

1^o Lista de Exercício de MAT6416 (1^o semestre 2007)

Esta lista contém problemas e pequenas proposições cuja solução poderá ser cobrada em prova. Ela também contém alguns Teoremas e Proposições **demonstrados em sala de aula** (abreviados aqui por **d.s.a**). A demonstração destes resultados poderá ser cobrada em prova.

Problema 1. Mostre que $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n)$ e $U(n)$ são grupos de Lie.

Problema 2. Mostre que se H é subgrupo de Lie mergulhado de um grupo de Lie G , então H é fechado.

Teorema 3 (d.s.a). *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja $\mathfrak{h}$ subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Então existe um único subgrupo de Lie conexo $H \subset G$ com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.*

Problema 4. Sejam G e H grupos de Lie conexos e $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfismo de Lie sobrejetor. Mostre que φ é aplicação de recobrimento se e somente se $d\varphi_e$ é um isomorfismo.

Teorema 5 (d.s.a). *Sejam G , H grupos de Lie e $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ homomorfismo de álgebras de Lie. Então:*

1. *Existe uma vizinhança U de e e aplicação $\varphi : U \rightarrow H$ suave tal que*
 - (a) $\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$ para $a, b, ab^{-1} \in U$ (homomorfismo local).
 - (b) $d\varphi_e = \theta$.
2. *Se G for simplesmente conexo, então existe um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $d\varphi_e = \theta$.*
3. *Se G é conexo e existem dois homomorfismos $\varphi, \psi : G \rightarrow H$ com $d\varphi_e = d\psi_e = \theta$ então $\varphi = \psi$.*
4. *Se G e H são conexos e simplesmente conexos e θ é um isomorfismo, então G e H são isomorfos.*

Proposição 6. *Seja G um grupo de Lie e G^0 a componente conexa da identidade. Então:*

1. G^0 é um subgrupo de Lie de G normal.
2. As componentes conexas de G são da forma gG^0 .
3. Dado uma vizinhança U de e então $G^0 = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$ onde $U^n = \{g_1^{\pm} \cdots g_n^{\pm} \mid g_i \in U\}$

Proposição 7 (d.s.a). *Seja G um grupo conexo de Lie. Suponha que a álgebra de Lie é abeliana ($[X, Y] = 0$, para qualquer $X, Y \in \mathfrak{g}$). Então G é grupo abeliano.*

Proposição 8 (d.s.a). *Se G é um subgrupo de Lie de $GL(n)$ então a aplicação exponencial de G coincide com a exponencial de matrizes.*

Proposição 9 (d.s.a). *Seja $\varphi : G \rightarrow H$ um homomorfismo entre os grupos de Lie G e H . Então $\varphi \circ \exp^G = \exp^H \circ d\varphi$.*

Proposição 10 (d.s.a). $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$ para qualquer $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Proposição 11 (d.s.a). *Sejam G subgrupo de Lie de $GL(n)$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Então*

1. $dL_g X = gX$ e $dR_g X = Xg$.
2. $\text{Ad}(g)Y = gYg^{-1}$.
3. $[X, Y] = XY - YX$ (comutador de matrizes).

Problema 12. Seja $\mathfrak{so}(3) = \{A \in M(3, \mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$

1. Verifique que $\mathfrak{so}(3)$ é álgebra de Lie, com $[A, B] = AB - BA$.

2. Seja $A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que $A_\xi v = \xi \times v$.

3. $A_{\xi \times \eta} = [A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$. Conclua que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \times) & \rightarrow & \mathfrak{so}(3) \\ \xi & \rightarrow & A_\xi \end{array}$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie.

4. Mostre que $\mathfrak{so}(3)$ é álgebra de Lie de $SO(3)$.
5. Verifique que $\exp(A_\xi)$ é uma rotação em torno do eixo ξ com velocidade angular $\|\xi\|$.

Problema 13. Seja $\mathfrak{su}(3) = \{A \in M(3, \mathbb{C}) \mid A = -A^*, \text{tr } A = 0\}$

1. Verifique que $\mathfrak{su}(3)$ é álgebra de Lie.
2. Prove que $\mathfrak{su}(3)$ é álgebra de Lie de $SU(3)$.

Para demonstrar o próximo Teorema o aluno pode assumir (sem demonstrar) o seguinte resultado demonstrado em sala de aula: *Seja H um subgrupo de um grupo de Lie G . Suponha que H é fechado. então H é subgrupo de Lie.*

Teorema 14 (d.s.a). *Seja $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfismo contínuo entre os grupos de Lie G e H . Então φ é suave. Caso G e H tenham estrutura analítica (grupos de Lie reais sempre admitem estrutura analítica) então φ é analítico.*

Proposição 15. *Seja G um grupo de Lie conexo. Seja $Z(G)$ o centro de G i.e., $Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \text{ para qualquer } g \in G\}$. Então $\ker \text{Ad} = Z(G)$.*

Problema 16. Mostre que

- (a) $Z(U(3)) = \{zI \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.
- (b) $SU(3) \cap Z(U(3)) = \{zI \mid z^3 = 1\}$.

Proposição 17 (d.s.a). *Seja G um grupo de Lie compacto. Então G admite métrica bi-invariante.*

Na demonstração da próxima proposição, o aluno pode utilizar (sem demonstrar) o Teorema de Hopf-Rinow (enunciado em sala de aula) e o seguinte fato demonstrado em sala de aula: *Se G é um grupo de Lie com métrica bi-invariante, então exponencial de Lie $\exp$ coincide com a exponencial riemanniana $\exp_e$*

Proposição 18 (d.s.a). *Seja G um grupo de Lie compacto. Então $\exp$ é aplicação sobrejetora.*

Problema 19. Sabendo que a aplicação $\exp$ de $SL(2, \mathbb{R})$ não é sobrejetora, mostre que $SL(2, \mathbb{R})$ não admite métrica tal que a aplicação exponencial de Lie e a aplicação exponencial riemanniana em e coincidam.

Proposição 20. *Sejam G grupo de Lie com métrica bi-invariante, X, Y, Z campos invariantes a esquerda. Então:*

- (a) $\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle$
- (b) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$
- (c) $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$
- (d) $\langle R(X, Y)X, Y \rangle = \frac{1}{4}\langle [X, Y], [X, Y] \rangle$. *Em particular conclua que a curvatura sectional é sempre maior ou igual a 0.*

Proposição 21 (d.s.a). *Seja B a forma de Killing de um grupo de Lie conexo G .*

- (a) $B(X, Y) = B(\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y)$.
- (b) *Se G admite métrica bi-invariante, então $\text{Ric}(X, Y) = -\frac{1}{4}B(X, Y)$. Em particular a curvatura de Ricci independe da métrica bi-invariante.*

Para demonstra o teorema a seguir, o aluno poderá usar o Teorema de Bonnet-Myers (enunciado em sala de aula).

Teorema 22 (d.s.a). *Seja G um grupo de Lie conexo semi-simples. Então G é compacto se e somente se a forma de Killing for negativa definida.*

Proposição 23 (d.s.a). *Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo G com métrica bi-invariante. Então*

- (a) $\mathfrak{g}$ é igual a soma direta ortogonal $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ de ideais simples.
- (b) G é isomorfo a um produto de subgrupos normais de Lie $G_1 \times \cdots \times G_n$ tais que:
 - (b1) $\mathfrak{g}_i$ é álgebra de Lie de G_i .
 - (b2) Se $\mathfrak{g}_i$ é comutativa, então $G_i = \mathbb{R}$. Se $\mathfrak{g}_i$ não é comutativa, então G_i é compacto.

Proposição 24 (d.s.a). *Se a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie compacto é simples, então a métrica bi-invariante é única a menos de multiplicação por constante positiva. Tais métricas tem curvatura de Ricci constantes.*

Problema 25. Seja G um grupo conexo de Lie, simplesmente conexo com métrica bi-invariante. Suponha que $\mathfrak{g}$ é semi-simples. Classifique as todas as métricas bi-invariantes de G em termos de formas de Killing e as decomposições em ideais simples $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ de $\mathfrak{g}$ (vide Proposição 23).