

MAT 5711 - Cálculo Avançado

2º Prova - 14/06/2006

Nome: _____

Número USP: _____

Professor: _____

Q 1	
Q 2	
Q 3	
Q 4	
Nota	

Justifique suas respostas

Questão 1. (2,5pt)

- a) Enuncie o teorema de Fubini.
- b) Demonstre o teorema de Fubini.

Questão 2 (3,0pt). Seja S uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ orientada por um vetor normal unitário N . Suponha que existe uma parametrização $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ injetora tal que U é limitado e $N = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2}}{\|\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2}\|}$. Seja ω a forma volume de $\mathbb{R}^3$ e $\tilde{\omega}$ a forma volume de S , i.e., a 2-forma $\omega(N, \cdot, \cdot)$ restrita a S .

a) Mostre que

$$\psi^* \tilde{\omega} = \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right\| du_1 \wedge du_2.$$

Conclua que

$$\int_S f \cdot \tilde{\omega} = \int_U f \circ \psi \cdot \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right\|$$

onde f é uma função suave definida em $\mathbb{R}^3$.

b) Suponha que S é definida pelas equações abaixo e orientada por um vetor normal unitário apontando para cima.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2y + 3, z \geq x^2 + y^2\}$$

Calcule $\int_S f \cdot \tilde{\omega}$ para $f(x, y, z) = y$.

Questão 3 (2,5pt). Sejam ω a forma volume de $\mathbb{R}^3$ e X um campo de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$. Defina $i_X\omega$ como sendo a 2-forma $\omega(X, \cdot, \cdot)$.

- a) Mostre que $d(i_X\omega) = \text{div}(X)\omega$.
- b) Sejam S uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ fechada de classe C^∞ e U o sólido que tem S como fronteira. Suponha que S é orientada por um vetor normal unitário N apontando para fora. Mostre que $i_X\omega$ restrita a S é a 2-forma suave $\langle X, N \rangle \tilde{\omega}$ onde $\tilde{\omega}$ é a forma volume de S .
- c) Enuncie o teorema de Stokes.
- d) Por fim, demonstre o teorema de Gauss, i.e.,

$$\int_U \text{div}(X)\omega = \int_S \langle N, X \rangle \tilde{\omega}$$

Questão 4 (2,0pt). Considere a superfície definida abaixo:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$$

Considere o campo definido abaixo:

$$F(x, y, z) = (x + \exp(y), yz + \sin^2(x), 5 + z^2)$$

Calcule o fluxo do campo F através da superfície S orientada pelo vetor normal unitário N o qual tem terceira componente positiva.