

1^o Lista de Exercício de MAT5771 (1^o semestre 2008)

Esta lista contém problemas cuja solução poderá ser cobrada em prova. Ela também contém proposições e teoremas, alguns enunciados e outros **demonstrados em sala de aula** (abreviados aqui por **d.s.a**). A demonstração destes resultados também poderá ser cobrada em prova.

Bibliografia Principal:

1. M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides.
2. S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer.
3. J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitext, Springer.
4. R.S. Palais, C-L Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lectures Notes in Mathematics 1353, Springer Verlag. (see Terng).

Bibliografia de Apoio:

1. R. Bishop, R. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, AMS, Chelsea.
2. C. Gorodski, *Notes on Riemannian Geometry*, Notas de Aula, IME-USP, 2007.
3. W. Kuhnel, *Differential Geometry, Curves-surfaces-manifolds*. American Mathematical Society, Second Edition 2005.
4. P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate texts in mathematics, Springer.
5. M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, V. 1 Publish or Perish, Inc. 1979.

1 Variedades e métricas Riemannianas

Proposição 1.1. *Sejam V e W campos em uma variedade M . Então*

- (a) *Existe um único campo, denotado por $[V, W]$ tal que para toda função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ temos $[V, W] \cdot f = V \cdot (W \cdot f) - W \cdot (V \cdot f)$.*
- (b) *Suponha que em coordenadas temos $V = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $W = \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Então $[V, W] = \sum_i \sum_j (v_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_i}$.*

Problema 1.2. Sejam (E, π, B) e $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, B)$ fibrados vetoriais de posto n . Dizemos que eles são *isomorfos* se existe uma aplicação $F : E \rightarrow \tilde{E}$ tal que $\pi = \tilde{\pi} \circ F$ e $F : E_p \rightarrow \tilde{E}_p$ é um isomorfismo. Em particular um fibrado (E, π, B) de posto n é chamado *fibrado trivial* se ele é isomorfo a $B \times \mathbb{R}^n$.

- (1) Mostre que todo grupo de Lie G tem fibrado tangente trivial.
- (2) Mostre que o fibrado tangente da esfera $\mathbb{S}^2$ não é trivial.

Teorema 1.3 (d.s.a). *Toda variedade M admite métrica Riemanniana.*

Problema 1.4 (Espaço hiperbólico). Neste problema iremos ver as diferentes representações do espaço hiperbólico.

- (a) O *espaço de Minkowski* é definido como $\mathbb{R}^{n+1}$ com a forma quadrática $\langle x, x \rangle = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$. Considere $\mathbb{H}^{n+1}$ a subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$ definida como: $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}$. Verifique que a forma quadrática $-dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ restrita a $\mathbb{H}^n$ é uma métrica Riemanniana g .
- (b) Seja f a *pseudo-inversão* com polo $s = (-1, 0, \dots, 0)$ definida por $f(x) = s - \frac{2(x-s)}{\langle x-s, x-s \rangle}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma quadrática definida no Item (a). Para $X = (0, X_1, \dots, X_n)$ no plano $x_0 = 0$ denote $|X|^2 := \langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Mostre que f é difeomorfismo de $\mathbb{H}^n$ no disco unitário $\{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$ e que $g_1 := (f^{-1})^* g = 4 \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{(1-|x|^2)^2}$.
- (c) Seja h a inversão no $\mathbb{R}^n$ definida como $h(x) := s + \frac{2(x-s)}{|x-s|^2}$, com polo $s = (-1, 0, \dots, 0)$. Mostre que h é um difeomorfismo do disco unitário no semi-espaço $x_1 > 0$ e que $h^* g_1 = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{x_1}$.

Obtemos assim duas variedades Riemannianas que são isométricas a $(\mathbb{H}^n, g)$, a primeira é chamada *disco de Poincaré* (Item (b)) e a segunda *semi-espaço de Poincaré* (Item (c)).

Problema 1.5. Sejam g_1 e dr^2 métricas canônicas de $\mathbf{S}^{n-1}$ e $I = (0, \infty)$. Defina em $\mathbf{S}^{n-1} \times I$ a métrica $g_{(m,r)} := r^2 g_1 + dr^2$.

- (a) A métrica g é métrica produto?
- (b) Mostre $(\mathbf{S}^{n-1} \times I, g)$ é isométrico a $(\mathbb{R}^n - 0, \text{can})$ e que $(\mathbf{S}^{n-1} \times I, g_1 \times dr^2)$ é isométrico ao cilindro $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1, x_0 > 0\}$.

Problema 1.6. Sejam (M^m, g) variedade Riemanniana orientada e ω a m-forma volume (i.e, a única m-forma tal que $\omega(e_1, \dots, e_m)_p = 1$ para qualquer referencial ortonormal $\{e_i\}$ de $T_p M$ coerente com a orientação de $T_p M$). Mostre que em coordenadas $\omega = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Problema 1.7. Mostre que $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n)$ e $U(n)$ são grupos de Lie.

Problema 1.8. Seja G é um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$. Mostre que a aplicação exponencial de G coincide com a exponencial de matrizes.

Problema 1.9. Sejam G subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Verifique:

1. $dL_g X = gX$ e $dR_g X = Xg$.
2. $\text{Ad}(g)Y := \frac{d}{dt}(g \exp(tY)g^{-1})|_{t=0} = gYg^{-1}$.
3. Usando o fato (não precisa demonstrar) que $\frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp(tX))Y|_{t=0} = [X, Y]$ mostre que $[X, Y] = XY - YX$ (comutador de matrizes).

Proposição 1.10 (d.s.a). *Seja G grupo de Lie compacto. Então G admite métrica bi-invariante.*

Problema 1.11. Seja $\mathfrak{su}(n) := \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A = -A^*, \text{tr } A = 0\}$

1. Prove que $\mathfrak{su}(n)$ é a álgebra de Lie de $SU(n)$.
2. Verifique que o produto em $T_e SU(n)$ definido como $\langle X, Y \rangle := \Re \text{tr } (XY^*)$ pode ser estendido para uma métrica bi-invariante.

Problema 1.12. Seja $\mathfrak{so}(3) = \{A \in M(3, \mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$

1. Verifique que $\mathfrak{so}(3)$ é álgebra de Lie de $SO(3)$.
2. Seja $A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que $A_\xi v = \xi \times v$.
3. Verifique que $A_{\xi \times \eta} = [A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$. Conclua que a aplicação

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^3, \times) &\rightarrow \mathfrak{so}(3) \\ \xi &\rightarrow A_\xi \end{aligned}$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie.

4. Verifique que $\exp(A_\xi)$ é uma rotação em torno do eixo ξ com velocidade angular $\|\xi\|$.

Problema 1.13. Seja H subgrupo fechado de um grupo de Lie G . Mostre que a ação $G \times H \rightarrow G$ definida como $g \cdot h := gh$ é uma ação à direita, livre, própria.

Problema 1.14. Verifique os difeomorfismos abaixo:

- (a) $\mathbb{S}^n = SO(n+1)/SO(n)$.
- (b) $P^n(\mathbb{R}) = SO(n+1)/S(O(n) \times O(1))$.
- (c) $P^n(\mathbb{C}) = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$.

Problema 1.15. Seja G um grupo discreto (i.e., com topologia discreta). Suponha que G age em uma variedade M . Mostre que a ação é *propriamente descontinua* se e somente se a ação é livre e própria.

Problema 1.16. Seja G um subgrupo discreto de isometrias de uma variedade Riemanniana M . Mostre que M/G é variedade Riemanniana e $\pi : M \rightarrow M/G$ é recobrimento Riemanniano.

Comentário: O Problema 1.16 deve ser resolvido diretamente, i.e., **sem utilizar** o Teorema 1.18.

Problema 1.17. Seja $\{a_i\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Um lattice Γ associado a esta base é o conjunto de todos os vetores $\sum k_j a_j$ para $k_j \in \mathbb{Z}$. Identificando Γ com o subgrupo de translações podemos fornecer ao quociente $\mathbb{R}^n/\Gamma$ estrutura de variedade (vide Problema 1.16).

- (a) Mostre que existe um difeomorfismo $\hat{p} : \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow T^n$.
- (b) Seja g_Γ métrica definida em T^n tal que $\hat{p} : \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow T^n$ é isometria, onde a métrica em $\mathbb{R}^n/\Gamma$ foi definida no Problema 1.16. Mostre que g_Γ e $g_{\tilde{\Gamma}}$ definidas em T^n são isométricas se e somente se existe uma isometria em $\mathbb{R}^n$ que envia o lattice Γ no lattice $\tilde{\Gamma}$.

Teorema 1.18 (d.s.a). *Sejam M variedade Riemanniana com métrica g^M e G subgrupo fechado de isometrias de M . Suponha que a ação $G \times M \rightarrow M$ é livre. Então existe uma métrica $g^{M/G}$ em M/G tal que $\pi : (M, g^M) \rightarrow (M/G, g^{M/G})$ é submersão Riemanniana.*

Comentário: Visto que $P^n(\mathbb{C}) = S^{2n+1}/S^1$, segue do teorema acima que a submersão $\pi : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}/S^1$ induz uma métrica Riemanniana em $P^n(\mathbb{C})$. Tal métrica é chamada de métrica de *Fubini-Study*.

1.1 Sugestões

Proposição 1.1: Consulte e.g Carmo (Capítulo 0, Proposição 5.3)

Problema 1.2: Para verificar que o fibrado tangente da esfera não é trivial, utilize o fato de topologia que $\mathbb{S}^n$ (n par) não admite um campo X que nunca se anula.

Problema 1.4: Consulte e.g. Gallot, Hulin, Lafontaine (Seção 2.A, página 56,57) e Carmo (Capítulo 8, página 196,197).

Problema 1.5: Consulte Gallot, Hulin, Lafontaine (Seção 2.A, página 58,59).

Problema 1.6: Considere $e_i = \sum_j b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Note que $(b_{ij})^T(g_{ij})(b_{ij}) = Id$. Assim $\det(b_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}$. Por outro lado se $\omega = cd x_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ temos $1 = \omega(e_1, \dots, e_n) = c \det(b_{ij})$. Podemos então concluir que $c = \sqrt{\det(g_{ij})}$.

Problema 1.7:

Mostre diretamente que $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ são grupos de Lie. Depois mostre que $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$, $SL(n, \mathbb{C})$, e $U(n)$ são subgrupos fechados de $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ e use o resultado enunciado em sala de aula que *subgrupos fechados de grupos de Lie são subgrupos mergulhados de Lie*.

Problema 1.8:

Defina $\varphi(t) := \exp(tX)$. Usando o fato que φ é um homomorfismo de Lie a 1-parametro, conclua que φ é solução da E.D.O, $\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$ com $\varphi(0) = Id$. O resultado segue então de E.D.O (Cálculo IV).

Problema 1.14: Utilize o fato enunciado em sala de aula que se $G \times M \rightarrow M$ é uma ação própria (e.g. G é compacto) então $G(x)$ é mergulho de G/G_x . Para mostrar por exemplo que $P^n(\mathbb{R}) = SO(n+1)/S(O(n) \times O(1))$, note que a ação de $SO(n+1)$ na esfera $\mathbb{S}^n$ induz uma ação em $P^n(\mathbb{R})$ (visto que ação de matriz comuta com a ação por multiplicação por escalar).

Problema 1.16: Consulte e.g. Gallot, Hulin, Lafontaine (Capítulo 2, Seção 2.A, página 59).

Problema 1.17: Consulte Gallot, Hulin, Lafontaine (Capítulo 2, Seção 2.A, página 60,61).

2 Conexão e Curvatura

Problema 2.1. Sejam (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão ∇ e $\{\xi_i\}$ um referencial local definido em uma vizinhança coordenada U em M . Para $V = \sum_k v_k \xi_k$ denote $D_X V := \sum X \cdot v_k \xi_k$. Mostre que $\nabla_X V = D_X V + A(X)V$ determinando a matriz de 1-formas A em função dos símbolos de Christoffel $(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \xi_k)$ e em termos das 1-formas de conexão $(\nabla \xi_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes \xi_j)$.

Proposição 2.2 (d.s.a). *Sejam (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão ∇ e $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva suave. Considere $V_0 \in E_{\alpha(0)}$. Então existe uma única seção V ao longo de α tal que $\frac{\nabla}{dt} V = 0$ (seção paralela) e $V(0) = V_0$.*

Teorema 2.3 (d.s.a). *Seja (M, g) variedade Riemanniana. Então ela admite uma única conexão Riemanniana, i.e., compatível com a métrica e livre de torção.*

Problema 2.4. Sejam (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$ variedades Riemannianas com conexões Riemannianas ∇ e $\tilde{\nabla}$. Seja $F : M \rightarrow \tilde{M}$ isometria. Mostre que:

- (1) $dF_p \nabla_W V = (\tilde{\nabla}_{dF W} dF V)_{F(p)}$
- (2) F preserva transporte paralelo.

Proposição 2.5 (d.s.a). *Seja (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Então as afirmações abaixo são equivalentes:*

- (1) *Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M e um referencial local $\{\xi_i\}$ definido em U tal que $\nabla \xi_i = 0$.*
- (2) *O tensor curvatura é nulo.*
- (3) *Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M tal que o transporte paralelo em U independe do caminho.*

Proposição 2.6 (d.s.a). *Seja (E, M, π) fibrado vetorial com conexão ∇ . Sejam $\{\xi_i\}$ um referencial local definido em uma vizinhança U de M e ω_{ij} as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{\xi_i\}$, i.e., $\nabla \xi_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes \xi_j$. Considere um outro referencial local $\{\tilde{\xi}_i\}$ na vizinhança U de M . Sejam b_{ij} as funções tais $\tilde{\xi}_i = \sum_j b_{ij} \xi_j$. Então $\tilde{\omega} = db b^{-1} + b \omega b^{-1}$ onde $\tilde{\omega}$ denota a matriz de formas de conexão em relação ao referencial $\{\tilde{\xi}_i\}$.*

Proposição 2.7 (d.s.a). *Seja (E, M, π) fibrado vetorial com conexão ∇ . Sejam $\{\xi_i\}$ um referencial local definido em uma vizinhança U de M , ω_{ij} as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{\xi_i\}$ e Ω_{ij} as 2-formas de curvatura em relação ao referencial $\{\xi_i\}$, i.e., $R(\cdot, \cdot) \xi_i = \sum_j \Omega_{ij} \otimes \xi_j$. Então $-\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$*

Proposição 2.8 (d.s.a). *Seja (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Sejam $\{e_i\}$ um referencial ortonormal definido em uma vizinhança U , ω_i as suas 1-formas duais, i.e., $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, e ω_{ij} as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{e_i\}$. Então:*

- (a) $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$
- (b) $d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j$.

Problema 2.9. Sejam G grupo de Lie com métrica biinvariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e X, Y, Z campos invariantes a esquerda. Mostre que:

- (a) $\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle$
- (b) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$
- (c) $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$
- (d) $\langle R(X, Y)X, Y \rangle = \frac{1}{4}\langle [X, Y], [X, Y] \rangle$. Em particular conclua que a curvatura sectional é sempre maior ou igual a 0.

Problema 2.10. Faça os exercícios 1,2,3 e 8 do livro Carmo, Cap 2.

Problema 2.11. Faça os exercícios 6,7,8 do livro Carmo, Cap 4.

2.1 Sugestões

Problema 2.1:

- 1. $a_{kj} = \sum_i \Gamma_{ij}^k dx_i$
- 2. $a_{ij} = \omega_{ji}$.

Problema 2.5:

Use o lema enuciado em sala de aula (que será demonstrado na P2) que *Se as curvaturas seccionais são nulas, então M é localmente isométrico a $\mathbb{R}^m$.*

Problema 2.9:

Para provar o Item (a) lembre-se primeiro da definição da Adjunta dada no Problema 1.9, i.e, $\text{Ad}(g)Y := \frac{d}{dt}(g \exp(tY)g^{-1})|_{t=0}$ e usando a definição de métrica bi-invariante conclua que $\text{Ad}(g)$ é isometria. Depois utilize a fórmula $\frac{d}{dt}\text{Ad}(\exp(tX))Y|_{t=0} = [X, Y]$ dada no Problema 1.9. O item (b) seguirá do Item (a) e da fórmula que define a conexão Riemanniana, dada na demonstração do Teorema 2.3.

3 Geodésicas

Ao longo desta seção (M, g) denotará variedade Riemanniana com métrica g .

Proposição 3.1 (d.s.a). *Dado $q \in M$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\epsilon(0) \rightarrow M$ é difeomorfismo sobre um aberto de M .*

Proposição 3.2 (d.s.a). *Sejam $\exp_q : B_\epsilon(0) \rightarrow M$ bem definida, $S_\delta^{n-1}(0)$ esfera contida em $B_\delta(0)$ com $\tilde{\delta} < \delta$ e $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_\delta^{n-1}(0)$ curva suave. Defina $f(s, t) := \exp_q(tv(s))$. Então $g(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) = 0$.*

Proposição 3.3 (d.s.a). *Seja $B_\delta(q)$ uma bola normal. Defina $\alpha : [0, 1] \rightarrow B_\delta(q)$ como $\alpha(t) := \exp_q(tv)$ com $\|v\| < \delta$. Seja $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ curva suave por partes tal que $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$. Então $L(\alpha) \leq L(\beta)$. Se a igualdade vale então $\beta[0, 1] = \alpha[0, 1]$.*

Proposição 3.4 (d.s.a). *Dado $q \in M$ existe vizinhança W de q tal que, se x, y pertencem a W então existe uma única geodésica minimizante ligando x a y .*

Proposição 3.5 (d.s.a). *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva suave por partes tal que $d(\gamma(0), \gamma(1)) = L(\gamma)$. Então γ é imagem de uma geodésica.*

Problema 3.6. Faça os exercicios 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 Capítulo 3 do livro do Carmo.

Problema 3.7. Suponha que M é variedade Riemanniana compacta. Mostre que toda geodésica está definida para todos valores de $\mathbb{R}$.

3.1 Sugestões

Problema 3.7: Considere o campo geodésico restrito ao fibrado tangente unitário $T^1(M) := \{V_x \in T_x M, \|V_x\| = 1\}_{x \in M}$ e aplique o resultado que afirma que *todo campo suave definido em variedade compacta gera um grupo a 1 parametro de difeomorfismos*.