

Introdução à Geometria Riemanniana

Primeira Prova de MAT 5771

Data: 23 de abril de 2008

Nome: _____

Resultado: _____

1. A prova tem duração de 2 horas.
2. A prova pode ser feita a lápis.
3. Justifique todas as afirmações, enunciando os teoremas e propriedades usados.
4. Você deve escolher no máximo 2 questões de 1 ponto, 3 questões de 2 pontos e 2 questões de 3 pontos de forma que a soma dos pontos seja no máximo 10 (ou 11) pontos. Marque as questões escolhidas com um X na coluna $Aluno(a)$ na tabela abaixo.

	$Aluno(a)$	Professor
Q 1 (1,0 pt)		
Q 2 (1,0 pt)		
Q 3 (1,0 pt)		
Q 4 (1,0 pt)		
Q 5 (2,0 pt)		
Q 6 (2,0 pt)		
Q 7 (2,0 pt)		
Q 8 (2,0 pt)		
Q 9 (3,0 pt)		
Q 10 (3,0 pt)		
Q 11 (3,0 pt)		
Q 12 (3,0 pt)		
Pontuação:		

1 Questões de 1 ponto

Escolha no máximo 2 questões.

Problema 1 (1pt). Demonstre que toda variedade M admite métrica Riemanniana.

Problema 2 (1pt). Seja G subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$. Mostre que a aplicação exponencial de G coincide com a exponencial de matrizes.

Problema 3 (1pt). Sejam (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão ∇ e $\{\xi_i\}$ um referencial local definido em uma vizinhança coordenada U em M . Para $V = \sum_k v_k \xi_k$ denote $D_X V := \sum X \cdot v_k \xi_k$. Mostre que $\nabla_X V = D_X V + A(X)V$ determinando a matriz de 1-formas A em função dos símbolos de Christoffel ($\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \xi_k$).

Problema 4 (1pt). Seja (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Suponha que para $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M tal que o transporte paralelo em U independe do caminho. Mostre que existe uma vizinhança $\tilde{U}$ de p em M e um referencial local $\{\xi_i\}$ definido em $\tilde{U}$ tal que $\nabla \xi_i = 0$ e em particular que o tensor curvatura é nulo em $\tilde{U}$.

2 Questões de 2 pontos

Escolha no máximo 3 questões.

Problema 5 (2pt). Seja G grupo de Lie compacto. Mostre que G admite métrica bi-invariante.

Problema 6 (2pt). Seja (M, g) variedade Riemanniana. Mostre que ela admite uma única conexão Riemanniana, i.e, compatível com a métrica e livre de torção.

Problema 7 (2pt). Sejam (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$ variedades Riemannianas com conexões Riemannianas ∇ e $\tilde{\nabla}$. Seja $F : M \rightarrow \tilde{M}$ isometria. Mostre que:

- (1) $dF_p \nabla_W V = (\tilde{\nabla}_{dFW} dFV)_{F(p)}$
- (2) F preserva transporte paralelo.
- (3) F leva geodésica em geodésica.

Problema 8 (2pt). Sejam G grupo de Lie com métrica biinvariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e X, Y, Z campos invariantes a esquerda. Mostre que:

- (a) $\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle$
- (b) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$
- (c) $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$ e $\langle R(X, Y)X, Y \rangle = \frac{1}{4}\langle [X, Y], [X, Y] \rangle$. Em particular conclua que a curvatura sectional é sempre maior ou igual a 0.
- (d) As geodésicas de G que partem de e são subgrupo a 1-parametro, i.e, a aplicação exponencial de Lie coincide com $\exp_e$.

Dica: Pode-se usar (sem demonstrar) que $\frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp(tX))Y|_{t=0} = [X, Y]$ onde $\text{Ad}(g)Y := \frac{d}{dt}(g \exp(tY)g^{-1})|_{t=0} = dL_g dR_{g^{-1}}Y$

3 Questões de 3 pontos

Escolha no máximo 2 questões.

Problema 9 (3 pt). Sejam (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão Riemanniana. Sejam $\{e_i\}$ um referencial ortonormal definido em uma vizinhança U , ω_i as suas 1-formas duais, i.e, $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, e ω_{ij} as 1-formas de conexão em relação ao referencial $\{e_i\}$. i.e., $\nabla e_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes e_j$. Mostre que :

- (a) $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$
- (b) $d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j$.

Problema 10 (3 pt). Sejam (M, g) variedade Riemanniana e $\exp_q : B_\epsilon(0) \rightarrow M$ bem definida. Denote $S_\delta^{n-1}(0)$ esfera contida em $B_\delta(0)$ com $\tilde{\delta} < \delta$ e considere $v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_\delta^{n-1}(0)$ com sendo uma curva suave. Defina $f(s, t) := \exp_q(tv(s))$. Demonstre que $g(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) = 0$.

Problema 11 (3 pt). Seja (M, g) variedade Riemanniana. Seja $B_\delta(q)$ uma bola normal. Defina $\alpha : [0, 1] \rightarrow B_\delta(q)$ como $\alpha(t) := \exp_q(tv)$ com $\|v\| < \delta$. Seja $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ curva suave por partes tal que $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$. Demonstre que $L(\alpha) \leq L(\beta)$ e que se a igualdade vale então $\beta[0, 1] = \alpha[0, 1]$.

Problema 12 (3 pt). Seja (M, g) variedade Riemanniana com conexão Riemanniana ∇ . Mostre que:

- (a) Dado $p \in M$ existe referencial ortonormal $\{e_i\}$ definido em uma vizinhança de p tal que $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$.
- (b) $\Delta(f.g) = f \Delta g + g \Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle$ onde f e g são funções suaves de M .
- (c) Se M é compacta, orientada e conexa e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é função harmônica, i.e, $\Delta f = 0$, então f é constante em M .

Dica: Pode-se usar (sem demonstrar) que $d(i_X \nu) = (\text{div } X)\nu$ onde ν é a m-forma volume de M^m .