

1 Parte 1

Esta seção contém questões que poderão ser cobradas na segunda prova.
Todas estas questões foram resolvidas em sala de aula.

Questão 1. Considere $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação à esquerda. Mostre que:

i) Dado $\xi \in T_e G$,

$$\vec{\xi}_p = \left. \frac{d}{dt}(\exp(t\xi) \cdot p) \right|_{t=0}$$

define um campo suave em M .

ii) O fluxo de $\vec{\xi}$ é $\varphi(t, \cdot) := \mu(\exp(t\xi), \cdot)$.

Questão 2. Seja (E, B, π, G) um fibrado principal. Mostre que existe uma ação à direita, livre e própria de G em E tal que $\{\pi^{-1}(x)\}_{x \in B}$ são órbitas.

Questão 3. Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ ação e denote $\mu(x, \cdot)$ por $\mu_x(\cdot)$.

(a) Mostre que $\ker(d(\mu_x)_{g_0}) = T_{g_0}(g_0 G_x)$.

(b) Considere a aplicação $\tilde{\mu}_x : G/G_x \rightarrow M$ tal que $\tilde{\mu}_x \circ \pi = \mu_x$. Mostre que $\tilde{\mu}_x : G/G_x \rightarrow M$ é imersão injetora.

(c) Se a ação for própria mostre que $\tilde{\mu}_x : G/G_x \rightarrow M$ é um mergulho.

(d) Mostre que a esfera $\mathbb{S}^2$ é difeomorfa a $SO(3)/SO(2)$.

Questão 4. Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria. Demonstre que, fixando $x \in M$, existe slice em x .

Questão 5. Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria e S_{x_0} um slice. Demonstre que:

a) $G(S_{x_0})$ é vizinhança G -invariante da órbita $G(x_0)$.

b)

$$\begin{aligned} \psi : G \times_{G_{x_0}} S_{x_0} &\longrightarrow G(S_{x_0}) \\ [g, s] &\longmapsto \mu(g, s) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo G -equivariante, isto é, $a \cdot \psi[g, s] = \psi(a[g, s]) = \psi[ag, s]$, para todo $a \in G$.

Questão 6. *Seja M uma variedade Riemanniana completa (conexa). Demonstre que a ação definida por*

$$\begin{aligned}\mu : \text{Iso}(M) \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto g(x)\end{aligned}\tag{1}$$

é própria.

Questão 7. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria. Demonstre que existe uma métrica em M tal que $\mu(G)$ é subgrupo fechado de $\text{Iso}(M)$.*

Questão 8. *Sejam $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação Riemanniana própria e $G(x)$ órbita principal.*

- (a) *Dado um vetor unitário $v \in T_x(G(x))^\perp$ demonstre que é possível definir um campo normal unitário $\hat{v}$ ao longo de $G(x)$ tal que $\hat{v}_{g \cdot x} = d(\mu^g)_x v$ onde $\mu(\cdot, g)$ é denotado por μ^g .*
- (b) *$\mathcal{A}_{\hat{v}_{g \cdot x}} = d\mu^g \mathcal{A}_{\hat{v}_x} d\mu^{g^{-1}}$ onde $\mathcal{A}_{\hat{v}_x} W = -\nabla_W^\top \hat{v}$.*
- (c) *Mostre que as curvaturas de $G(x)$ ao longo de $\hat{v}$ são constantes.*
- (d) *Mostre que o conjunto $\{\exp_y(r \hat{v}(y)) \mid y \in G(x)\}$ é uma órbita para todo número r fixo.*
- (e) *Demonstre que, se uma geodésica é ortogonal a uma órbita (regular ou singular), então a geodésica é ortogonal a todas órbitas que encontra.*

Questão 9. *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação própria. Demonstre que o conjunto dos pontos contidos em órbitas principais é um conjunto aberto e denso.*

Questão 10. *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria. Demonstre que, dado um ponto $p \in M$, existe uma vizinhança G -invariante U do ponto p tal que U tem somente um número finito de tipos de órbitas. Em particular se M é compacta, M tem um número finito de tipos de órbitas.*

2 Parte 2

Esta seção contém alguns resultados demonstrados em sala de aula (abreviados por d.s.a) cujas demonstrações o aluno deveria conhecer e alguns problemas que o aluno deveria saber resolver.

Teorema 11 (d.s.a). *Seja $\mu : G \times M \longrightarrow M$ uma ação livre e própria. Então, $(M, \pi, M/G, G)$ é fibrado principal, sendo $\pi : M \longrightarrow M/G$.*

Corolário 12 (d.s.a). *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo normal. Então, G/H admite estrutura suave que o torna um grupo de Lie. Mais ainda, $\pi : G \longrightarrow G/H$ é homomorfismo de Lie.*

Proposição 13 (d.s.a). *Seja G um grupo de Lie conexo e considere $\rho : \tilde{G} \longrightarrow G$ o recobrimento universal. Então:*

- i) $H = \rho^{-1}(e)$ é um subgrupo de Lie fechado, normal e discreto. Além disso, $hg = gh$, para todos $h \in H, g \in G$.
- ii) G é isomorfo a $\tilde{G}/H$
- iii) $\pi_1(G)$ é abeliano.

Problema 14. *Mostre que $SU(2)$ é o recobrimento universal de $SO(3)$. Para tanto resolva os itens a seguir.*

- (a) *Mostre que a esfera $\mathbb{S}^3$ contida nos quatérnios $\mathbb{H}$ é isomorfa a $SU(2)$.*
- (b) *Seja $g \in \mathbb{S}^3$, $\theta \in \mathbb{R}$ e u vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ tal que $g = \cos(\theta) + \sin(\theta)u$. Defina $T_g(v) = gvg^{-1}$ para $v \in \mathbb{R}^3$. Mostre que:*
 - (b1) $T_g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
 - (b2) $T_g = e^{A_{2\theta}u}$ onde $A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix}$.
 - (b3) $\varphi : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$ definido como $\varphi(g) = T_g$ é recobrimento.
 - (b4) *Conclua que o grupo fundamental de $SO(3)$ é $\mathbb{Z}_2$.*

Problema 15. *Considere a ação por conjugação do grupo $SU(3)$ nele mesmo. Mostre que as órbitas são isomorfas a uma das três variedades abaixo.*

- (a) λId onde $\lambda^3 = 1$ e Id é a matriz identidade.
- (b) $SU(3)/T^2$ onde T^2 é o grupo das matrizes diagonais complexas $(t_{i,j})$, tal que $|t_{i,i}| = 1$ e $t_{1,1} \cdot t_{2,2} \cdot t_{3,3} = 1$.
- (c) *Projetivo complexo $\mathbb{CP}(2)$. Em particular mostre que $\mathbb{CP}(2)$ é isomorfo a $SU(3)/S(U(2) \times U(1))$.*