

MAT 5711 - Cálculo Avançado

1º Prova - 10/05/2006

Nome: _____

Número USP: _____

Professor: _____

Q 1	
Q 2	
Q 3	
Q 4	
Nota	

Justifique suas respostas

Questão 1 (2,5pt). a) Seja F um campo suave definido em um aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que as afirmações abaixo são equivalentes.

(1) F é campo conservativo.

(2) Dados dois pontos p_0 e p_1 de Ω , o trabalho de F ao longo de qualquer caminho ligando p_0 a p_1 independe deste caminho.

b) Seja $F(X) = h(r)X$ onde $r := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ e $h : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é função suave ($0 < a < b$).

b 1) Mostre que F é conservativo.

b 2) Mostre que o potencial de F é radial, i.e., existe uma função f e uma função real $g : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(X) = g(r)$ e $\text{grad } f = F$.

b 3) Calcule a função g acima em termos da função h .

Questão 2 (2,5pt). a) Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação suave. Deduza a fórmula de Taylor de ordem 2 para F .

b) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ função suave tal que $\text{Hess } f$ é sempre invertível. Mostre que os pontos críticos de f são isolados.

Questão 3 (2,0pt). Assumindo o teorema da função inversa, enuncie e demonstre o teorema da função implícita.

Questão 4 (3,0pt). a) Sejam $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ função suave e c valor regular. Defina $M = g^{-1}(c)$.

a 1) Seja $T_p M := \{v; \langle v, \text{grad } g(p) \rangle = 0\}$. Mostre que

$$T_p M = \{\alpha'(0); \alpha \in C^\infty(I, M); \alpha(0) = p\}$$

a 2) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ função suave. Mostre que se p é ponto de máximo ou mínimo local de $f|_M$ então existe um λ tal que

$$\text{grad } f(p) = \lambda \text{grad } g(p).$$

b) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2/4 + y^2/9 + z^2/3 = 1\}$ um elipsoide. Qual o maior volume que pode ser ocupado por um paralelepípedo que tem faces paralelas aos planos coordenados e está dentro de S ?