = (0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}, 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i})$. Note que $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ são ortogonais a N e assim tangentes a esfera. Por outro lado $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ são ortogonais a iN e assim ortogonais a órbita que passa por N . Por fim note que $\langle \bar{X}, i\bar{Y} \rangle = -1$. Assim Pelo Problema 2.10 temos que $K(X, Y) = 4$. Como $K(\bar{X}, \bar{Y}) = 1$ segue da fórmula do Problema 2.9 que $[\bar{X}, \bar{Y}]^\nu$ é diferente de zero. Assim a distribuição normal $\mathcal{H}$ não é integrável.

3 Variedades completas e o teorema de Hadamard

Teorema 3.1 (d.s.a). *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ variedade Riemanniana.*

(a) *Então as afirmações abaixo são equivalentes*

(a.1) *Existe $p \in M$ tal que $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ está bem definida.*

(a.2) *Os limitados fechados de M são compactos.*

(a.3) *M é completa como espaço métrico.*

(a.4) *M é geodesicamente completa, i.e., $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ está bem definida para todo $x \in M$.*

(b) *Se M é completa, i.e., uma das afirmações do item (a) é satisfeita, então dado p e q em M existe um segmento de geodésica minimizante ligando p a q .*

Problema 3.2. *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ variedade Riemanniana homogênea, i.e., para qualquer $x, y \in M$ existe uma isometria $g \in \text{Iso}(M)$ tal que $g(x) = y$. Mostre que M é completa.*

Problema 3.3. *Mostre que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são variedades Riemannianas completos.*

Problema 3.4. *Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante. Mostre que G é variedade Riemanniana completa.*

Problema 3.5. *É possível mostrar que a aplicação exponencial de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$ não é sobrejetora. Use este fato para concluir que $SL(2, \mathbb{R})$ não admite métrica bi-invariante.*

Proposição 3.6 (d.s.a). *Seja $F : \hat{M} \rightarrow M$ uma isometria local sobrejetora. Suponha que $\hat{M}$ é completa. Então F é recobrimento isométrico.*

Lema 3.7 (d.s.a). *Seja M variedade Riemanniana completa com $K \leq 0$. Então para qualquer $p \in M$ a aplicação $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é difeomorfismo local.*

Teorema 3.8 (d.s.a). *Seja M variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa com $K \leq 0$. Então, para todo $p \in M$, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é difeomorfismo.*

3.1 Sugestões

Problema 3.3: Para mostrar que $\mathbb{H}^n$ é variedade Riemanniana completa, pode-se mostrar que ele é homogêneo (vide e.g. Sec 1.E ou Sec. 3.L do livro de Gallot, Hulin, Lafontaine, ou Teorema 5.2 e Teorema 5.3 Cap 8 do livro do Carmo).

4 Isometrias e espaços de curvatura constante

Proposição 4.1 (d.s.a). *Sejam (M, g) e $(\hat{M}, g)$ variedades Riemannianas completas e $A : T_p M \rightarrow T_{\hat{p}} \hat{M}$ isometria linear. Seja $B_\epsilon(p)$ bola normal. Defina $F : B_\epsilon(p) \rightarrow \hat{M}$ como $F(x) := \exp_{\hat{p}} \circ A \circ (\exp_p|_{B_\epsilon(0)})^{-1}(x)$. Para cada $x \in B_\epsilon(p)$ defina $P : T_p M \rightarrow T_x M$ o transporte paralelo ao longo da única geodésica minimizante γ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(r) = x$ e $\|\gamma'\| = 1$. Defina $\hat{\gamma}(t) := \exp_{\hat{p}}(A\gamma'(0))$ e $\hat{P} : T_{\hat{p}} \hat{M} \rightarrow T_{\hat{\gamma}(r)} \hat{M}$ o transporte paralelo ao longo de $\hat{\gamma}$ do ponto $\hat{\gamma}(0)$ a $\hat{\gamma}(r) = F(x)$. Por fim defina $\phi := PAP^{-1}$. Suponha que*

$$g(R(X, Y)Z, W) = \hat{g}(\hat{R}(\phi(X), \phi(Y)), \phi(Z), \phi(W))$$

Então F é isometria local e $dF_p = A$.

Proposição 4.2 (d.s.a). *Sejam $F_i : (M, g) \rightarrow (\hat{M}, \hat{g})$, com $i = 1, 2$ duas isometrias locais da variedade Riemanniana conexa M na variedade Riemanniana $\hat{M}$. Suponha que existe $p \in M$ tal que $F_1(p) = F_2(p)$ e $d(F_1)_p = d(F_2)_p$. Então $F_1 = F_2$.*

Teorema 4.3 (d.s.a). *Seja (M, g) variedade Riemanniana completa simplesmente conexa com curvaturas seccionais K constante iguais a c . Então M é isométrica a $M(c)$ onde $M(c) = \mathbb{H}^n$ se $c = -1$, $M(c) = \mathbb{R}^n$ se $c = 0$ e $M(c) = \mathbb{S}^n$ se $c = 1$.*

Teorema 4.4 (d.s.a). *Seja S superfície compacta conexa, orientável. Então:*

- (a) *S admite métrica com $K = 1$ se e somente se $g(S) = 0$.*
- (b) *S admite métrica com $K = 0$ se e somente se $g(S) = 1$.*
- (c) *S admite métrica com $K = -1$ se e somente se $g(S) > 1$.*

5 Variação da Energia

Proposição 5.1 (d.s.a). *Sejam (M, g) variedade Riemanniana completa, $p, q \in M$ e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante ligando p a q . Então para qualquer curva $\beta : [0, a] \rightarrow M$ ligando p a q temos $E(\gamma) \leq E(\beta)$. A desigualdade vale se e somente se β for geodésica minimizante.*

Proposição 5.2 (d.s.a). *Sejam (M, g) variedade Riemanniana completa, $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ curva suave por partes, $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ uma variação de α , $E_f(s)$ a energia da variação, i.e., $E_f(s) := \int_0^a g(\frac{\partial f}{\partial t}(s, t), \frac{\partial f}{\partial t}(s, t)) dt$ e $V(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$. Então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} E_f(s) &= \sum_{i=0}^k g(\frac{\partial f}{\partial s}(s, t), \frac{\partial f}{\partial t}(s, t)) \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} - \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\frac{\partial f}{\partial s}(s, t), \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t)) dt \\ \frac{1}{2} \frac{d}{ds} E_f(0) &= \sum_{j=1}^k g(V(t_j), \alpha'(t_j^+) - \alpha'(t_j^-)) + g(V(a), \alpha'(a)) - g(V(0), \alpha'(0)) \\ &\quad - \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(V(t), \frac{\nabla}{dt} \alpha'(t)) dt \end{aligned}$$

Proposição 5.3 (d.s.a). *Seja (M, g) variedade Riemanniana completa. Uma curva diferenciável por partes $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ é uma geodésica se e somente se para toda variação própria f de α temos $\frac{d}{ds} E_f(0) = 0$.*

Proposição 5.4 (d.s.a). *Sejam (M, g) variedade Riemanniana completa, $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ geodésica, $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ uma variação de γ , $E_f(s)$ a energia da variação, i.e., $E_f(s) := \int_0^a g(\frac{\partial f}{\partial t}(s, t), \frac{\partial f}{\partial t}(s, t)) dt$ e $V(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$. Então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} E_f(0) &= g(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, a), \gamma'(a)) - g(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0)) \\ &\quad + \sum_{i=0}^k g(V(t), \frac{\nabla}{dt} V(t)) \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \\ &\quad - \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(V(t), \frac{\nabla^2}{dt^2} V(t)) + g(R(\gamma'(t), V(t))\gamma'(t), V(t)) dt \end{aligned}$$

ou de forma equivalente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} E_f(0) &= g(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, a), \gamma'(a)) - g(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0)) \\ &\quad + I_a(V, V) \end{aligned}$$

onde I_a é a forma do índice, i.e.,

$$I_a(V, W) := \int_0^a g(\frac{\nabla}{dt} V(t), \frac{\nabla}{dt} W(t)) - g(R(\gamma'(t), V(t))\gamma'(t), W(t)) dt$$

Problema 5.5 (d.s.a). Enuncie o teorema de Índice de Morse e conclua que dado uma geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ minimizante, então $\gamma(t)$ não pode ser ponto conjugado a $\gamma(0)$ para $0 < t < a$.

Teorema 5.6 (d.s.a). *Seja (M, g) variedade Riemanniana completa. Suponha que $\text{Ric}_p(X) \geq \frac{1}{r^2} > 0$ para todo $p \in M$ e todo $X \in T_p M$ com $\|X\| = 1$. Então:*

(a) *M é compacta com diâmetro menor ou igual a πr .*

(b) *O recobrimento universal de M é compacto e assim $\pi_1(M)$ é finito.*

Problema 5.7. Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ definimos a forma de Killing como

$$\Phi(X, Y) := \text{tr } \text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)$$

onde $\text{ad}(X)Y := [X, Y]$. O grupo (álgebra de Lie) é chamado semi-simples se Φ é não degenerada. Mostre que se $\mathfrak{g}$ é semi-simples e Φ é negativa definida então $-\Phi$ é métrica bi-invariante. (**Dica** Pode-se usar (sem demonstrar) que $\Phi(\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y) = \Phi(X, Y)$.)

Problema 5.8. Seja G um grupo de Lie que admite métrica bi-invariante. Mostre que $\text{Ric}(X, Y) = -\frac{1}{4}\Phi(X, Y)$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Em particular conclua que Ric não depende da métrica bi-invariante.

Problema 5.9. Seja G um grupo de Lie conexo semi-simples. Mostre que G é compacto se e somente se a sua forma de Killing é negativa definida.

Teorema 5.10 (d.s.a). *Seja (M, g) variedade Riemanniana compacta, orientável com dimensão par. Suponha que as curvaturas seccionais sejam sempre positivas. Então M é simplesmente conexa.*