

Introdução à Geometria Riemanniana

Segunda Prova de MAT 5771

Data: 07 de julho de 2008

Nome: _____

Resultado: _____

1. A prova tem duração de 2 horas.
2. A prova pode ser feita a lápis.
3. Justifique todas as afirmações, enunciando os teoremas e propriedades usados.
4. Você deve escolher no máximo 2 questões de 1 ponto, 3 questões de 2 pontos e 2 questões de 3 pontos de forma que a soma dos pontos seja no máximo 10 (ou 11) pontos. Marque as questões escolhidas com um X na coluna $Aluno(a)$ na tabela abaixo.

	$Aluno(a)$	Professor
Q 1.1 (1,0 pt)		
Q 1.2 (1,0 pt)		
Q 1.3 (1,0 pt)		
Q 1.4 (1,0 pt)		
Q 2.1 (2,0 pt)		
Q 2.2 (2,0 pt)		
Q 2.3 (2,0 pt)		
Q 2.4 (2,0 pt)		
Q 3.1 (3,0 pt)		
Q 3.2 (3,0 pt)		
Q 3.3 (3,0 pt)		
Q 3.4 (3,0 pt)		
Pontuação:		

1 Questões de 1 ponto

Escolha no máximo 2 questões.

Questão 1.1 (1 pt). Seja δ tal que $\exp_p : B_\delta(p) \rightarrow M$ está bem definida. Defina a curva $\alpha(t) := \exp_p(tv_0)$ com $\|v_0\| = 1$ e $|t| < \delta$. Para $w \in T_p M$ considere o campo tw ao longo do segmento $t \rightarrow tv_0$. Mostre que $J(t) := d(\exp_p)_{tv_0} tw$ é campo de Jacobi com $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt} J(0) = w$.

Questão 1.2 (1 pt). Sejam M variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ geodésica com vetor velocidade 1. Mostre que o campo de Jacobi J ao longo de α com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt} J(0) = w$ para w perpendicular a $\alpha'(0)$ é $J(t) = c_K(t)w(t)$ onde $w(\cdot)$ é o transporte paralelo de w ao longo de α e c_K é a função definida como $c_K(t) := \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}$ se $K > 0$, $c_K(t) := t$ se $K = 0$ e $c_K(t) := \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}$ se $K < 0$.

Questão 1.3 (1 pt). Seja G um grupo de Lie com métrica bi-invariante e $H \subset G$ subgrupo fechado. Mostre que H é subvariedade totalmente geodésica.

Questão 1.4 (1 pt). Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ variedade Riemanniana homogênea, i.e., para qualquer $x, y \in M$ existe uma isometria $g \in \text{Iso}(M)$ tal que $g(x) = y$. Mostre que M é completa.

2 Questões de 2 pontos

Escolha no máximo 3 questões.

Questão 2.1 (2 pt). Sejam (M^n, g) variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\psi : (0, \delta) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow B_\delta(p)$ parametrização geodésica polar, i.e., $\psi(r, v) := \exp_p(rAv)$ onde $A : (\mathbb{R}^n, g_0) \rightarrow (T_p M, g)$ é isometria linear. Mostre que a métrica g em coordenadas geodésicas polares é $dr^2 + (c_K(r))^2 ds^2$ onde ds^2 é a métrica canônica da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ e a função c_K foi definida na Questão 1.2. Conclua que duas variedades Riemannianas com mesma dimensão e mesmas curvaturas seccionais constantes iguais a K são localmente isométricas.

Questão 2.2 (2 pt). Seja M subvariedade Riemanniana de uma variedade Riemanniana $(\tilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e denote $R, \tilde{R}$ os tensores curvaturas de M e $\tilde{M}$ e B o $(1, 2)$ tensor segunda forma de M . Mostre que

$$\langle R(X, Y)X, Y \rangle - \langle \tilde{R}(X, Y)X, Y \rangle = \langle B(X, X), B(Y, Y) \rangle - \langle B(X, Y), B(X, Y) \rangle$$

Questão 2.3 (2 pt). Seja M variedade Riemanniana completa com $K \leq 0$.

- (a) Mostre que para qualquer $p \in M$ a aplicação $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é difeomorfismo local.
- (b) Supondo que M é simplesmente conexa, mostre que para todo $p \in M$, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é difeomorfismos.

Dica: Pode-se usar, sem demonstrar, que se $F : \hat{N} \rightarrow N$ é uma isometria local sobrejetora e $\hat{N}$ é completa então F é recobrimento isométrico.

Questão 2.4 (2 pt). Sejam (M, g) variedade Riemanniana completa, $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ geodésica, $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ uma variação de γ , $E_f(s)$ a energia da variação, i.e., $E_f(s) := \int_0^a g(\frac{\partial f}{\partial t}(s, t), \frac{\partial f}{\partial t}(s, t)) dt$ e $V(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$. Mostre que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} E_f(0) &= g(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, a), \gamma'(a)) - g(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0)) \\ &+ \sum_{i=0}^k g(V(t), \frac{\nabla}{dt} V(t)) \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \\ &- \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(V(t), \frac{\nabla^2}{dt^2} V(t)) + g(R(\gamma'(t), V(t)) \gamma'(t), V(t)) dt \end{aligned}$$

ou de forma equivalente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} E_f(0) &= g(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, a), \gamma'(a)) - g(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0)) \\ &+ I_a(V, V) \end{aligned}$$

onde I_a é a forma do índice, i.e.,

$$I_a(V, W) := \int_0^a g(\frac{\nabla}{dt} V(t), \frac{\nabla}{dt} W(t)) - g(R(\gamma'(t), V(t)) \gamma'(t), W(t)) dt$$

3 Questões de 3 pontos

Escolha no máximo 2 questões.

Questão 3.1 (3 pt). Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto com métrica Riemanniana g . Considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ referencial ortonormal (em relação a métrica g) definido em U , ω_i as formas duais de $\{e_i\}$ e ω_{ij} as formas de conexão Riemannianas da métrica g em relação ao referencial $\{e_i\}$. Seja A um 2 tensor simétrico definido por $A(X, Y) := \sum_i \omega_{i, n+1}(X) \otimes \omega_i(Y)$. Defina $\omega_{n+1, i} := -\omega_{i, n+1}$ e ω a matriz de 1-formas formada por $\omega_{A, B}$ com A, B variando de 1 a $n+1$. Suponha que ω atende formalmente as equações de Gauss e Codazzi de uma hipersuperfície no espaço Euclidiano, i.e., $d\omega = \omega \wedge \omega$. Mostre que dado $x_0 \in U$, $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ e uma base ortonormal $v_1, \dots, v_{n+1} \in T_{p_0} \mathbb{R}^{n+1}$ existe, para um aberto $\tilde{U} \subset U$ de x_0 suficientemente pequeno, uma única imersão isométrica $\Psi : (\tilde{U}, g) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ tal que $d\Psi_{x_0} e_i = v_i$ onde $i = 1, \dots, n$. Além disto $A(X, Y) = \Pi(d\Psi X, d\Psi Y)$, onde Π é a segunda forma da hipersuperfície $M := \Psi(\tilde{U})$ associada ao vetor N normal a M com $N(p_0) = v_{n+1}$.

Questão 3.2 (3 pt). Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ variedade Riemanniana. M é chamada completa se atende uma das equivalências abaixo.

- (1) Existe $p \in M$ tal que $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ está bem definida.
- (2) Os limitados fechados de M são compactos.
- (3) M é completa como espaço métrico.

- (4) M é geodesicamente completa, i.e, $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ está bem definida para todo $x \in M$.

Se M é completa, mostre que dado p e q em M existe um segmento de geodésica minimizante ligando p a q .

Questão 3.3 (3 pt). Seja S superfície compacta conexa, orientável. Mostre que:

- (a) S admite métrica com $K = 1$ se e somente se $g(S) = 0$.
- (b) S admite métrica com $K = 0$ se e somente se $g(S) = 1$.
- (c) S admite métrica com $K = -1$ se e somente se $g(S) > 1$.

Questão 3.4 (3 pt). Seja (M, g) variedade Riemanniana completa. Suponha que $\text{Ric}_p(X) \geq \frac{1}{r^2} > 0$ para todo $p \in M$ e todo $X \in T_p M$ com $\|X\| = 1$. Mostre que:

- (a) M é compacta com diâmetro menor ou igual a πr .
- (b) O recobrimento universal de M é compacto e assim $\pi_1(M)$ é finito.