

## Introducción a la Econometría

### Tema 6 — Repaso a la contrastación de Hipótesis

Estadísticas. Métodos Paramétricos

Marcos Bujosa y

Gustavo A. Marrero

Material de apoyo para el curso *Introducción a la Econometría* de la licenciatura en Economía de la Universidad Complutense de Madrid.

Copyright © 2003–2007 Marcos Bujosa y Gustavo A. Marrero



Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento-CompartirIgual de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/es/deed.es> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Puede encontrar la última versión de este material en:

<http://www.ucm.es/info/ecocuan/mbb/index.html#ietria>

# Índice

<b>Índice</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Contrastación de hipótesis paramétricas</b>	<b>10</b>
<b>3. Errores tipo I y II</b>	<b>13</b>
<b>4. Función potencia de un contraste</b>	<b>17</b>
<b>5. Nivel crítico <math>p</math> ó <math>p</math>-valor</b>	<b>33</b>
<b>6. Contrastes bajo normalidad</b>	<b>37</b>
6.1. Contrastes sobre la esperanza cuando la varianza es conocida	38
6.2. Contrastes sobre la varianza . . . . .	63
6.3. Contrastes sobre la esperanza cuando la varianza es desconocida	67

6.3.1. Contrastes de $\beta$ en el Modelo Lineal Simple . . . . .	69
6.4. Contrastes de proporción . . . . .	74
<b>7. Intervalos de confianza y contrastes bilaterales</b>	<b>78</b>
<b>8. Contraste de hipótesis sobre dos muestras</b>	<b>82</b>
<b>9. Problemas</b>	<b>97</b>
<b>A. Teorema de Neyman-Pearson</b>	<b>119</b>
<b>B. Contraste uniformemente más potente</b>	<b>126</b>
<b>C. Trasparencias</b>	<b>130</b>
<b>D. Bibliografía</b>	<b>132</b>
<b>E. Chuletario y Tablas</b>	<b>133</b>



Este es un material de apoyo a las clases. En ningún caso sustituye a los libros de texto que figuran en el programa de la asignatura; textos que el alumno debe estudiar para afrontar el examen final con ciertas garantías de éxito.

El programa se cubre con los siguientes capítulos de libro de texto [Novales \(1997\)](#)<sup>1</sup>:

**Capítulos 1 a 3:** Estos temas han sido cubiertos en asignaturas anteriores, y debido a su bajo nivel de complejidad no se verán en clase (aunque forman parte del programa).

**Capítulos 4 a 6:** Estos temas han sido cubiertos en las asignaturas [Estadística I](#) y [II](#). Se realizará un breve repaso en clase (una semana o semana y media como máximo), asumiendo que el alumno es capaz de preparar por su cuenta esta parte.

**Capítulos 7 y 8:** completos

**Capítulo 9:** secciones 9.4 a 9.6

**Capítulos 10 y 12:** completos

---

<sup>1</sup>Otros excelentes manuales en castellano son [Peña \(2001\)](#), [Peña \(2002\)](#) y [Peña y Romo \(1997\)](#).

## 1. Introducción



**Hipótesis** afirmación sobre uno o varios parámetros poblacionales

- $H_0$ : hipótesis *nula*
- $H_1$ : hipótesis complementaria (*alternativa*)



**Hipótesis** afirmación sobre uno o varios parámetros poblacionales

- $H_0$ : hipótesis *nula*
- $H_1$ : hipótesis complementaria (*alternativa*)

**Contraste de hipótesis** es una regla que establece

- para que valores muestrales  $\mathbf{x}$  se rechaza  $H_0$   
(*región crítica, RC*)
- para que valores muestrales  $\mathbf{x}$  no se rechaza  $H_0$   
(*región de aceptación, RA*)



**Hipótesis** afirmación sobre uno o varios parámetros poblacionales

- $H_0$ : hipótesis *nula*
- $H_1$ : hipótesis complementaria (*alternativa*)

**Contraste de hipótesis** es una regla que establece

- para que valores muestrales  $x$  se rechaza  $H_0$   
(*región crítica, RC*)
- para que valores muestrales  $x$  no se rechaza  $H_0$   
(*región de aceptación, RA*)

**Toma de decisión** rechazo o no rechazo de  $H_0$

Caracterizamos  $RC$  mediante un estadístico  $g(X)$ .

### Ejemplo

- Tren sale cada hora (tardo 10' en llegar al andén)
- $H_0$ : me da tiempo  
 $H_1$ : NO me da tiempo
- $g(X)$ : media de los relojes de los presentes
- $RC = \{x \text{ tales que: } g(x) \geq 45'\}$  (*nivel de significación*)
- Pregunto la hora, y decido si voy al andén

Caracterizamos  $RC$  mediante un estadístico  $g(X)$ .

### Ejemplo

- Tren sale cada hora (tardo 10' en llegar al andén)
- $H_0$ : me da tiempo  
 $H_1$ : NO me da tiempo
- $g(X)$ : media de los relojes de los presentes
- $RC = \{x \text{ tales que: } g(x) \geq 45'\}$  (*nivel de significación*)
- Pregunto la hora, y decido si voy al andén

Pero el estadístico podría ser

- $g^*(X)$ : media de los relojes de más de 130 euros.
- $RC^* = \{x \text{ tales que: } g^*(x) \geq 49'\}$  (*nivel de significación*)

## 2. Contrastación de hipótesis paramétricas



## 1. Planteamiento de hipótesis nula

$$H_0 : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(x; \boldsymbol{\theta}); \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$$

y alternativa

$$H_1 : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(x; \boldsymbol{\theta}); \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

donde  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$  , y  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$



1. Planteamiento de hipótesis nula

$$H_0 : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(x; \boldsymbol{\theta}); \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$$

y alternativa

$$H_1 : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(x; \boldsymbol{\theta}); \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

donde  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$  , y  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

2. Elección del estadístico  $g(\mathbf{X})$

1. Planteamiento de hipótesis nula

$$H_0 : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(x; \boldsymbol{\theta}); \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$$

y alternativa

$$H_1 : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(x; \boldsymbol{\theta}); \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

donde  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$  , y  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

2. Elección del estadístico  $g(\mathbf{X})$
3. División del espacio muestral en dos regiones:  $RC$  y  $RA$   
(dado un nivel de significación  $\alpha$ )  
 $RC \cap RA = \emptyset; \quad RC \cup RA = \text{espacio muestral}$

1. Planteamiento de hipótesis nula

$$H_0 : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(x; \boldsymbol{\theta}); \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$$

y alternativa

$$H_1 : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(x; \boldsymbol{\theta}); \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

donde  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$  , y  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

2. Elección del estadístico  $g(\mathbf{X})$
3. División del espacio muestral en dos regiones:  $RC$  y  $RA$   
(dado un nivel de significación  $\alpha$ )  
 $RC \cap RA = \emptyset; \quad RC \cup RA = \text{espacio muestral}$
4. Cálculo del estadístico sobre la muestra:  $g(\mathbf{x})$

1. Planteamiento de hipótesis nula

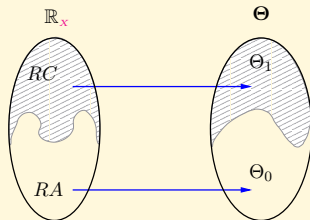
$$H_0 : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(x; \boldsymbol{\theta}); \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$$

y alternativa

$$H_1 : \mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(x; \boldsymbol{\theta}); \quad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

donde  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$  , y  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

2. Elección del estadístico  $g(\mathbf{X})$
3. División del espacio muestral en dos regiones:  $RC$  y  $RA$   
(dado un nivel de significación  $\alpha$ )  
 $RC \cap RA = \emptyset; \quad RC \cup RA = \text{espacio muestral}$
4. Cálculo del estadístico sobre la muestra:  $g(\mathbf{x})$
5. Rechazar o no rechazar  $H_0$  (y toma de decisión)

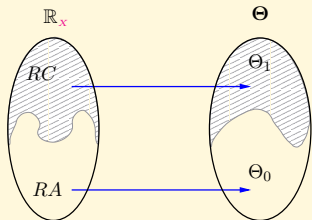


Espacio muestral

Espacio paramétrico

$\mathbf{x} \in RC$  : Rechazo  $H_0$

$\mathbf{x} \in RA$  : No rechazo  $H_0$



Espacio muestral

Espacio paramétrico

$\mathbf{x} \in RC$  : Rechazo  $H_0$

$\mathbf{x} \in RA$  : No rechazo  $H_0$

Si  $\Theta_i$  contiene un único elemento  $\rightarrow$  hipótesis simple

Si  $\Theta_i$  contiene varios elementos  $\rightarrow$  hipótesis compuesta

$$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1; \quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset;$$

$$\mathbb{R}_{\mathbf{x}} = RC \cup RA; \quad RC \cap RA = \emptyset;$$

### 3. Errores tipo I y II



En un contraste de hipótesis

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta_0^c$$

se pueden cometer dos tipos de errores

**Tipo I:**  $H_0$  es cierta pero la rechazo

$$\alpha = P_{H_0} (X \in RC) : \quad P(\text{rechazar } H_0) \text{ cuando es cierta}$$

En un contraste de hipótesis

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta_0^c$$

se pueden cometer dos tipos de errores

**Tipo I:**  $H_0$  es cierta pero la rechazo

$$\alpha = P_{H_0} (X \in RC) : \quad P(\text{rechazar } H_0) \text{ cuando es cierta}$$

**Tipo II:**  $H_0$  es falsa pero la acepto

$$\beta = P_{H_1} (X \in RA) : \quad P(\text{aceptar } H_0) \text{ cuando es falsa}$$



Verdadera distribución de probabilidad

$H_0$

$H_1$

Resultado del test	No rechazar $H_0$	Decisión correcta	Error Tipo II Probabilidad $\beta$ $P_{H_1}(X \in RA)$
	Rechazar $H_0$	Error Tipo I Probabilidad $\alpha$ $P_{H_0}(X \in RC)$	Decisión correcta

EJERCICIO 1. Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

Si la hipótesis nula no es rechazada, entonces es cierta.

**EJERCICIO 1.** Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

Si la hipótesis nula no es rechazada, entonces es cierta.

*Solución:* **Falso:** El test de hipótesis sólo puede indicar que con los datos observados no rechazamos la hipótesis nula  $H_0$  con una probabilidad  $\beta$ , es decir, asumiendo el riesgo de que, con probabilidad  $\beta$ , no rechazemos  $H_0$  aún siendo falsa (error tipo II).

Ejercicio 1

## 4. Función potencia de un contraste



Función potencia es la *probabilidad de rechazar*  $H_0$

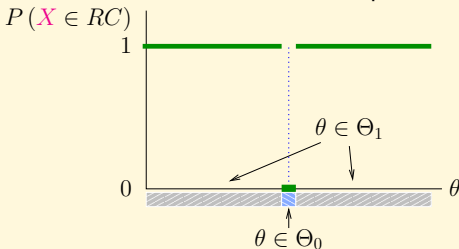
$$W(\theta) = P(X \in RC)$$



Función potencia es la *probabilidad de rechazar  $H_0$*

$$W(\theta) = P(X \in RC)$$

Si tuviéramos una *bola de cristal* su función potencia sería

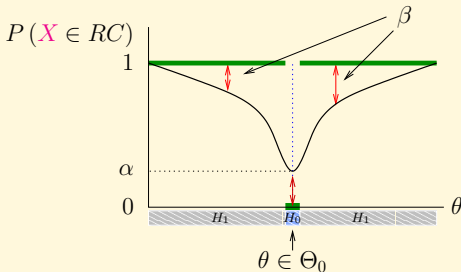


Nótese que siempre

*Probabilidad de rechazar = 1 - Probabilidad de aceptar*

Función potencia es la *probabilidad de rechazar  $H_0$*

$$W(\theta) = P(X \in RC) = \begin{cases} W(\theta \in \Theta_0) & = \alpha & \text{(Nivel de significación)} \\ W(\theta \in \Theta_1) & = 1 - \beta & \text{(potencia*)} \end{cases}$$



(\*) Cuando  $H_1$  es simple.

**Ejemplo 1. [Binomial:]** Un trilero nos propone apostar a **cara** o cruz.  $\theta = P(\odot)$

- ¿Es un tramposo? pido previamente cinco ensayos;  $X \sim \text{binomial}(5, \theta)$  (m.a.s)
- $H_0: \theta < 1/2$  (es un tramposo)       $H_1: \theta \geq 1/2$
- $g(X)$ : suma de las caras       $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) = 5\}$
- Decido si juego o no

**Ejemplo 1. [Binomial:]** Un trilero nos propone apostar a **cara** o cruz.  $\theta = P(\odot)$

- ¿Es un tramposo? pido previamente cinco ensayos;  $X \sim \text{binomial}(5, \theta)$  (m.a.s)
- $H_0: \theta < 1/2$  (es un tramposo)       $H_1: \theta \geq 1/2$
- $g(X)$ : suma de las caras       $RC = \{x \text{ tales que: } g(x) = 5\}$
- Decido si juego o no

La función potencia es

$$W_1(\theta) = P(\text{rechazar } H_0) = P(X \in RC) = P(X = 5) = \theta^5$$

que es muy baja para casi todos los valores de  $\theta$ . (añadir link a cálculo con octave)

**Ejemplo 1. [Binomial:]** Un trilero nos propone apostar a **cara** o cruz.  $\theta = P(\odot)$

- ¿Es un tramposo? pido previamente cinco ensayos;  $X \sim \text{binomial}(5, \theta)$  (m.a.s)
- $H_0: \theta < 1/2$  (es un tramposo)  $H_1: \theta \geq 1/2$
- $g(X)$ : suma de las caras  $RC = \{x \text{ tales que: } g(x) = 5\}$
- Decido si juego o no

La función potencia es

$$W_1(\theta) = P(\text{rechazar } H_0) = P(X \in RC) = P(X = 5) = \theta^5$$

que es muy baja para casi todos los valores de  $\theta$ . (añadir link a cálculo con octave)

Por tanto, la probabilidad del error Tipo I es baja

$$\alpha_1 = W_1(\theta \in \Theta_0) < (1/2)^5 = 0.0312$$

**Ejemplo 1. [Binomial:]** Un trilero nos propone apostar a **cara** o cruz.  $\theta = P(\odot)$

- ¿Es un tramposo? pido previamente cinco ensayos;  $X \sim \text{binomial}(5, \theta)$  (m.a.s)
- $H_0: \theta < 1/2$  (es un tramposo)  $H_1: \theta \geq 1/2$
- $g(X)$ : suma de las caras  $RC = \{x \text{ tales que: } g(x) = 5\}$
- Decido si juego o no

La función potencia es

$$W_1(\theta) = P(\text{rechazar } H_0) = P(X \in RC) = P(X = 5) = \theta^5$$

que es muy baja para casi todos los valores de  $\theta$ . (añadir link a cálculo con octave)

Por tanto, la probabilidad del error Tipo I es baja

$$\alpha_1 = W_1(\theta \in \Theta_0) < (1/2)^5 = 0.0312$$

pero sin embargo, para casi todos los valores de  $\theta \geq 1/2$ , la probabilidad del error Tipo II es muy alta (no rechazo aunque debiera...)

**Ejemplo 1. [Binomial:]** Un trilero nos propone apostar a **cara** o cruz.  $\theta = P(\odot)$

- ¿Es un tramposo? pido previamente cinco ensayos;  $X \sim \text{binomial}(5, \theta)$  (m.a.s)
- $H_0: \theta < 1/2$  (es un tramposo)  $H_1: \theta \geq 1/2$
- $g(X)$ : suma de las caras  $RC = \{x \text{ tales que: } g(x) = 5\}$
- Decido si juego o no

La función potencia es

$$W_1(\theta) = P(\text{rechazar } H_0) = P(X \in RC) = P(X = 5) = \theta^5$$

que es muy baja para casi todos los valores de  $\theta$ . (añadir link a cálculo con octave)

Por tanto, la probabilidad del error Tipo I es baja

$$\alpha_1 = W_1(\theta \in \Theta_0) < (1/2)^5 = 0.0312$$

pero sin embargo, para casi todos los valores de  $\theta \geq 1/2$ , la probabilidad del error Tipo II es muy alta (no rechazo aunque debiera...)

¿Para qué valor de  $\theta$  la probabilidad de rechazo de  $H_0 \geq \frac{1}{2}$ ? Es decir ¿cómo debe ser la moneda para que confíe en el trilero según este contraste?

$$P(X \in RC) = 1/2 \Rightarrow \theta = \sqrt[5]{1/2} = 0.87$$

Para lograr mayor potencia cambiamos la región crítica

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) = 3, 4, \text{ ó } 5\}$$

Para lograr mayor potencia cambiamos la región crítica

$$RC = \{x \text{ tales que: } g(x) = 3, 4, \text{ ó } 5\}$$

La función potencia es  $W_2(\theta) = P(X \in RC) = P(X = 3, 4, \text{ ó } 5) =$

$$\binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2 + \binom{5}{4}\theta^4(1-\theta)^1 + \binom{5}{5}\theta^5(1-\theta)^0$$

Ahora ha disminuido  $\beta$ , pero ha aumentado  $\alpha$

Para lograr mayor potencia cambiamos la región crítica

$$RC = \{x \text{ tales que: } g(x) = 3, 4, \text{ ó } 5\}$$

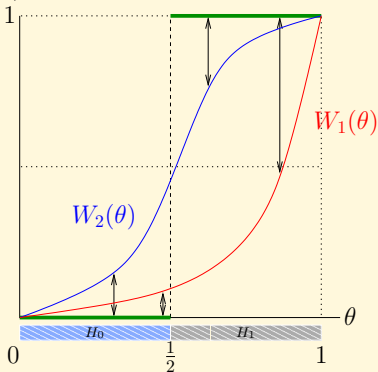
La función potencia es  $W_2(\theta) = P(\mathbf{X} \in RC) = P(\mathbf{X} = 3, 4, \text{ ó } 5) =$

$$\binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2 + \binom{5}{4}\theta^4(1-\theta)^1 + \binom{5}{5}\theta^5(1-\theta)^0$$

Ahora ha disminuido  $\beta$ , pero ha aumentado  $\alpha$

Función potencia de ambos contrastes y de la "bola de cristal"

$P(\mathbf{X} \in RC)$



## Ejemplo 2. [Poisson:]

- Sea  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 4$ ;  $H_1: \lambda = 12$ ;  $n = 1$ ;  $g(X) = X$

Dos contraste distintos

- $RC_1 = \{x \text{ tales que: } x > 8\}$
- $RC_2 = \{x \text{ tales que: } x < 1 \text{ ó } x > 10\}$

¿Qué contraste es mejor?

## Ejemplo 2. [Poisson:]

- Sea  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 4$ ;  $H_1: \lambda = 12$ ;  $n = 1$ ;  $g(X) = X$

Dos contraste distintos

- $RC_1 = \{x \text{ tales que: } x > 8\}$
- $RC_2 = \{x \text{ tales que: } x < 1 \text{ ó } x > 10\}$

¿Qué contraste es mejor?

**Error tipo I** Función potencia evaluada en  $H_0 : \lambda = 4$

$$\begin{aligned} W(4)_1 = \alpha_1 &= P_{H_0}(X > 8) = 1 - P_{H_0}(X \leq 8) \\ &= 1 - F_{\mathcal{P}(4)}(8) = 1 - 0.979 = 0.021 \end{aligned}$$

## Ejemplo 2. [Poisson:]

- Sea  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 4$ ;  $H_1: \lambda = 12$ ;  $n = 1$ ;  $g(X) = X$

Dos contraste distintos

- $RC_1 = \{x \text{ tales que: } x > 8\}$
- $RC_2 = \{x \text{ tales que: } x < 1 \text{ ó } x > 10\}$

¿Qué contraste es mejor?

**Error tipo I** Función potencia evaluada en  $H_0 : \lambda = 4$

$$\begin{aligned}W(4)_1 = \alpha_1 &= P_{H_0}(X > 8) = 1 - P_{H_0}(X \leq 8) \\ &= 1 - F_{\mathcal{P}(4)}(8) = 1 - 0.979 = 0.021\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W(4)_2 = \alpha_2 &= P_{H_0}(X < 1) + P_{H_0}(X > 10) \\ &= P_{H_0}(X \leq 0) + 1 - P_{H_0}(X \leq 10) \\ &= F_{\mathcal{P}(4)}(0) + 1 - F_{\mathcal{P}(4)}(10) + \\ &= 0.018 + 1 - 0.997 = 0.021\end{aligned}$$

## Ejemplo 2. [Poisson:]

- Sea  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 4$ ;  $H_1: \lambda = 12$ ;  $n = 1$ ;  $g(X) = X$

Dos contraste distintos

1.  $RC_1 = \{x \text{ tales que: } x > 8\}$
2.  $RC_2 = \{x \text{ tales que: } x < 1 \text{ ó } x > 10\}$

¿Qué contraste es mejor?

**Error tipo I** Función potencia evaluada en  $H_0 : \lambda = 4$

$$\begin{aligned}W(4)_1 = \alpha_1 &= P_{H_0}(X > 8) = 1 - P_{H_0}(X \leq 8) \\ &= 1 - F_{\mathcal{P}(4)}(8) = 1 - 0.979 = 0.021\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W(4)_2 = \alpha_2 &= P_{H_0}(X < 1) + P_{H_0}(X > 10) \\ &= P_{H_0}(X \leq 0) + 1 - P_{H_0}(X \leq 10) \\ &= F_{\mathcal{P}(4)}(0) + 1 - F_{\mathcal{P}(4)}(10) + \\ &= 0.018 + 1 - 0.997 = 0.021\end{aligned}$$

**Potencia** Función potencia evaluada en  $H_1 : \lambda = 12$

$$W(12)_1 = P_{H_1}(X > 8) = 1 - F_{\mathcal{P}(12)}(8) = 0.845$$

$$W(12)_2 = P_{H_1}(X < 1, X > 10) = 0.653$$

Por tanto es mejor el contraste que posee  $RC_1$

EJERCICIO 2. [Uniforme:]

- Sea  $X \sim U(0, a)$ ;  $H_0: a = 1$ ;  $H_1: a > 1$ ;
- $n = 1$ ;  $g(X) = X$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } x \geq k_\alpha\}$

EJERCICIO 2. [Uniforme:]

- Sea  $X \sim U(0, a)$ ;  $H_0: a = 1$ ;  $H_1: a > 1$ ;
- $n = 1$ ;  $g(X) = X$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } x \geq k_\alpha\}$

(a) Fijando  $\alpha = 0.05$  ¿cuanto debe vale  $k_\alpha$ ?

EJERCICIO 2. [Uniforme:]

- Sea  $X \sim U(0, a)$ ;  $H_0: a = 1$ ;  $H_1: a > 1$ ;
- $n = 1$ ;  $g(X) = X$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } x \geq k_\alpha\}$

(a) Fijando  $\alpha = 0.05$  ¿cuanto debe vale  $k_\alpha$ ?

Solución: Bajo  $H_0$ :  $f_X(x) = 1$ , entonces

$$0.05 = \alpha = W(1) = P_{H_0}(X \geq k_\alpha)$$

## EJERCICIO 2. [Uniforme:]

- Sea  $X \sim U(0, a)$ ;  $H_0: a = 1$ ;  $H_1: a > 1$ ;
- $n = 1$ ;  $g(X) = X$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } x \geq k_\alpha\}$

(a) Fijando  $\alpha = 0.05$  ¿cuanto debe vale  $k_\alpha$ ?

Solución: Bajo  $H_0: f_X(x) = 1$ , entonces

$$0.05 = \alpha = W(1) = P_{H_0}(X \geq k_\alpha) = \int_{k_\alpha}^1 1 dx$$

$$= x \Big|_{k_\alpha}^1 = 1 - k_\alpha = 0.05 \Rightarrow \boxed{k_\alpha = 0.95}$$

Ejercicio 2

## EJERCICIO 2. [Uniforme:]

- Sea  $X \sim U(0, a)$ ;  $H_0: a = 1$ ;  $H_1: a > 1$ ;
- $n = 1$ ;  $g(X) = X$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } x \geq k_\alpha\}$

(a) Fijando  $\alpha = 0.05$  ¿cuanto debe vale  $k_\alpha$ ?

Solución: Bajo  $H_0: f_X(x) = 1$ , entonces

$$0.05 = \alpha = W(1) = P_{H_0}(X \geq k_\alpha) = \int_{k_\alpha}^1 1 dx$$

$$= x \Big|_{k_\alpha}^1 = 1 - k_\alpha = 0.05 \Rightarrow k_\alpha = 0.95$$

Ejercicio 2

(b) Calcule la función potencia (para  $k_\alpha$  tal que  $\alpha = 0.05$ )

## EJERCICIO 2. [Uniforme:]

- Sea  $X \sim U(0, a)$ ;  $H_0: a = 1$ ;  $H_1: a > 1$ ;
- $n = 1$ ;  $g(X) = X$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } x \geq k_\alpha\}$

(a) Fijando  $\alpha = 0.05$  ¿cuanto debe vale  $k_\alpha$ ?

Solución: Bajo  $H_0: f_X(x) = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} 0.05 = \alpha = W(1) &= P_{H_0}(X \geq k_\alpha) = \int_{k_\alpha}^1 1 dx \\ &= \left. x \right|_{k_\alpha}^1 = 1 - k_\alpha = 0.05 \Rightarrow \boxed{k_\alpha = 0.95} \end{aligned}$$

Ejercicio 2

(b) Calcule la función potencia (para  $k_\alpha$  tal que  $\alpha = 0.05$ )

Solución: Bajo  $H_1: f_X(x) = \frac{1}{a}$ , entonces

$$W(a) = P(X \geq 0.95) = \int_{0.95}^a \frac{1}{a} dx = \left[ \frac{1}{a} x \right]_{0.95}^a = 1 - \frac{1}{a} 0.95$$

Que tiende a uno cuando  $a$  tiende a infinito.

Ejercicio 2

### EJERCICIO 3. [Uniforme:]

- Sea  $X \sim U(a, 1)$ ;  $H_0: a = 0$ ;  $H_1: a = 0.1$ ;
- Tamaño muestral  $n$  (m.a.s.);  $RC = \{x \text{ tales que: } x > k_\alpha\}$
- Estadístico de orden uno<sup>2</sup>  $g(X)$ , con función de distribución

$$F_{g(X)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - \left(\frac{1-x}{1-a}\right)^n & \text{si } a < x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

(a) Calcular  $k_\alpha$  para un nivel de significación  $\alpha$

### EJERCICIO 3. [Uniforme:]

- Sea  $X \sim U(a, 1)$ ;  $H_0: a = 0$ ;  $H_1: a = 0.1$ ;
- Tamaño muestral  $n$  (m.a.s.);  $RC = \{x \text{ tales que: } x > k_\alpha\}$
- Estadístico de orden uno<sup>2</sup>  $g(X)$ , con función de distribución

$$F_{g(X)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - \left(\frac{1-x}{1-a}\right)^n & \text{si } a < x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

(a) Calcular  $k_\alpha$  para un nivel de significación  $\alpha$

*Solución:*

$$\begin{aligned} \alpha &= W(a \in \Theta_0) = P_{H_0}(g(X) > k_\alpha) \\ &= 1 - F_{g(X)}(k_\alpha)|_{a=0} = 1 - 1 + \left(\frac{1-k_\alpha}{1-0}\right)^n = (1 - k_\alpha)^n; \end{aligned}$$

y por tanto  $k_\alpha = 1 - \sqrt[n]{\alpha}$

Ejercicio 3

---

<sup>2</sup>se ordena la muestra de menor a mayor y se toma el menor

(b) Calcule la potencia

(b) Calcule la potencia

*Solución:*

$$\begin{aligned} W(a \in \Theta_1) &= P_{H_1} (g(X) > k_\alpha) = \\ &= 1 - F_{g(X)}(k_\alpha) \Big|_{a=0.1} = \left( \frac{1 - k_\alpha}{0.9} \right)^n \end{aligned}$$

Ejercicio 3

(b) Calcule la potencia

*Solución:*

$$\begin{aligned} W(a \in \Theta_1) &= P_{H_1} (g(\mathbf{X}) > k_\alpha) = \\ &= 1 - F_{g(\mathbf{X})}(k_\alpha) \Big|_{a=0.1} = \left( \frac{1 - k_\alpha}{0.9} \right)^n \end{aligned}$$

Ejercicio 3

(c) Exprese la potencia en función de un nivel de significación  $\alpha$

(b) Calcule la potencia

*Solución:*

$$\begin{aligned} W(a \in \Theta_1) &= P_{H_1} (g(\mathbf{X}) > k_\alpha) = \\ &= 1 - F_{g(\mathbf{X})}(k_\alpha) \Big|_{a=0.1} = \left( \frac{1 - k_\alpha}{0.9} \right)^n \end{aligned}$$

Ejercicio 3

(c) Exprese la potencia en función de un nivel de significación  $\alpha$

*Solución:* Del primer apartado sabemos que  $\alpha = (1 - k_\alpha)^n$ ; por tanto

$$W(a = 0.1) = \frac{\alpha}{0.9^n}; \quad \text{que depende de } n$$

Ejercicio 3

(b) Calcule la potencia

*Solución:*

$$\begin{aligned} W(a \in \Theta_1) &= P_{H_1} (g(\mathbf{X}) > k_\alpha) = \\ &= 1 - F_{g(\mathbf{X})}(k_\alpha) \Big|_{a=0.1} = \left( \frac{1 - k_\alpha}{0.9} \right)^n \end{aligned}$$

Ejercicio 3

(c) Exprese la potencia en función de un nivel de significación  $\alpha$

*Solución:* Del primer apartado sabemos que  $\alpha = (1 - k_\alpha)^n$ ; por tanto

$$W(a = 0.1) = \frac{\alpha}{0.9^n}; \quad \text{que depende de } n$$

Ejercicio 3

(d) Fijado  $\alpha = 0.01$  ¿Para que tamaño muestral la potencia  $W(a = 0.1) \geq 0.95$ ?

(b) Calcule la potencia

*Solución:*

$$\begin{aligned}W(a \in \Theta_1) &= P_{H_1}(g(\mathbf{X}) > k_\alpha) = \\&= 1 - F_{g(\mathbf{X})}(k_\alpha)|_{a=0.1} = \left(\frac{1 - k_\alpha}{0.9}\right)^n\end{aligned}$$

Ejercicio 3

(c) Exprese la potencia en función de un nivel de significación  $\alpha$

*Solución:* Del primer apartado sabemos que  $\alpha = (1 - k_\alpha)^n$ ; por tanto

$$W(a = 0.1) = \frac{\alpha}{0.9^n}; \quad \text{que depende de } n$$

Ejercicio 3

(d) Fijado  $\alpha = 0.01$  ¿Para que tamaño muestral la potencia  $W(a = 0.1) \geq 0.95$ ?

*Solución:*

$$W(a = 0.1) = \frac{\alpha}{0.9^n}; \quad \longrightarrow \quad 0.95 = \frac{0.01}{0.9^n}$$

Por tanto, despejando y tomando logaritmos:

$$n \cdot \ln(0.9) = \ln\left(\frac{0.01}{0.95}\right); \quad n = 43,22$$

es decir, el tamaño muestral debe ser  $n = 44$ .

Ejercicio 3

Suponga que en lugar de emplear el estadístico de orden, de las  $n$  observaciones elegimos una de ellas al azar. Entonces el estadístico se reduce a  $g(\mathbf{X}) = X_k$ , donde  $X_k \sim U(a, 1)$

(a) Calcule el nivel de significación

Suponga que en lugar de emplear el estadístico de orden, de las  $n$  observaciones elegimos una de ellas al azar. Entonces el estadístico se reduce a  $g(\mathbf{X}) = X_k$ , donde  $X_k \sim U(a, 1)$

(a) Calcule el nivel de significación

*Solución:*

$$\alpha = W(a \in \Theta_0) = W(0) = P_{H_0} (g(\mathbf{X}) > k_\alpha) = \int_{k_\alpha}^1 1dx = (1 - k_\alpha)$$

Ejercicio 3

Suponga que en lugar de emplear el estadístico de orden, de las  $n$  observaciones elegimos una de ellas al azar. Entonces el estadístico se reduce a  $g(\mathbf{X}) = X_k$ , donde  $X_k \sim U(a, 1)$

(a) Calcule el nivel de significación

*Solución:*

$$\alpha = W(a \in \Theta_0) = W(0) = P_{H_0}(g(\mathbf{X}) > k_\alpha) = \int_{k_\alpha}^1 1dx = (1 - k_\alpha)$$

Ejercicio 3

(b) Calcule la potencia

Suponga que en lugar de emplear el estadístico de orden, de las  $n$  observaciones elegimos una de ellas al azar. Entonces el estadístico se reduce a  $g(\mathbf{X}) = X_k$ , donde  $X_k \sim U(a, 1)$

(a) Calcule el nivel de significación

*Solución:*

$$\alpha = W(a \in \Theta_0) = W(0) = P_{H_0}(g(\mathbf{X}) > k_\alpha) = \int_{k_\alpha}^1 1 dx = (1 - k_\alpha)$$

Ejercicio 3

(b) Calcule la potencia

*Solución:*

$$W(a \in \Theta_1) = W(0.1) = P_{H_1}(g(\mathbf{X}) > k_\alpha) = \int_{k_\alpha}^1 \frac{1}{0.9} dx = \frac{1}{0.9}(1 - k_\alpha)$$

que fijado  $\alpha$  es:

$$W(a \in \Theta_1) = \frac{\alpha}{0.9},$$

que no depende de  $n$ .

Ejercicio 3

**Nota 1.** La suma de  $n$  variables aleatorias con distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$  tiene distribución  $\mathcal{P}(n\lambda)$ .

*Demostración:*

$$X_i \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

por tanto, si  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $X_i \sim$  i.i.d.

$$M_Y(t) = \mathbb{E} \left( e^{t \sum X_i} \right) = M_{X_1, X_2, \dots, X_n}(t, t, \dots, t) = \left( \mathbb{E} \left( e^{t X_i} \right) \right)^n = e^{\lambda n (e^t - 1)}$$

es decir  $Y \sim \mathcal{P}(\lambda n)$ .

**Nota 1.** La suma de  $n$  variables aleatorias con distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$  tiene distribución  $\mathcal{P}(n\lambda)$ .

*Demostración:*

$$X_i \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow M_{\mathbf{X}}(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

por tanto, si  $\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $X_i \sim$  i.i.d.

$$M_{\mathbf{Y}}(t) = \mathbb{E} \left( e^{t \sum X_i} \right) = M_{X_1, X_2, \dots, X_n}(t, t, \dots, t) = \left( \mathbb{E} \left( e^{t X_i} \right) \right)^n = e^{\lambda n (e^t - 1)}$$

es decir  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda n)$ .

Del mismo modo si  $\mathbf{X}$  es *m.a.s.* entonces se verifica lo siguiente

$$X_i \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \sum X_i \sim \mathcal{P}(n\lambda)$$

$$X_i \sim \mathcal{B}(1, p) \quad \Rightarrow \quad \sum X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$$

$$X_i \sim \exp(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \sum X_i \sim \exp(n\lambda)$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

EJERCICIO 4. [Poisson:] Sea  $X$  el  $N^\circ$  de vehículos que entran en una gasolinera cada minuto.

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 1$ ;  $H_1: \lambda = 2$ ;
- $g(\mathbf{X}) = \sum X_i$  (m.a.s);  $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) > k_\alpha\}$

*Pista.* la suma de  $n$  variables con distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$  tiene distribución  $\mathcal{P}(n\lambda)$ .

(a) Calcular  $k_\alpha$  para un nivel de significación  $\alpha$

**EJERCICIO 4. [Poisson:]** Sea  $X$  el  $N^\circ$  de vehículos que entran en una gasolinera cada minuto.

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 1$ ;  $H_1: \lambda = 2$ ;
- $g(\mathbf{X}) = \sum X_i$  (m.a.s);  $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) > k_\alpha\}$

*Pista.* la suma de  $n$  variables con distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$  tiene distribución  $\mathcal{P}(n\lambda)$ .

(a) Calcular  $k_\alpha$  para un nivel de significación  $\alpha$

*Solución:*

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(g(\mathbf{X}) > k_\alpha) = 1 - P_{H_0}(g(\mathbf{X}) \leq k_\alpha) \\ &= 1 - F_{g(\mathbf{X})}(k_\alpha)|_{\lambda=1} = 1 - F_{\mathcal{P}(n\lambda)}(k_\alpha)|_{\lambda=1} = 1 - F_{\mathcal{P}(n)}(k_\alpha)\end{aligned}$$

Por tanto  $k_\alpha$  debe ser aquel valor tal que  $F_{\mathcal{P}(n)}(k_\alpha) = 1 - \alpha$ . Ejercicio 4

**EJERCICIO 4. [Poisson:]** Sea  $X$  el  $N^\circ$  de vehículos que entran en una gasolinera cada minuto.

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 1$ ;  $H_1: \lambda = 2$ ;
- $g(\mathbf{X}) = \sum X_i$  (m.a.s);  $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) > k_\alpha\}$

*Pista.* la suma de  $n$  variables con distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$  tiene distribución  $\mathcal{P}(n\lambda)$ .

(a) Calcular  $k_\alpha$  para un nivel de significación  $\alpha$

*Solución:*

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(g(\mathbf{X}) > k_\alpha) = 1 - P_{H_0}(g(\mathbf{X}) \leq k_\alpha) \\ &= 1 - F_{g(\mathbf{X})}(k_\alpha)|_{\lambda=1} = 1 - F_{\mathcal{P}(n\lambda)}(k_\alpha)|_{\lambda=1} = 1 - F_{\mathcal{P}(n)}(k_\alpha)\end{aligned}$$

Por tanto  $k_\alpha$  debe ser aquel valor tal que  $F_{\mathcal{P}(n)}(k_\alpha) = 1 - \alpha$ . Ejercicio 4

(b) Calcular la potencia

**EJERCICIO 4. [Poisson:]** Sea  $X$  el  $N^\circ$  de vehículos que entran en una gasolinera cada minuto.

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 1$ ;  $H_1: \lambda = 2$ ;
- $g(\mathbf{X}) = \sum X_i$  (m.a.s);  $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) > k_\alpha\}$

*Pista.* la suma de  $n$  variables con distribución  $\mathcal{P}(\lambda)$  tiene distribución  $\mathcal{P}(n\lambda)$ .

(a) Calcular  $k_\alpha$  para un nivel de significación  $\alpha$

*Solución:*

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(g(\mathbf{X}) > k_\alpha) = 1 - P_{H_0}(g(\mathbf{X}) \leq k_\alpha) \\ &= 1 - F_{g(\mathbf{X})}(k_\alpha)|_{\lambda=1} = 1 - F_{\mathcal{P}(n\lambda)}(k_\alpha)|_{\lambda=1} = 1 - F_{\mathcal{P}(n)}(k_\alpha)\end{aligned}$$

Por tanto  $k_\alpha$  debe ser aquel valor tal que  $F_{\mathcal{P}(n)}(k_\alpha) = 1 - \alpha$ . Ejercicio 4

(b) Calcular la potencia

*Solución:*

$$W(2) = P_{H_1}\left(\sum X_i > k_\alpha\right) = 1 - F_{\mathcal{P}(2n)}(k_\alpha)$$

Ejercicio 4

EJERCICIO 5. [Poisson:]

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 1$ ;  $H_1: \lambda > 1$ ;
- $g(\mathbf{X}) = \sum_1^n X_i$  (m.a.s);  $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) \geq 5\}$

(a) ¿Cual es el nivel de significación  $\alpha$  que logramos con un tamaño muestral  $n = 8$ ?

### EJERCICIO 5. [Poisson:]

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 1$ ;  $H_1: \lambda > 1$ ;
- $g(\mathbf{X}) = \sum_1^n X_i$  (m.a.s);  $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) \geq 5\}$

(a) ¿Cual es el nivel de significación  $\alpha$  que logramos con un tamaño muestral  $n = 8$ ?

*Solución:*

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(\sum X_i \geq 5) \\ &= 1 - P_{H_0}(g(\mathbf{X}) \leq 4) \\ &= 1 - F_{\mathcal{P}(8)}(4) = 1 - 0.0996 = 0.9004\end{aligned}$$

Ejercicio 5

### EJERCICIO 5. [Poisson:]

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 1$ ;  $H_1: \lambda > 1$ ;
- $g(\mathbf{X}) = \sum_1^n X_i$  (m.a.s);  $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) \geq 5\}$

(a) ¿Cual es el nivel de significación  $\alpha$  que logramos con un tamaño muestral  $n = 8$ ?

Solución:

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(\sum X_i \geq 5) \\ &= 1 - P_{H_0}(g(\mathbf{X}) \leq 4) \\ &= 1 - F_{\mathcal{P}(8)}(4) = 1 - 0.0996 = 0.9004\end{aligned}$$

Ejercicio 5

(b) ¿Qué tamaño muestral es suficiente para que

### EJERCICIO 5. [Poisson:]

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 1$ ;  $H_1: \lambda > 1$ ;
- $g(\mathbf{X}) = \sum_1^n X_i$  (m.a.s);  $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) \geq 5\}$

(a) ¿Cual es el nivel de significación  $\alpha$  que logramos con un tamaño muestral  $n = 8$ ?

Solución:

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(\sum X_i \geq 5) \\ &= 1 - P_{H_0}(g(\mathbf{X}) \leq 4) \\ &= 1 - F_{\mathcal{P}(8)}(4) = 1 - 0.0996 = 0.9004\end{aligned}$$

Ejercicio 5

(b) ¿Qué tamaño muestral es suficiente para que

Solución:  $\alpha \leq 0.05$ ?

$$0.05 = 1 - P_{H_0}(g(\mathbf{X}) \leq 4)$$

es decir, buscamos un valor de  $n$  tal que  $F_{\mathcal{P}(n)}(4) = 0.95$ . Dicho valor es  $n = 2$

Ejercicio 5

### EJERCICIO 5. [Poisson:]

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 1$ ;  $H_1: \lambda > 1$ ;
- $g(\mathbf{X}) = \sum_1^n X_i$  (m.a.s);  $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) \geq 5\}$

(a) ¿Cual es el nivel de significación  $\alpha$  que logramos con un tamaño muestral  $n = 8$ ?

Solución:

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(\sum X_i \geq 5) \\ &= 1 - P_{H_0}(g(\mathbf{X}) \leq 4) \\ &= 1 - F_{\mathcal{P}(8)}(4) = 1 - 0.0996 = 0.9004\end{aligned}$$

Ejercicio 5

(b) ¿Qué tamaño muestral es suficiente para que

Solución:  $\alpha \leq 0.05$ ?

$$0.05 = 1 - P_{H_0}(g(\mathbf{X}) \leq 4)$$

es decir, buscamos un valor de  $n$  tal que  $F_{\mathcal{P}(n)}(4) = 0.95$ . Dicho valor es  $n = 2$

Ejercicio 5

(c) Para un tamaño muestral  $n = 8$  evaluar la función potencia en  $\lambda = 1, 2, \text{ y } 5$ .

### EJERCICIO 5. [Poisson:]

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ;  $H_0: \lambda = 1$ ;  $H_1: \lambda > 1$ ;
- $g(\mathbf{X}) = \sum_1^n X_i$  (m.a.s);  $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) \geq 5\}$

(a) ¿Cual es el nivel de significación  $\alpha$  que logramos con un tamaño muestral  $n = 8$ ?

*Solución:*

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(\sum X_i \geq 5) \\ &= 1 - P_{H_0}(g(\mathbf{X}) \leq 4) \\ &= 1 - F_{\mathcal{P}(8)}(4) = 1 - 0.0996 = 0.9004\end{aligned}$$

Ejercicio 5

(b) ¿Qué tamaño muestral es suficiente para que

*Solución:*  $\alpha \leq 0.05$ ?

$$0.05 = 1 - P_{H_0}(g(\mathbf{X}) \leq 4)$$

es decir, buscamos un valor de  $n$  tal que  $F_{\mathcal{P}(n)}(4) = 0.95$ . Dicho valor es  $n = 2$

Ejercicio 5

(c) Para un tamaño muestral  $n = 8$  evaluar la función potencia en  $\lambda = 1, 2$ , y  $5$ .

*Solución:*

$$W(\lambda) = P\left(\sum X_i \geq 5\right) = 1 - F_{\mathcal{P}(8\lambda)}(4)$$

- Si  $\lambda = 1$  (ya lo hemos calculado antes)  $W(1) = 0.9004$

- Si  $\lambda = 2$

$$W(2) = 1 - F_{\mathcal{P}(16)}(4) = 0.992$$

- Si  $\lambda = 2$

$$W(2) = 1 - F_{\mathcal{P}(16)}(4) = 0.992$$

- Si  $\lambda = 5$ , entonces  $\sum X_i \sim \mathcal{P}(40)$  que no aparece en las tablas, pero ... (TCL)

$$\frac{(\sum X_i)/n - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \underset{a}{\approx} N(0, 1)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} W(5) &= 1 - P\left(\frac{(\sum X_i)/8 - 5}{\sqrt{5/8}} \leq \frac{4/8 - 5}{\sqrt{5/8}}\right) \\ &\simeq 1 - P(Z \leq -5.692) = 0.9999 \end{aligned}$$

Ejercicio 5

EJERCICIO 6. Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

Si se rechaza  $H_0$  con un nivel de significación  $\alpha = 0.05$  también se rechaza  $H_0$  con un nivel de significación  $\alpha = 0.10$

**EJERCICIO 6.** Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

Si se rechaza  $H_0$  con un nivel de significación  $\alpha = 0.05$  también se rechaza  $H_0$  con un nivel de significación  $\alpha = 0.10$

**Solución: Verdadero:** la región crítica asociada al nivel de significación del 10% contiene a la del 5%; por lo tanto si se ha “caído” en la región del 5%, entonces también se ha “caído” en la del 10%.

Ejercicio 6

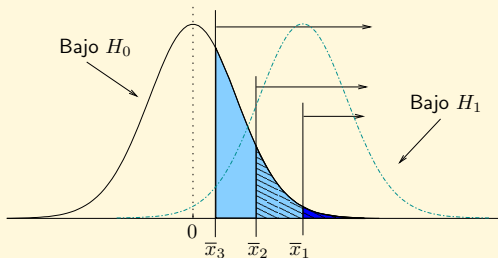
## 5. Nivel crítico $p$ ó $p$ -valor



Llamamos Nivel crítico  $p$  (ó  $p$ -valor) de la realización del estadístico  $g(X)$

a

$$p(\mathbf{x}) = P_{H_0} (g(X) \geq g(\mathbf{x}))$$

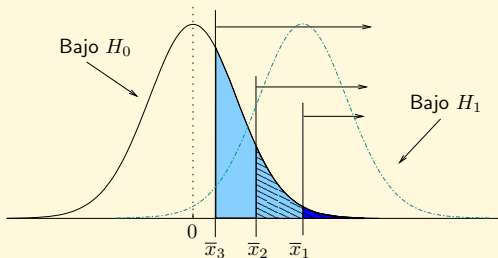




Llamamos Nivel crítico  $p$  (ó  $p$ -valor) de la realización del estadístico  $g(X)$

a

$$p(\mathbf{x}) = P_{H_0} (g(X) \geq g(\mathbf{x}))$$

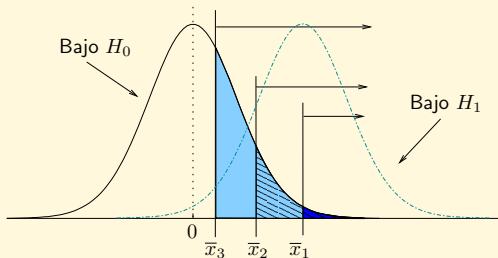


Un bajo nivel crítico  $p$  es una evidencia en contra de  $H_0$

Llamamos Nivel crítico  $p$  (ó  $p$ -valor) de la realización del estadístico  $g(X)$

a

$$p(\mathbf{x}) = P_{H_0} (g(X) \geq g(\mathbf{x}))$$



Un bajo nivel crítico  $p$  es una evidencia en contra de  $H_0$

Si

$$\alpha > p - \text{valor} \quad \Rightarrow \text{Rechazamos } H_0$$

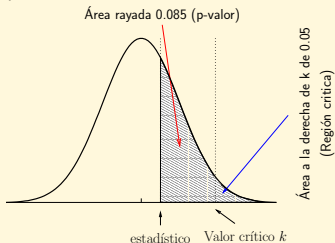
$$\alpha < p - \text{valor} \quad \Rightarrow \text{No rechazamos } H_0$$

El  $p$ -valor es la probabilidad de obtener un valor del estadístico utilizado en el contraste, que sea igual al que hemos obtenido con la muestra o aún más extremo en la dirección de  $H_1$ , bajo el supuesto de que  $H_0$  es cierta.

**EJERCICIO 7.** ¿Es cierta la siguiente afirmación? “El  $p$ -valor de la media muestral para un contraste  $H_0 : \mu = 0$  frente a  $H_1 : \mu = 3$  es 0,085. Esto quiere decir que con un nivel de significación del 0,05 debemos rechazar  $H_0$ ”. Razone su respuesta.

**EJERCICIO 7.** ¿Es cierta la siguiente afirmación? “El  $p$ -valor de la media muestral para un contraste  $H_0 : \mu = 0$  frente a  $H_1 : \mu = 3$  es 0,085. Esto quiere decir que con un nivel de significación del 0,05 debemos rechazar  $H_0$ ”. Razone su respuesta.

**Solución:** La afirmación es falsa. Un  $p$ -valor igual a 0.085 significa que la probabilidad, calculada bajo  $H_0$ , de obtener un valor numérico que aporte más evidencia en contra de  $H_0$ , que la aportada por el estadístico que hemos obtenido es del 8.5%; es decir, el área que queda a la derecha del estadístico es de 0.085 (mayor por tanto al área de la región crítica, de solo 0.05). Por tanto, el estadístico empleado fuera de la región crítica (a la izquierda de  $k$  en el dibujo).



## 6. Contrastes bajo normalidad

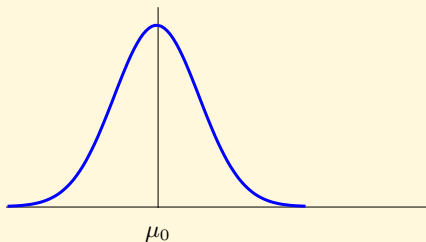
## 6.1. Contrastes sobre la esperanza cuando la varianza es conocida

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$$

$$\blacksquare H_0: \mu = \mu_0 \quad g(\mathbf{X}) = \hat{\bar{x}}; \quad \frac{\hat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

$$\text{a) Si } H_1: \mu > \mu_0; \quad \text{ó } H_1: \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$$

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > z_{1-\alpha} \right\}$$



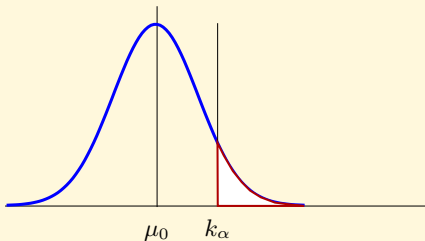


$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$$

$$\blacksquare H_0: \mu = \mu_0 \quad g(\mathbf{X}) = \hat{\bar{x}}; \quad \frac{\hat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

$$\text{a) Si } H_1: \mu > \mu_0; \quad \text{ó } H_1: \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$$

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > z_{1-\alpha} \right\}$$



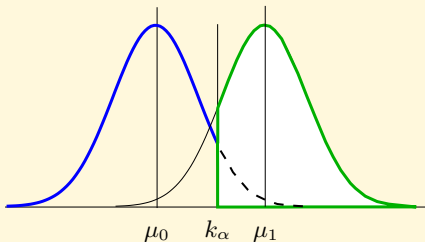


$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$$

$$\blacksquare H_0: \mu = \mu_0 \quad g(\mathbf{X}) = \hat{\bar{x}}; \quad \frac{\hat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

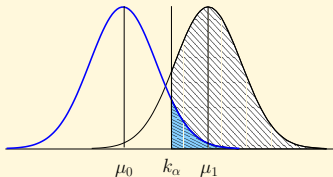
$$\text{a) Si } H_1: \mu > \mu_0; \quad \text{ó } H_1: \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$$

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > z_{1-\alpha} \right\}$$



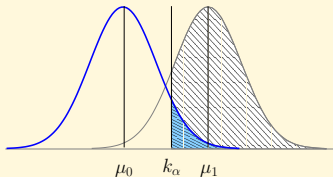


$$RC = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha\}$$

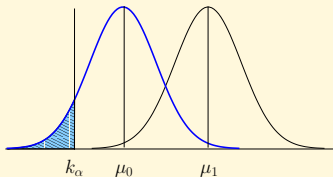




$$RC = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha\}$$



$$RC = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_\alpha\}$$



$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$

■  $H_0 : \mu = \mu_0 \quad g(\mathbf{X}) = \hat{\bar{x}}; \quad \frac{\hat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$

b) Si  $H_1 : \mu < \mu_0; \quad \text{ó} \quad H_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 < \mu_0)$

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_\alpha\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} < z_\alpha \right\}$$

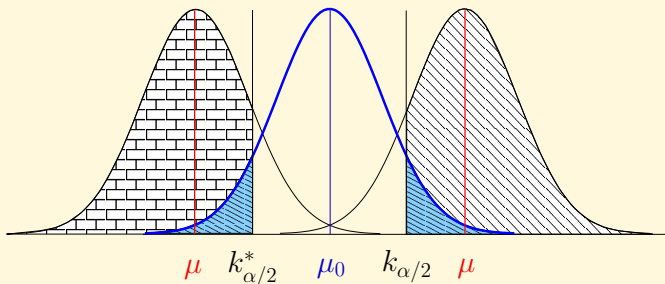
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ;  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$

■  $H_0 : \mu = \mu_0$       $g(\mathbf{X}) = \hat{\bar{x}}$ ;      $\frac{\hat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$

c) Si  $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_{\alpha/2} \quad \text{ó} \quad \bar{x} < k_{\alpha/2}^* \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > z_{1-\alpha/2} \quad \text{ó} \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} < z_{\alpha/2} \right\}$$



$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_{\alpha/2} \quad \text{ó} \quad \bar{x} < k_{\alpha/2}^* \right\}$$

### Ejemplo 3.

- $X \sim N(\mu, 9)$  : Crecimiento medio del salario real familias
- media del crecimiento de las familias en marzo fue 6.4 %
- Creemos que no ha variado en abril
- Se publica una previsión de crecimiento del 7.5 %
- Queremos contrastar  $H_0 : \mu_{\text{abril}} = \mu_{\text{marzo}} = 6.4$  frente a  $H_1 : \mu_{\text{abril}} = 7.5$  con un nivel de significación del 5 %.

$$RC = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha \} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{k_\alpha - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} = z_{1-\alpha} \right\}$$

### Ejemplo 3.

- $X \sim N(\mu, 9)$  : Crecimiento medio del salario real familias
- media del crecimiento de las familias en marzo fue 6.4 %
- Creemos que no ha variado en abril
- Se publica una previsión de crecimiento del 7.5 %
- Queremos contrastar  $H_0 : \mu_{\text{abril}} = \mu_{\text{marzo}} = 6.4$  frente a  $H_1 : \mu_{\text{abril}} = 7.5$  con un nivel de significación del 5 %.

$$RC = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha \} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{k_\alpha - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} = z_{1-\alpha} \right\}$$

$$\alpha = 0.05 = P_{H_0} \left( \frac{\hat{\bar{x}} - 6.4}{\sqrt{9/n}} > z_{1-0.05} = 1.645 \right)$$

### Ejemplo 3.

- $X \sim N(\mu, 9)$  : Crecimiento medio del salario real familias
- media del crecimiento de las familias en marzo fue 6.4 %
- Creemos que no ha variado en abril
- Se publica una previsión de crecimiento del 7.5 %
- Queremos contrastar  $H_0 : \mu_{\text{abril}} = \mu_{\text{marzo}} = 6.4$  frente a  $H_1 : \mu_{\text{abril}} = 7.5$  con un nivel de significación del 5 %.

$$RC = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha\} = \left\{ x \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{k_\alpha - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} = z_{1-\alpha} \right\}$$

$$\alpha = 0.05 = P_{H_0} \left( \frac{\widehat{\bar{x}} - 6.4}{\sqrt{9/n}} > z_{1-0.05} = 1.645 \right)$$

Por tanto si  $\bar{x} > 6.4 + 1.645 \frac{3}{\sqrt{n}} = k_\alpha$  entonces suponemos que hay suficiente evidencia en contra de  $H_0$

Por ejemplo, si  $n = 20$  entonces  $k_\alpha = 7.5035$ .

La potencia del contraste es  $W(\mu \in \Theta_1)$ :

$$\begin{aligned}W(7.5) &= P_{H_1} \left( \widehat{\bar{x}} > k_\alpha = 7.5035 \right) \\&= 1 - P_{H_1} \left( \widehat{\bar{x}} \leq k_\alpha = 7.5035 \right) \\&= 1 - P \left( \frac{\widehat{\bar{x}} - 7.5}{3/\sqrt{n}} \leq \frac{7.5035 - 7.5}{3/\sqrt{20}} \right) = 1 - P(Z \leq 0.00521) \simeq 0.5\end{aligned}$$

La potencia del contraste es  $W(\mu \in \Theta_1)$ :

$$\begin{aligned}W(7.5) &= P_{H_1} \left( \widehat{\bar{x}} > k_\alpha = 7.5035 \right) \\&= 1 - P_{H_1} \left( \widehat{\bar{x}} \leq k_\alpha = 7.5035 \right) \\&= 1 - P \left( \frac{\widehat{\bar{x}} - 7.5}{3/\sqrt{n}} \leq \frac{7.5035 - 7.5}{3/\sqrt{20}} \right) = 1 - P(Z \leq 0.00521) \simeq 0.5\end{aligned}$$

¿Que tamaño muestral necesitamos para tener una potencia del 90%?

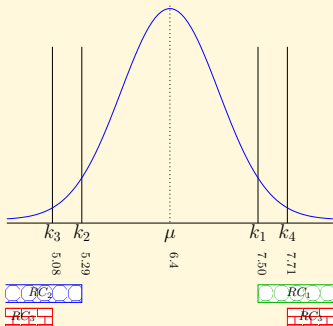
$$\begin{aligned}0.90 &= P_{H_1} \left( \widehat{\bar{x}} > k_\alpha = 6.4 + 1.645 \frac{3}{\sqrt{n}} \right) \\&= 1 - P \left( \frac{\widehat{\bar{x}} - 7.5}{3/\sqrt{n}} \leq \frac{(6.4 + 1.645 \frac{3}{\sqrt{n}}) - 7.5}{3/\sqrt{n}} \right) \\&= 1 - P \left( Z \leq \frac{(6.4 + 1.645 \frac{3}{\sqrt{n}}) - 7.5}{3/\sqrt{n}} = z_{0.1} \right)\end{aligned}$$

Por tanto  $\frac{(6.4 + 1.645 \frac{3}{\sqrt{n}}) - 7.5}{3/\sqrt{n}} = z_{0.1} = -1.285$ ; es decir  $n \simeq 64$ .



Sea  $X \sim N(\mu, 9)$ ;  $n = 20$ ;  $\alpha = 0.05$  ( $z_{0.95} = 1.645$ ;  $z_{0.975} = 1.96$ )

1.  $\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\} \Rightarrow RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}; \quad k_1 = 7.50$

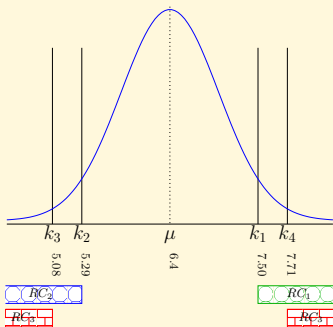




Sea  $X \sim N(\mu, 9)$ ;  $n = 20$ ;  $\alpha = 0.05$  ( $z_{0.95} = 1.645$ ;  $z_{0.975} = 1.96$ )

1.  $\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\} \Rightarrow RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}; \quad k_1 = 7.50$

2.  $\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu < 6.4 \end{array} \right\} \Rightarrow RC_2 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}; \quad k_2 = 5.29$



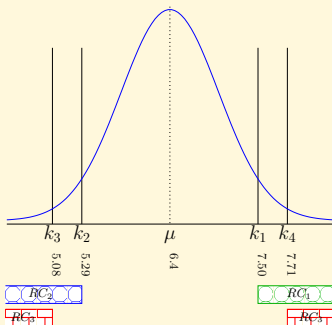


Sea  $X \sim N(\mu, 9)$ ;  $n = 20$ ;  $\alpha = 0.05$  ( $z_{0.95} = 1.645$ ;  $z_{0.975} = 1.96$ )

1.  $\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\} \Rightarrow RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}; \quad k_1 = 7.50$

2.  $\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu < 6.4 \end{array} \right\} \Rightarrow RC_2 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}; \quad k_2 = 5.29$

3.  $\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\} \Rightarrow RC_3 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4\}; \quad k_3 = 5.08; \quad k_4 = 7.71$





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty) \quad \boxed{RC_1 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}}$$



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_1 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_1$ .



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_1 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_1 \}$$

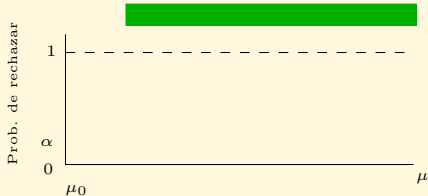
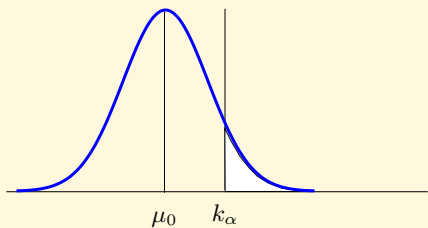
$\alpha$  ajustado por valor  $k_1$ . Buen comportamiento función potencia



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_1$ . Buen comportamiento función potencia

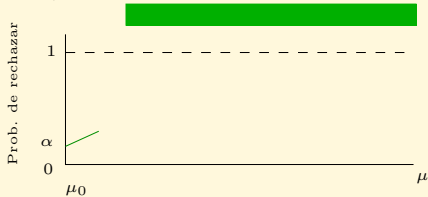
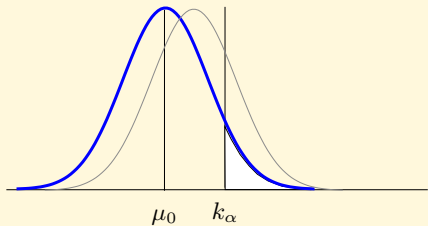




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_1$ . Buen comportamiento función potencia

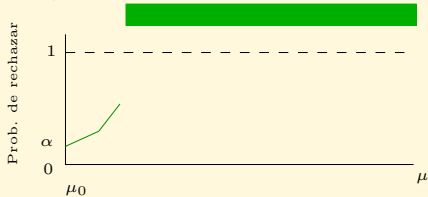
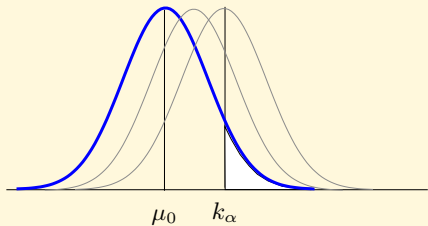




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_1$ . Buen comportamiento función potencia

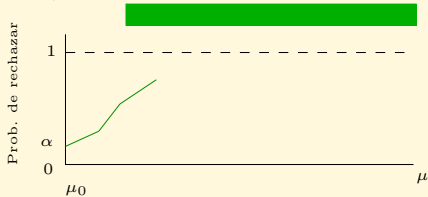
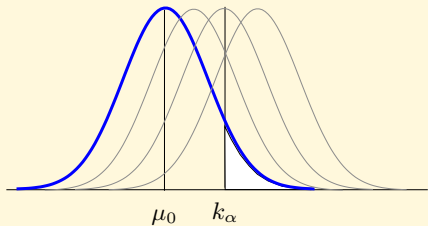




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_1$ . Buen comportamiento función potencia

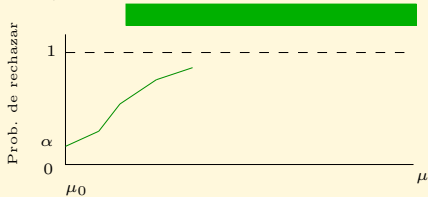
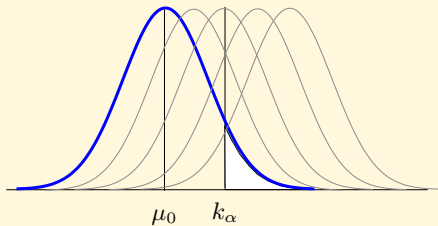




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_1$ . Buen comportamiento función potencia

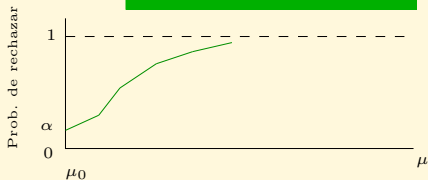
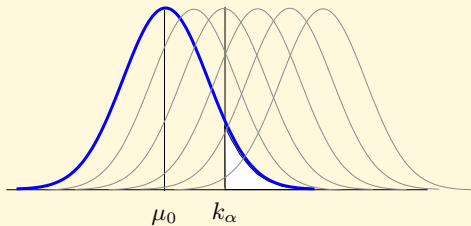




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_1$ . Buen comportamiento función potencia

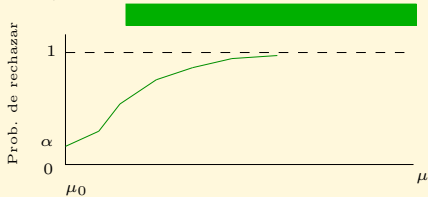
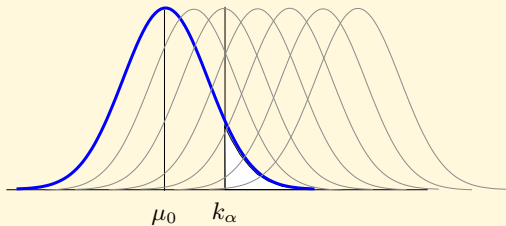




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_1$ . Buen comportamiento función potencia





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty) \quad \boxed{RC_2 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}}$$



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_2 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_2$ .



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty) \quad \boxed{RC_2 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}}$$

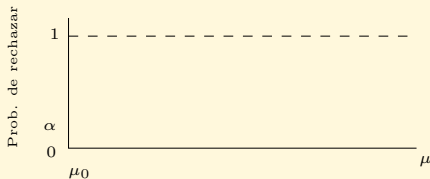
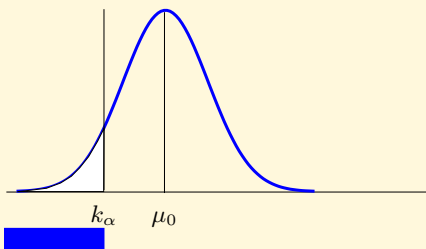
$\alpha$  ajustado por valor  $k_2$ . bajísima potencia del contraste!!!



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_2 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_2$ . bajísima potencia del contraste!!!

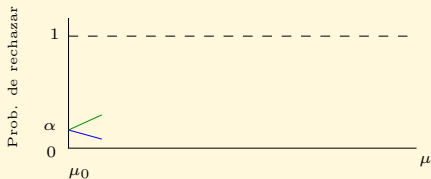
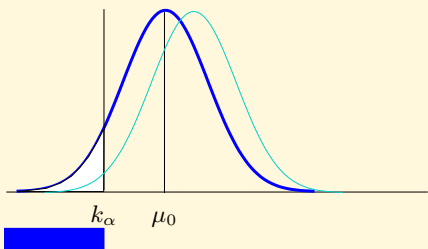




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_2 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_2$ . bajísima potencia del contraste!!!

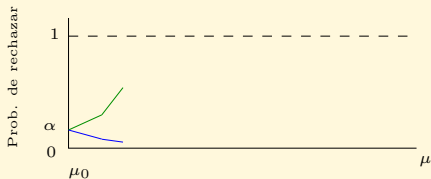
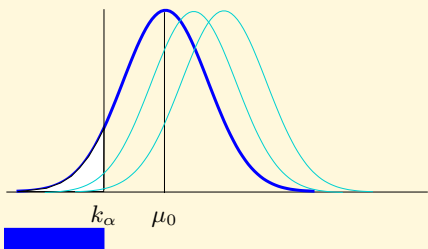




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_2 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_2$ . bajísima potencia del contraste!!!

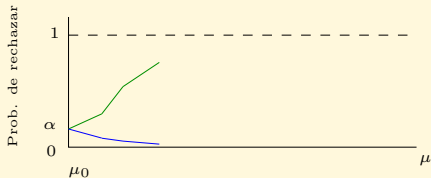
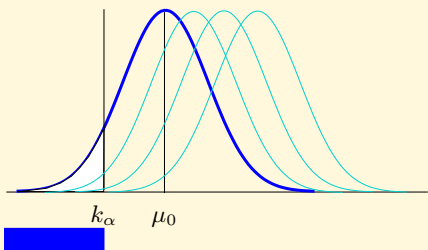




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_2 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_2$ . bajísima potencia del contraste!!!

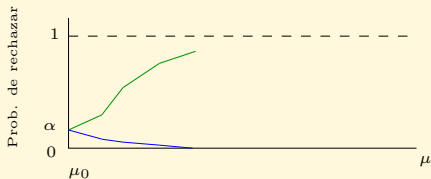
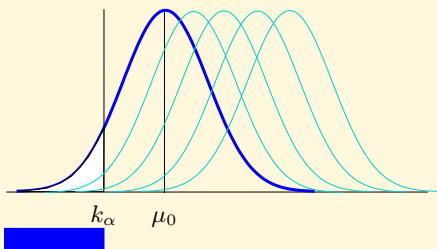




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_2 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_2$ . bajísima potencia del contraste!!!

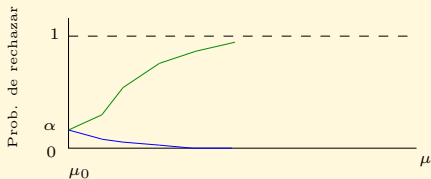
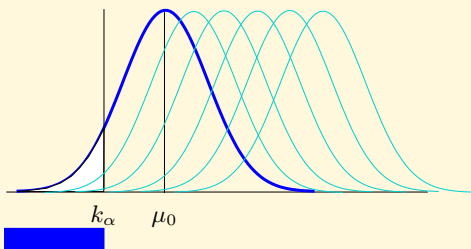




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_2 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_2$ . bajísima potencia del contraste!!!

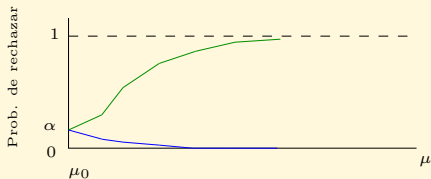
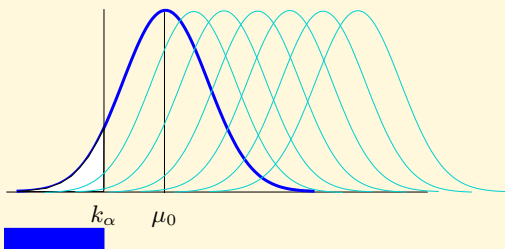




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = [6.4, \infty)$$

$$RC_2 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_2\}$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_2$ . bajísima potencia del contraste!!!





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\};$$

$$RC_3 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4\};$$



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\};$$

$$RC_3 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4\};$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_3$  y  $k_4$ .



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\};$$

$$RC_3 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4\};$$

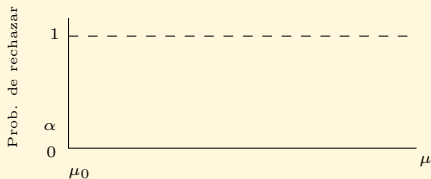
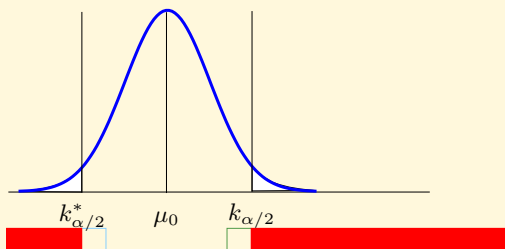
$\alpha$  ajustado por valor  $k_3$  y  $k_4$ . Función potencia mejorable



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\};$$

$$RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_3$  y  $k_4$ . Función potencia mejorable

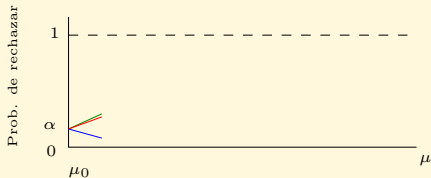
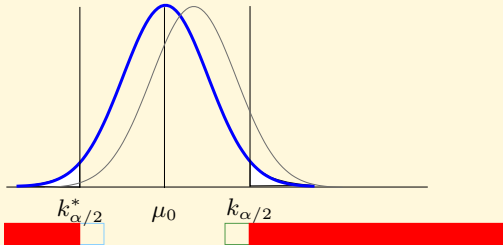




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\};$$

$$RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_3$  y  $k_4$ . Función potencia mejorable

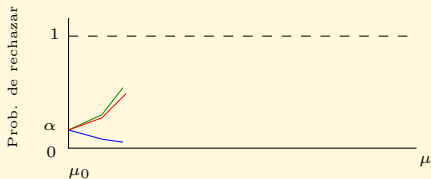
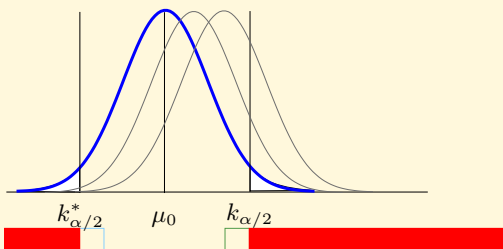




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\};$$

$$RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_3$  y  $k_4$ . Función potencia mejorable

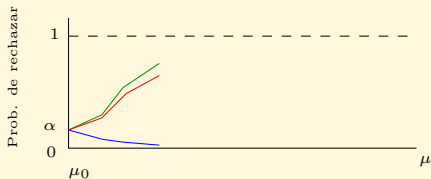
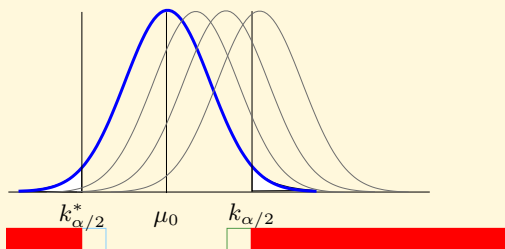




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\};$$

$$RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_3$  y  $k_4$ . Función potencia mejorable

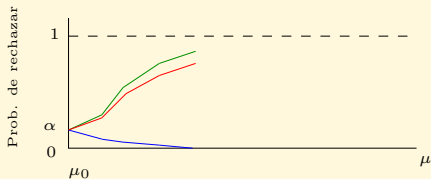
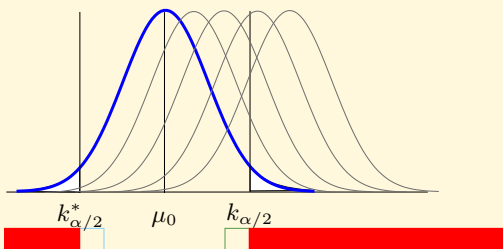




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\};$$

$$RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_3$  y  $k_4$ . Función potencia mejorable

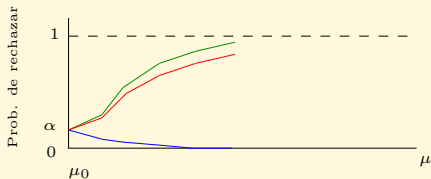
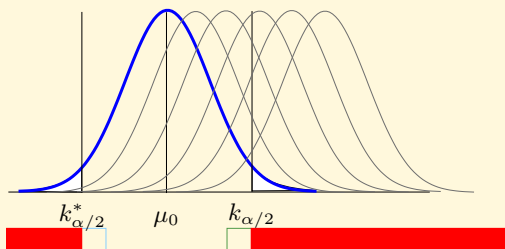




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\};$$

$$RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_3$  y  $k_4$ . Función potencia mejorable

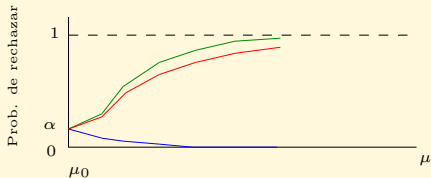
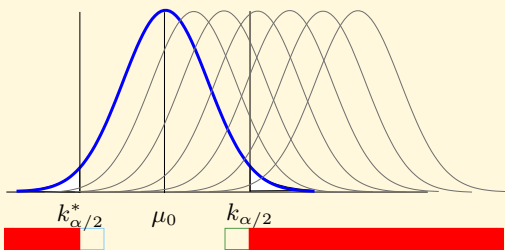




$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu > 6.4 \end{array} \right\};$$

$$RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

$\alpha$  ajustado por valor  $k_3$  y  $k_4$ . Función potencia mejorable





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = (-\infty, \infty)$$



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = (-\infty, \infty) \quad RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$



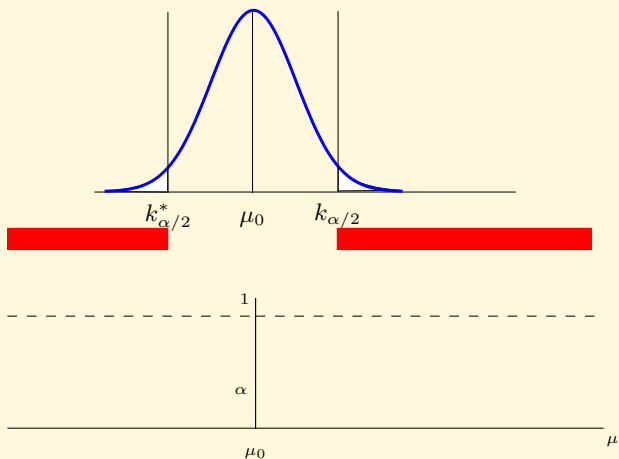
$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = (-\infty, \infty) \quad RC_3 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4\};$$

Buen comportamiento en todo el dominio



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = (-\infty, \infty) \quad RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

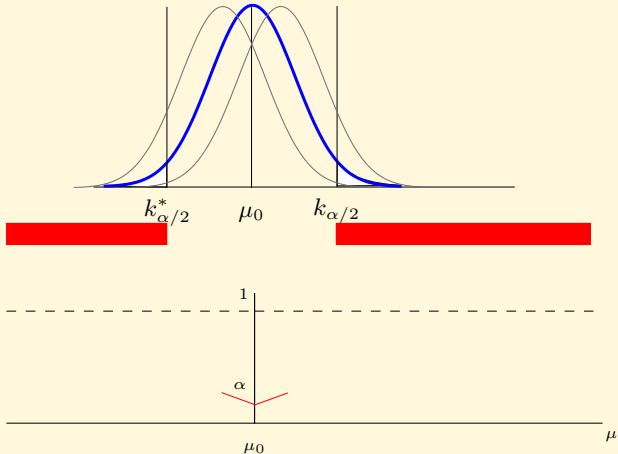
Buen comportamiento en todo el dominio





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = (-\infty, \infty) \quad RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

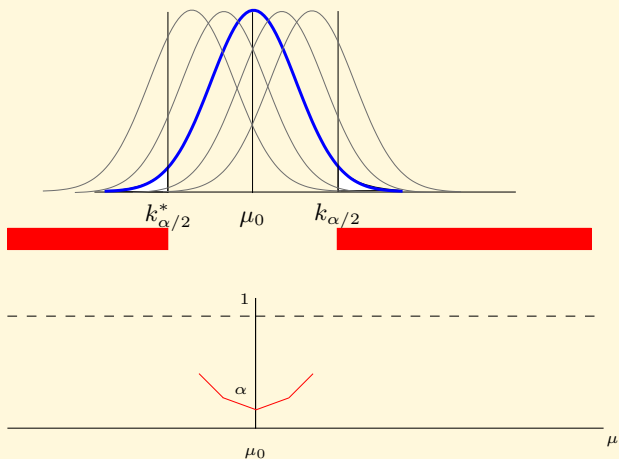
Buen comportamiento en todo el dominio





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = (-\infty, \infty) \quad RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

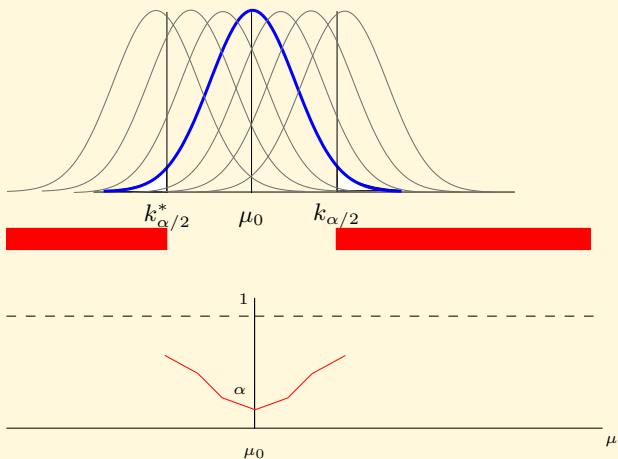
Buen comportamiento en todo el dominio





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = (-\infty, \infty) \quad RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

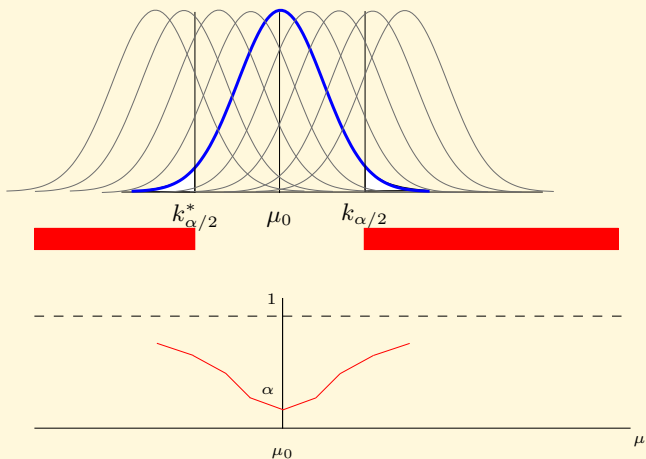
Buen comportamiento en todo el dominio





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = (-\infty, \infty) \quad RC_3 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_3 \text{ ó } \bar{x} > k_4 \};$$

Buen comportamiento en todo el dominio





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = (-\infty, \infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \quad \Theta = (-\infty, \infty) \quad \boxed{RC_1 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\};}$$



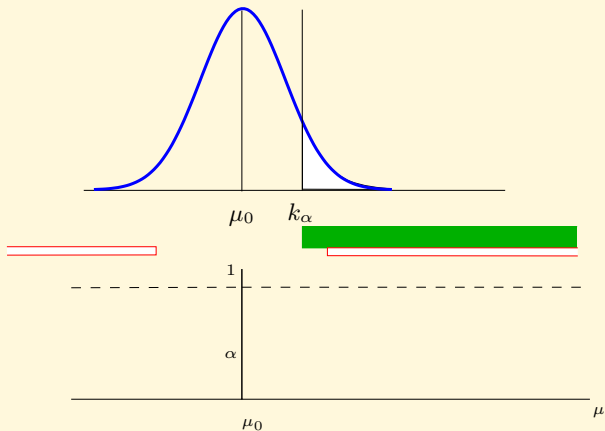
$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \quad \Theta = (-\infty, \infty) \quad \boxed{RC_1 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\};}$$

**buen comportamiento** en parte del dominio y **muy malo** en la otra parte.



$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = (-\infty, \infty) \quad RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\};$$

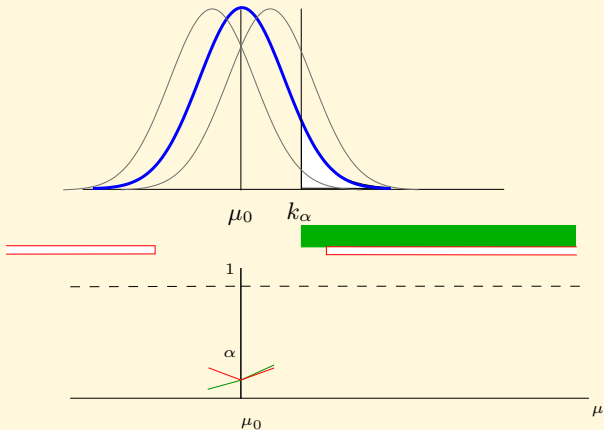
**buen comportamiento** en parte del dominio y **muy malo** en la otra parte.





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \quad \Theta = (-\infty, \infty) \quad \boxed{RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\};}$$

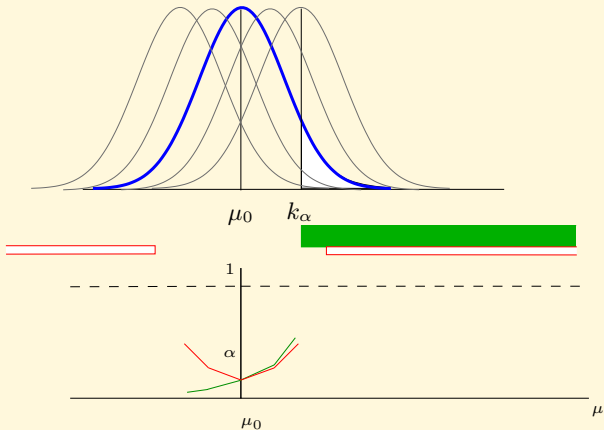
**buen comportamiento** en parte del dominio y **muy malo** en la otra parte.





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \quad \Theta = (-\infty, \infty) \quad \boxed{RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\};}$$

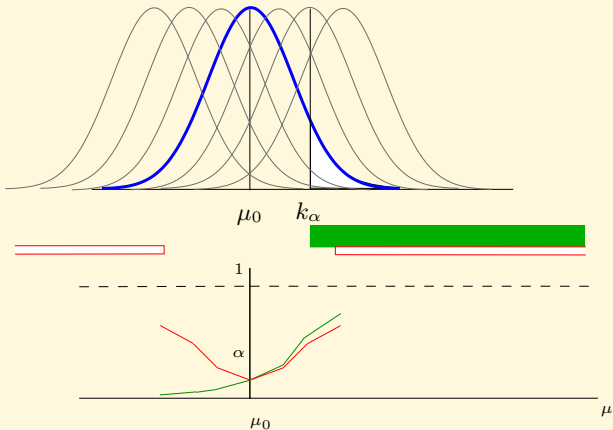
**buen comportamiento** en parte del dominio y **muy malo** en la otra parte.





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \Theta = (-\infty, \infty) \quad RC_1 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_1 \};$$

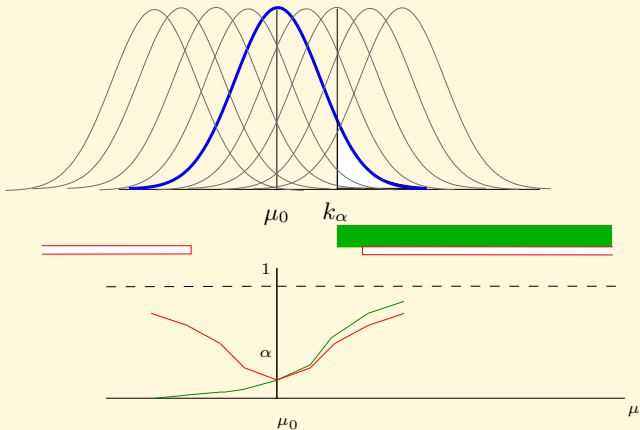
**buen comportamiento** en parte del dominio y **muy malo** en la otra parte.





$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 6.4 \\ H_1 : \mu \neq 6.4 \end{array} \right\}; \quad \Theta = (-\infty, \infty) \quad RC_1 = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_1 \};$$

**buen comportamiento** en parte del dominio y **muy malo** en la otra parte.



**EJERCICIO 8.** Queremos contrastar una hipótesis nula simple frente a una alternativa también simple. Para este propósito, disponemos de dos regiones críticas con idénticos niveles de significación. ¿Quiere esto decir que los dos contrastes son igualmente buenos? Razone la respuesta.

**EJERCICIO 8.** Queremos contrastar una hipótesis nula simple frente a una alternativa también simple. Para este propósito, disponemos de dos regiones críticas con idénticos niveles de significación. ¿Quiere esto decir que los dos contrastes son igualmente buenos? Razone la respuesta.

*Solución:* **NO.** Que ambos contrastes posean idénticos niveles de significación significa que en ambos existe la misma probabilidad de cometer el error tipo I (rechazar  $H_0$  siendo cierta). Pero la probabilidad de cometer el error tipo II puede diferir. De entre ambos, preferiremos el contraste más potente (el que tenga mayor probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando es falsa).

Ejercicio 8

EJERCICIO 9. Realice el siguiente ejercicio:

- Sea  $X \sim U(0, a)$ ;  $H_0: a = 1$ ;  $H_1: a > 1$ ;
- $n = 1$ ;  $g(X) = X$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } x < k_\alpha\}$

(a) Fijando  $\alpha = 0.05$  determinar  $k_\alpha$

**EJERCICIO 9.** Realice el siguiente ejercicio:

- Sea  $X \sim U(0, a)$ ;  $H_0: a = 1$ ;  $H_1: a > 1$ ;
- $n = 1$ ;  $g(X) = X$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } x < k_\alpha\}$

(a) Fijando  $\alpha = 0.05$  determinar  $k_\alpha$

*Solución: RC:*

$$\begin{aligned} 0.05 = \alpha &= P_{H_0}(X \leq k_\alpha) = \int_0^{k_\alpha} \frac{1}{a} dx \\ &= x \Big|_0^{k_\alpha} = k_\alpha = 0.05 \end{aligned}$$

Ejercicio 9

**EJERCICIO 9.** Realice el siguiente ejercicio:

- Sea  $X \sim U(0, a)$ ;  $H_0: a = 1$ ;  $H_1: a > 1$ ;
- $n = 1$ ;  $g(X) = X$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } x < k_\alpha\}$

(a) Fijando  $\alpha = 0.05$  determinar  $k_\alpha$

Solución:  $RC$ :

$$\begin{aligned} 0.05 = \alpha &= P_{H_0}(X \leq k_\alpha) = \int_0^{k_\alpha} \frac{1}{a} dx \\ &= x \Big|_0^{k_\alpha} = k_\alpha = 0.05 \end{aligned}$$

Ejercicio 9

(b) Calcular función potencia (para  $\alpha = 0.05$ ) y compare el resultado con el ejemplo 2 en la página ~24 (Uniforme 1). Dibuje ambas funciones potencia.

**EJERCICIO 9.** Realice el siguiente ejercicio:

- Sea  $X \sim U(0, a)$ ;  $H_0: a = 1$ ;  $H_1: a > 1$ ;
- $n = 1$ ;  $g(X) = X$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } x < k_\alpha\}$

(a) Fijando  $\alpha = 0.05$  determinar  $k_\alpha$

*Solución:*  $RC$ :

$$\begin{aligned} 0.05 = \alpha &= P_{H_0}(X \leq k_\alpha) = \int_0^{k_\alpha} \frac{1}{a} dx \\ &= \left. x \right|_0^{k_\alpha} = k_\alpha = 0.05 \end{aligned}$$

Ejercicio 9

(b) Calcular función potencia (para  $\alpha = 0.05$ ) y compare el resultado con el ejemplo 2 en la página ~24 (Uniforme 1). Dibuje ambas funciones potencia.

*Solución:*

$$W(a) = P(X \leq 0.05) = \int_0^{0.05} \frac{1}{a} dx = \left[ \frac{1}{a} x \right]_0^{0.05} = \frac{0.05}{a}$$

Que tiende a cero cuando  $a$  tiende a infinito.

Ejercicio 9

**EJERCICIO 10.** (Consta de 5 apartados)

Sea  $X$  el precio de un determinado producto que su empresa va a comenzar a comercializar. Suponemos que dicho precio se distribuye  $X \sim N(\mu, 100)$ . Usted afirma que el precio medio más adecuado es de 30 euros, y para contrastar esta hipótesis frente a la de su jefe, que afirma que es de 40 euros, selecciona al azar una muestra de precios de compra de 25 clientes, y adopta la siguiente regla de decisión:

- Si la media muestral es inferior a 35, se considera adecuado fijar un precio de 30 euros.
- Si por el contrario la media muestral es igual o superior a 35, se considera adecuado fijar el precio *alternativo* de 40 euros.

(a) A partir de su afirmación y la de su jefe escriba la hipótesis nula y la alternativa; y a partir de la regla decisión escriba la región crítica del contraste.

### EJERCICIO 10. (Consta de 5 apartados)

Sea  $X$  el precio de un determinado producto que su empresa va a comenzar a comercializar. Suponemos que dicho precio se distribuye  $X \sim N(\mu, 100)$ . Usted afirma que el precio medio más adecuado es de 30 euros, y para contrastar esta hipótesis frente a la de su jefe, que afirma que es de 40 euros, selecciona al azar una muestra de precios de compra de 25 clientes, y adopta la siguiente regla de decisión:

- Si la media muestral es inferior a 35, se considera adecuado fijar un precio de 30 euros.
- Si por el contrario la media muestral es igual o superior a 35, se considera adecuado fijar el precio *alternativo* de 40 euros.

(a) A partir de su afirmación y la de su jefe escriba la hipótesis nula y la alternativa; y a partir de la regla de decisión escriba la región crítica del contraste.

*Solución:*  $H_0: \mu = 30$ ;       $H_1: \mu = 40$ ;       $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} \geq 35\}$

Ejercicio 10

### EJERCICIO 10. (Consta de 5 apartados)

Sea  $X$  el precio de un determinado producto que su empresa va a comenzar a comercializar. Suponemos que dicho precio se distribuye  $X \sim N(\mu, 100)$ . Usted afirma que el precio medio más adecuado es de 30 euros, y para contrastar esta hipótesis frente a la de su jefe, que afirma que es de 40 euros, selecciona al azar una muestra de precios de compra de 25 clientes, y adopta la siguiente regla de decisión:

- Si la media muestral es inferior a 35, se considera adecuado fijar un precio de 30 euros.
- Si por el contrario la media muestral es igual o superior a 35, se considera adecuado fijar el precio *alternativo* de 40 euros.

(a) A partir de su afirmación y la de su jefe escriba la hipótesis nula y la alternativa; y a partir de la regla decisión escriba la región crítica del contraste.

Solución:  $H_0: \mu = 30$ ;  $H_1: \mu = 40$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } \bar{x} \geq 35\}$

Ejercicio 10

(b) Obtenga el nivel de significación del contraste.

### EJERCICIO 10. (Consta de 5 apartados)

Sea  $X$  el precio de un determinado producto que su empresa va a comenzar a comercializar. Suponemos que dicho precio se distribuye  $X \sim N(\mu, 100)$ . Usted afirma que el precio medio más adecuado es de 30 euros, y para contrastar esta hipótesis frente a la de su jefe, que afirma que es de 40 euros, selecciona al azar una muestra de precios de compra de 25 clientes, y adopta la siguiente regla de decisión:

- Si la media muestral es inferior a 35, se considera adecuado fijar un precio de 30 euros.
- Si por el contrario la media muestral es igual o superior a 35, se considera adecuado fijar el precio *alternativo* de 40 euros.

(a) A partir de su afirmación y la de su jefe escriba la hipótesis nula y la alternativa; y a partir de la regla de decisión escriba la región crítica del contraste.

Solución:  $H_0: \mu = 30$ ;  $H_1: \mu = 40$ ;  $RC = \{x \text{ tales que: } \bar{x} \geq 35\}$

Ejercicio 10

(b) Obtenga el nivel de significación del contraste.

Solución: Por definición  $\alpha = P_{H_0}(\bar{x} \geq 35)$  bajo  $H_0$  ( $\mu = 30$ ); y puesto que  $X \sim N(\mu, 100)$ , su media muestral también se distribuye  $N(\mu, \sigma^2/n)$  con esperanza  $\mu$  y varianza  $100/25$ ; así pues, bajo  $H_0$

$$\alpha = P_{H_0}(\bar{x} \geq 35) = P\left(\frac{\bar{x} - 30}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{35 - 30}{\sqrt{100/25}}\right) = P(Z \geq 2.5) = \boxed{0.0062}$$



(c) ¿Cuál es la potencia del contraste?

(c) ¿Cuál es la potencia del contraste?

*Solución:* La potencia es  $W(40) = P_{H_1}(\bar{x} \geq 35)$  bajo  $H_1$  ( $\mu = 40$ );

$$W(40) = P_{H_1}(\bar{x} \geq 35) = P\left(\frac{\bar{x} - 40}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{35 - 40}{\sqrt{100/25}}\right) = P(Z \geq -2.5) = \boxed{0.9938}$$

(c) ¿Cuál es la potencia del contraste?

*Solución:* La potencia es  $W(40) = P_{H_1}(\bar{x} \geq 35)$  bajo  $H_1$  ( $\mu = 40$ );

$$W(40) = P_{H_1}(\bar{x} \geq 35) = P\left(\frac{\bar{x} - 40}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{35 - 40}{\sqrt{100/25}}\right) = P(Z \geq -2.5) = \boxed{0.9938}$$

(d) Obtenga la región crítica para un nivel de significación del 1%.

(c) ¿Cuál es la potencia del contraste?

*Solución:* La potencia es  $W(40) = P_{H_1}(\bar{x} \geq 35)$  bajo  $H_1$  ( $\mu = 40$ );

$$W(40) = P_{H_1}(\bar{x} \geq 35) = P\left(\frac{\bar{x} - 40}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{35 - 40}{\sqrt{100/25}}\right) = P(Z \geq -2.5) = \boxed{0.9938}$$

(d) Obtenga la región crítica para un nivel de significación del 1%.

*Solución:* Ahora buscamos un  $k$  tal que  $P_{H_0}(\bar{x} \geq k) = 0.01$  bajo  $H_0$  ( $\mu = 30$ ); por tanto

$$P_{H_0}(\bar{x} \geq k) = P\left(\frac{\bar{x} - 30}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{k - 30}{\sqrt{100/25}}\right) = P\left(Z \geq \frac{k - 30}{\sqrt{100/25}}\right)$$

pero dicha probabilidad debe ser igual a 0.01, así que  $\frac{k-30}{\sqrt{100/25}} = 2.32$ , es decir  $k = 34.64$ , y la región crítica buscada es

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que } \bar{x} \geq 34.64\}$$

(c) ¿Cuál es la potencia del contraste?

*Solución:* La potencia es  $W(40) = P_{H_1}(\bar{x} \geq 35)$  bajo  $H_1$  ( $\mu = 40$ );

$$W(40) = P_{H_1}(\bar{x} \geq 35) = P\left(\frac{\bar{x} - 40}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{35 - 40}{\sqrt{100/25}}\right) = P(Z \geq -2.5) = \boxed{0.9938}$$

(d) Obtenga la región crítica para un nivel de significación del 1%.

*Solución:* Ahora buscamos un  $k$  tal que  $P_{H_0}(\bar{x} \geq k) = 0.01$  bajo  $H_0$  ( $\mu = 30$ ); por tanto

$$P_{H_0}(\bar{x} \geq k) = P\left(\frac{\bar{x} - 30}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{k - 30}{\sqrt{100/25}}\right) = P\left(Z \geq \frac{k - 30}{\sqrt{100/25}}\right)$$

pero dicha probabilidad debe ser igual a 0.01, así que  $\frac{k-30}{\sqrt{100/25}} = 2.32$ , es decir  $k = 34.64$ , y la región crítica buscada es

$$RC = \{x \text{ tales que } \bar{x} \geq 34.64\}$$

(e) Para el nivel de significación anterior, resuelva el contraste suponiendo que la media muestral obtenida ha sido 36.

(c) ¿Cuál es la potencia del contraste?

*Solución:* La potencia es  $W(40) = P_{H_1}(\bar{x} \geq 35)$  bajo  $H_1$  ( $\mu = 40$ );

$$W(40) = P_{H_1}(\bar{x} \geq 35) = P\left(\frac{\bar{x} - 40}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{35 - 40}{\sqrt{100/25}}\right) = P(Z \geq -2.5) = \boxed{0.9938}$$

(d) Obtenga la región crítica para un nivel de significación del 1%.

*Solución:* Ahora buscamos un  $k$  tal que  $P_{H_0}(\bar{x} \geq k) = 0.01$  bajo  $H_0$  ( $\mu = 30$ ); por tanto

$$P_{H_0}(\bar{x} \geq k) = P\left(\frac{\bar{x} - 30}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{k - 30}{\sqrt{100/25}}\right) = P\left(Z \geq \frac{k - 30}{\sqrt{100/25}}\right)$$

pero dicha probabilidad debe ser igual a 0.01, así que  $\frac{k-30}{\sqrt{100/25}} = 2.32$ , es decir  $k = 34.64$ , y la región crítica buscada es

$$RC = \{x \text{ tales que } \bar{x} \geq 34.64\}$$

(e) Para el nivel de significación anterior, resuelva el contraste suponiendo que la media muestral obtenida ha sido 36.

*Solución:* Puesto que la media es mayor que 34.64, la muestra pertenece a la región crítica  $RC$  y, por tanto, se rechaza  $H_0$  con un nivel de significación del 1%.

Ejercicio 10

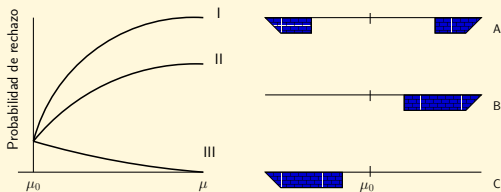
**EJERCICIO 11.** Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$ . Suponga que tiene una muestra de tamaño  $n$  y desea contrastar  $H_0: \mu = \mu_0$  frente a  $H_1: \mu > \mu_0$ . Se definen tres regiones críticas A), B) y C) con nivel de significación  $\alpha$ .

A)  $RC_A = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_2 \text{ ó } \bar{x} < k_3\}$

B)  $RC_B = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$

C)  $RC_C = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_4\}$

Dichas regiones aparecen representadas en la parte derecha de la figura.



Asoce cada una de las funciones potencia I), II) y III) (de la izquierda) con una de las regiones críticas A), B) o C).

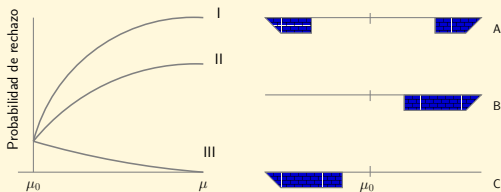
**EJERCICIO 11.** Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$ . Suponga que tiene una muestra de tamaño  $n$  y desea contrastar  $H_0: \mu = \mu_0$  frente a  $H_1: \mu > \mu_0$ . Se definen tres regiones críticas A), B) y C) con nivel de significación  $\alpha$ .

A)  $RC_A = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_2 \text{ ó } \bar{x} < k_3\}$

B)  $RC_B = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$

C)  $RC_C = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_4\}$

Dichas regiones aparecen representadas en la parte derecha de la figura.



Asocie cada una de las funciones potencia I), II) y III) (de la izquierda) con una de las regiones críticas A), B) o C).

**Solución:** La I) con la B);      la II) con la A);      la III) con la C).      Ejercicio 11

**EJERCICIO 12.** Sea una población  $X$  que se distribuye  $N(\mu, 2)$ . Queremos llevar a cabo el siguiente contraste;  $H_0: \mu = 0$  frente a  $H_1: \mu = 0.5$  con  $\alpha = 0.05$  (a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 20). Disponemos de dos regiones críticas:  $RC_1 = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$  y  $RC_2 = \{x \text{ tales que: } \frac{x_1+x_2}{2} > k_2\}$ , donde  $x_1$  y  $x_2$  son los dos primeros elementos de la muestra. [Pista: recuerde que la  $X_1$  y  $X_2$  son elementos de la muestra aleatoria simple, y como tales son independientes e idénticamente distribuidos]

- (a) Halle el valor de  $k_1$  y  $k_2$  para que ambas regiones críticas posean el mismo nivel de significación  $\alpha$ . Dado que ambos contrastes tienen el mismo nivel de significación, ¿esto implica que ambos son igualmente adecuados para realizar el contraste?

*Solución:* Primero necesito conocer la distribución de los estadísticos:

El primero es la media muestral, de la que sabemos que

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

donde  $\sigma = \sqrt{2}$ , y  $n = 20$ .

*Solución:* Primero necesito conocer la distribución de los estadísticos:

El primero es la media muestral, de la que sabemos que

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

donde  $\sigma = \sqrt{2}$ , y  $n = 20$ .

El segundo también es una media; la única diferencia es que  $n = 2$ .

*Solución:* Primero necesito conocer la distribución de los estadísticos:

El primero es la media muestral, de la que sabemos que

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

donde  $\sigma = \sqrt{2}$ , y  $n = 20$ .

El segundo también es una media; la única diferencia es que  $n = 2$ .

Por tanto, buscamos por una parte  $k_1$  tal que

$$P_{H_0} \left( \frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} > \frac{k_1 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} \right) = 0.05.$$

Es decir,  $P \left( Z > \frac{k_1}{0.316} \right) = 0.05$ , donde  $Z \sim N(0, 1)$  por lo que  $\frac{k_1}{0.3162} = 1.64$  y  $k_1 = 0.5186$

*Solución:* Primero necesito conocer la distribución de los estadísticos:

El primero es la media muestral, de la que sabemos que

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

donde  $\sigma = \sqrt{2}$ , y  $n = 20$ .

El segundo también es una media; la única diferencia es que  $n = 2$ .

Por tanto, buscamos por una parte  $k_1$  tal que

$$P_{H_0} \left( \frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} > \frac{k_1 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} \right) = 0.05.$$

Es decir,  $P \left( Z > \frac{k_1}{0.316} \right) = 0.05$ , donde  $Z \sim N(0, 1)$  por lo que  $\frac{k_1}{0.3162} = 1.64$  y  $k_1 = 0.5186$

Por otra parte buscamos  $k_2$  tal que

$$P_{H_0} \left( \frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}} > \frac{k_2 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}} \right) = 0.05$$

ya que por  $H_0$   $\mu = 0$ . Es decir,  $P \left( Z > \frac{k_2}{1} \right) = 0.05$  ó  $k_2 = 1.64$

Estos valores para  $k_1$  y  $k_2$  garantizan que ambos contrastes tienen una probabilidad del 5% de cometer el error tipo I (rechazar  $H_0$  cuando ésta es cierta). Pero no sabemos cual es la probabilidad de cometer el error tipo II. Por lo que no podemos saber todavía que contraste es más adecuado.

Ejercicio 12

(b) Calcule la potencia de ambos contrastes ¿Que podemos decir acerca de la idoneidad de ambas regiones críticas?

- (b) Calcule la potencia de ambos contrastes ¿Que podemos decir acerca de la idoneidad de ambas regiones críticas?

*Solución:* Buscamos la probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando  $H_1$  es cierta, es decir

$$P_{H_1} \left( \frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} > \frac{0.5186 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} \right).$$

Es decir,  $P(Z > \frac{0.5186-0.5}{0.316}) = P(Z > 0.05886)$  que es igual a  $1 - P(Z < 0.05886) = 1 - 0.5199 = 0.48$

- (b) Calcule la potencia de ambos contrastes ¿Que podemos decir acerca de la idoneidad de ambas regiones críticas?

*Solución:* Buscamos la probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando  $H_1$  es cierta, es decir

$$P_{H_1} \left( \frac{\hat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} > \frac{0.5186 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} \right).$$

Es decir,  $P(Z > \frac{0.5186-0.5}{0.316}) = P(Z > 0.05886)$  que es igual a  $1 - P(Z < 0.05886) = 1 - 0.5199 = 0.48$

Por otra parte, la potencia del segundo contraste es

$$P_{H_1} \left( \frac{\hat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}} > \frac{1.64 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}} \right)$$

Es decir,  $P(Z > \frac{1.64-.5}{1}) = P(Z > 1.14)$  que es igual a  $1 - P(Z < 1.14) = 1 - 0.8729 = 0.1271$

El primer contraste es mucho mejor que el segundo, ya que teniendo ambos el mismo nivel crítico, el primer contraste es más potente (menor probabilidad de cometer el error tipo II).

Ejercicio 12

(c) ¿Variaría su respuesta a los apartados anteriores si aumentara el tamaño muestral?

(c) ¿Variaría su respuesta a los apartados anteriores si aumentara el tamaño muestral?

*Solución:* Al incrementar el tamaño muestral, el segundo contraste no se ve afectado; veamos que pasa con el primero.

Necesitamos encontrar un  $k_1$  tal que

$$P_{H_0} \left( \frac{\widehat{x} - \mu}{\sqrt{2/n}} > \frac{k_1 - \mu}{\sqrt{2/n}} \right) = 0.05.$$

Es decir,  $\frac{k_1}{\sqrt{2/n}} = 1.64$ , o bien  $k_1 = 1.64 \cdot \sqrt{2/n}$ .

Entonces

$$\begin{aligned} P \left( Z > \frac{k_1 - 0.5}{\sqrt{2/n}} \right) &= P \left( Z > \frac{1.64\sqrt{2/n} - 0.5}{\sqrt{2/n}} \right) \\ &= P \left( Z > 1.64 - \frac{0.5}{\sqrt{2/n}} \right) = P \left( Z > 1.64 - \frac{0.5\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

probabilidad que crece con el tamaño muestral y tiende a 1 cuando el tamaño muestral tiende a infinito. Así pues, a mayor muestra mayor potencia del primer contraste, sin que varíe la potencia del segundo.

Ejercicio 12

## 6.2. Contrastes sobre la varianza

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$

▪  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad g(\mathbf{X}) = \widehat{\mathbf{s}}^2; \quad \frac{(n-1)\widehat{\mathbf{s}}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$

▪  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad g(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{s}}^2; \quad \frac{(n-1)\hat{\mathbf{s}}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$

a) Si  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$  o  $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$  ( $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ )

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \hat{\mathbf{s}}^2 > k_\alpha \right\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{(n-1)\hat{\mathbf{s}}^2}{\sigma^2} > \chi_{(n-1, 1-\alpha)}^2 \right\}$$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$

▪  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad g(\mathbf{X}) = \hat{s}^2; \quad \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$

a) Si  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$  o  $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 \quad (\sigma_1^2 > \sigma_0^2)$

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \hat{s}^2 > k_\alpha \right\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} > \chi_{(n-1, 1-\alpha)}^2 \right\}$$

b) Si  $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$  o  $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 \quad (\sigma_1^2 < \sigma_0^2)$

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \hat{s}^2 < k_\alpha \right\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} < \chi_{(n-1, \alpha)}^2 \right\}$$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$

▪  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad g(\mathbf{X}) = \hat{s}^2; \quad \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$

a) Si  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$  o  $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$  ( $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ )

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \hat{s}^2 > k_\alpha \right\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} > \chi_{(n-1, 1-\alpha)}^2 \right\}$$

b) Si  $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$  o  $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$  ( $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$ )

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \hat{s}^2 < k_\alpha \right\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} < \chi_{(n-1, \alpha)}^2 \right\}$$

c) Si  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \hat{s}^2 > k_\alpha \quad \text{ó} \quad \hat{s}^2 < k_\alpha^* \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} > \chi_{(n-1, 1-\alpha/2)}^2 \quad \text{ó} \quad \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} < \chi_{(n-1, \alpha/2)}^2 \right\}$$

**EJERCICIO 13.** Sea  $X$  una variable aleatoria que sigue una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ . Se desea contrastar  $H_0: \sigma^2 = 100$  frente a  $H_1: \sigma^2 < 100$  empleando el contraste uniformemente más potente. Se tiene una muestra de tamaño 31 con una cuasi-varianza  $s^2 = 75$ . Resuelva el contraste con una significación del 5% y del 1%.

*Solución:* La región crítica óptima es: el conjunto de muestras tales que  $s^2 < \lambda$ , donde  $\lambda$  satisface  $P_{H_0}(\widehat{s^2} < \lambda) = \alpha$ , es decir  $P_{H_0}\left(\frac{30\widehat{s^2}}{100} < \frac{30\lambda}{100}\right) = \alpha$ , donde  $\frac{30\widehat{s^2}}{100}$  se distribuye  $\chi_{30}^2$ .

1. Si se dispone de las tablas de una Chi cuadrado: Para  $\alpha = 0.05$  ha de ser  $\frac{30\lambda}{100} = 18.49$ , o bien  $\lambda = 61.633$ , y por tanto para dicho  $\alpha$  no se rechaza  $H_0$ . Así pues, tampoco se rechaza para  $\alpha = 0.01$ .
2. Si NO se dispone de las tablas de una Chi cuadrado: entonces empleamos la aproximación a una distribución normal.  $\frac{30\widehat{s^2}}{100}$  se distribuye  $\chi_{30}^2$ , cuyo valor esperado es 30 y cuya varianza es 60; por tanto, lo podemos aproximar por una  $N(30, 60)$ . Así pues,  $P_{H_0}\left(30\widehat{s^2}/100 < 30\lambda/100\right) = \alpha$  ó bien  $P_{H_0}\left(\frac{30\widehat{s^2}/100 - 30}{\sqrt{60}} < \frac{30\lambda/100 - 30}{\sqrt{60}}\right) = \alpha$ . Para  $\alpha = 0.05$  ha de ser  $\frac{30\lambda/100 - 30}{\sqrt{60}} = -1.64$  o bien  $\lambda = 57.65$ , y por tanto para dicho  $\alpha$  no se rechaza  $H_0$ . Así pues, tampoco se rechaza para  $\alpha = 0.01$ .



### 6.3. Contrastes sobre la esperanza cuando la varianza es desconocida

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$$

$$\blacksquare H_0 : \mu = \mu_0 \quad g(\mathbf{X}) = \hat{x}; \quad \frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} \sim t_{n-1}$$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$

▪  $H_0 : \mu = \mu_0 \quad g(\mathbf{X}) = \hat{\bar{x}}; \quad \frac{\hat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} \sim t_{n-1}$

a) Si  $H_1 : \mu > \mu_0; \quad \text{ó} \quad H_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$

$$RC = \{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha \} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} > t_{n-1, 1-\alpha} \right\}$$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$

▪  $H_0 : \mu = \mu_0 \quad g(\mathbf{X}) = \hat{\bar{x}}; \quad \frac{\hat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} \sim t_{n-1}$

a) Si  $H_1 : \mu > \mu_0; \quad \text{ó} \quad H_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} > t_{n-1, 1-\alpha} \right\}$$

b) Si  $H_1 : \mu < \mu_0; \quad \text{ó} \quad H_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 < \mu_0)$

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_\alpha\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} < t_{n-1, \alpha} \right\}$$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$

▪  $H_0 : \mu = \mu_0 \quad g(\mathbf{X}) = \hat{\bar{x}}; \quad \frac{\hat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} \sim t_{n-1}$

a) Si  $H_1 : \mu > \mu_0; \quad \text{ó} \quad H_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} > t_{n-1, 1-\alpha} \right\}$$

b) Si  $H_1 : \mu < \mu_0; \quad \text{ó} \quad H_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 < \mu_0)$

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} < k_\alpha\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} < t_{n-1, \alpha} \right\}$$

c) Si  $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \bar{x} > k_\alpha \quad \text{ó} \quad \bar{x} < k_\alpha^*\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} > t_{n-1, 1-\alpha/2} \quad \text{ó} \quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} < t_{n-1, \alpha/2} \right\}$$

### 6.3.1. Contrastes de $\beta$ en el Modelo Lineal Simple

**EJERCICIO 14.** En el siguiente modelo de regresión simple,  $Y = \alpha + \beta X + U$ , donde  $Y$  mide la tasa de crecimiento del PIB real y  $X$  la tasa de crecimiento de la masa monetaria. Tenemos una muestra de tamaño 35. Queremos contrastar la hipótesis de neutralidad monetaria en esta muestra (es decir, la masa monetaria no tiene efecto real sobre el nivel del PIB). Proponga la hipótesis nula y alternativa que, según la  $t^a$  económica, crea más conveniente para realizar el contraste, así como la región crítica. ¿Cual es la distribución del estadístico de contraste?

**EJERCICIO 14.** En el siguiente modelo de regresión simple,  $Y = \alpha + \beta X + U$ , donde  $Y$  mide la tasa de crecimiento del PIB real y  $X$  la tasa de crecimiento de la masa monetaria. Tenemos una muestra de tamaño 35. Queremos contrastar la hipótesis de neutralidad monetaria en esta muestra (es decir, la masa monetaria no tiene efecto real sobre el nivel del PIB). Proponga la hipótesis nula y alternativa que, según la  $t^a$  económica, crea más conveniente para realizar el contraste, así como la región crítica. ¿Cual es la distribución del estadístico de contraste?

*Solución:*  $H_0 : \beta = 0$ , frente a  $H_1 : \beta > 0$ . Nótese que, por  $t^a$  económica, lo más razonable es proponer un contraste de cola superior. La región crítica más conveniente es por tanto:  $RC = \left\{ \hat{\beta} > k \right\} = \left\{ \frac{\hat{\beta} - \beta}{dt(\hat{\beta})} > t_{1-\alpha} \right\}$ , donde  $\hat{\beta}$  es el estimador MCO y  $t_{1-\alpha}$  es el valor tabulado de una  $t$ -Student con 33 grados de libertad que deja a la izquierda un área de  $1 - \alpha$ .

Ejercicio 14

**EJERCICIO 15.** Sea  $Y$  la creación de empleo trimestral de las 17 Comunidades Autónomas (CCAA) españolas (excluidas Ceuta y Melilla) y  $X$  un indicador que mide el crecimiento en el nivel de actividad de la comunidad a lo largo del último año. Queremos estimar un modelo de regresión lineal simple que relacione  $Y$  en función de  $X$ . La media muestral de  $Y$  es 0.04, la de  $X$  es 0.03; sus desviaciones típicas son 0.2 y 0.15, respectivamente, y la covarianza es 0.01.

(a) Presente el modelo de regresión lineal y estime por MCO sus parámetros.

**EJERCICIO 15.** Sea  $Y$  la creación de empleo trimestral de las 17 Comunidades Autónomas (CCAA) españolas (excluidas Ceuta y Melilla) y  $X$  un indicador que mide el crecimiento en el nivel de actividad de la comunidad a lo largo del último año. Queremos estimar un modelo de regresión lineal simple que relacione  $Y$  en función de  $X$ . La media muestral de  $Y$  es 0.04, la de  $X$  es 0.03; sus desviaciones típicas son 0.2 y 0.15, respectivamente, y la covarianza es 0.01.

(a) Presente el modelo de regresión lineal y estime por MCO sus parámetros.

*Solución:* El modelo es  $Y_n = a + x_n \cdot b + U_n$

Las estimaciones MCO de  $a$  y  $b$  son:

$$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{0.01}{0.15^2} = 0.44; \quad \hat{a} = \bar{y} - \bar{x} \cdot \frac{s_{xy}}{s_x^2} = 0.04 - 0.03 \cdot 0.44 = 0.027;$$

Las estimación MCO de cada  $y_n$  es:  $\hat{y}_n = 0.027 + 0.44 \cdot x_n$  Ejercicio 15

**EJERCICIO 15.** Sea  $Y$  la creación de empleo trimestral de las 17 Comunidades Autónomas (CCAA) españolas (excluidas Ceuta y Melilla) y  $X$  un indicador que mide el crecimiento en el nivel de actividad de la comunidad a lo largo del último año. Queremos estimar un modelo de regresión lineal simple que relacione  $Y$  en función de  $X$ . La media muestral de  $Y$  es 0.04, la de  $X$  es 0.03; sus desviaciones típicas son 0.2 y 0.15, respectivamente, y la covarianza es 0.01.

(a) Presente el modelo de regresión lineal y estime por MCO sus parámetros.

*Solución:* El modelo es  $Y_n = a + x_n \cdot b + U_n$

Las estimaciones MCO de  $a$  y  $b$  son:

$$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{0.01}{0.15^2} = 0.44; \quad \hat{a} = \bar{y} - \bar{x} \cdot \frac{s_{xy}}{s_x^2} = 0.04 - 0.03 \cdot 0.44 = 0.027;$$

Las estimación MCO de cada  $y_n$  es:  $\hat{y}_n = 0.027 + 0.44 \cdot x_n$  Ejercicio 15

(b) La siguiente tabla muestra los residuos MCO de la estimación anterior correspondientes a cada una de las 17 comunidades autónomas (CCAA)

CCAA N°	residuo	CCAA N°	residuo	CCAA N°	residuo
1	0.79	7	0.24	13	-0.68
2	1.00	8	0.67	14	1.10
3	0.84	9	0.45	15	0.61
4	-0.51	10	-0.81	16	-0.60
5	-0.33	11	1.54	17	-2.40
6	-1.33	12	-0.60		

¿Qué interpretación tienen los residuos en el marco de este modelo? En función de dicha interpretación, comente los aspectos más destacables de esta tabla de residuos con relación a cómo ha sido la creación de empleo en las diferentes CCAA en el trimestre.

CCAA N°	residuo	CCAA N°	residuo	CCAA N°	residuo
1	0.79	7	0.24	13	-0.68
2	1.00	8	0.67	14	1.10
3	0.84	9	0.45	15	0.61
4	-0.51	10	-0.81	16	-0.60
5	-0.33	11	1.54	17	-2.40
6	-1.33	12	-0.60		

¿Qué interpretación tienen los residuos en el marco de este modelo? En función de dicha interpretación, comente los aspectos más destacables de esta tabla de residuos con relación a cómo ha sido la creación de empleo en las diferentes CCAA en el trimestre.

**Solución:** El residuo  $n$ -ésimo es:  $\hat{e}_n = y_n - \hat{y}_n = y_n - E_{Y_n|X_N}(Y_n | x_n)$  es decir, es la diferencia entre la creación de empleo observada en la comunidad  $n$ -ésima y la creación de empleo *esperada* dado el dato de crecimiento de la actividad de dicha comunidad.

Por tanto, residuos positivos indican mayor creación de empleo de lo esperado (dado el crecimiento de la actividad), y residuos negativos indican menor creación de empleo de lo esperado (dado el crecimiento de la actividad).

Por tanto, la comunidad que parece haber tenido un comportamiento mejor (dada la información disponible) es la comunidad número 11, y la que peor lo ha tenido es la número 17.

- (c) Suponga que desea llevar a cabo el contraste de significación individual de la pendiente del modelo de regresión. Indique qué hipótesis alternativa es la más apropiada para este contraste. ¿Qué estadístico de contraste y qué región crítica son más apropiados?

- (c) Suponga que desea llevar a cabo el contraste de significación individual de la pendiente del modelo de regresión. Indique qué hipótesis alternativa es la más apropiada para este contraste. ¿Qué estadístico de contraste y qué región crítica son más apropiados?.

*Solución:* No cabe esperar que crecimientos positivos del nivel de actividad perjudiquen la creación de empleo; por lo tanto el contraste debe ser de una sólo cola. Así pues:

$$H_0 : b = 0; \quad H_1 : b > 0; \quad \text{estadístico: } \frac{(\hat{b} - b)}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}} \sim t_{15};$$

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\hat{b}}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}} > k \right\}$$

Ejercicio 15

## 6.4. Contrastes de proporción

$X_i \sim B(1, p)$ ;       $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$

▪  $H_0 : p = p_0$        $g(\mathbf{X}) = \sum X_i \sim B(n, p)$

Sabemos por T.C.L. que para  $n$  grande (Novales, 1997, Secc. 9.6)

$$\frac{\frac{g(\mathbf{X})}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$$

$$X_i \sim B(1, p); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{i.i.d. (m.a.s)}$$

$$\blacksquare H_0 : p = p_0 \quad g(\mathbf{X}) = \sum X_i \sim B(n, p)$$

Sabemos por T.C.L. que para  $n$  grande (Novales, 1997, Secc. 9.6)

$$\frac{\frac{g(\mathbf{X})}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$$

$$\text{Si } H_1 : p < p_0; \quad \text{ó } H_1 : p = p_1 \quad (p_1 < p_0)$$

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\sum x}{n} < k_\alpha \right\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\frac{\sum x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < z_\alpha \right\}$$

#### Ejemplo 4. [Proporción:]

- $\sum X$ : N° de parados en España
- Queremos contrastar que no ha variado respecto al mes anterior (fue el 21%)
- Última EPA dice que *Activos* = 60.000, de los cuales
  - 48000 trabajan
  - 12000 no trabajan

$$\text{por tanto } \hat{p} = \frac{12000}{60000} = 0.2$$

- Queremos contrastar  $H_0 : p = .21$  frente a  $H_1 : p = 0.2$  con un nivel de significación de  $\alpha$ .

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\sum x}{n} < k_\alpha \right\} = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\frac{\sum x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < z_\alpha \right\};$$

donde

$$z_\alpha = \frac{k_\alpha - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{k_\alpha - 0.21}{\sqrt{\frac{0.21 \cdot 0.79}{60000}}}$$

Así pues,

$$z_{0.001} = -3.1 \quad \Rightarrow \quad k_{0.001} = 0.2048$$

Así pues,

$$\begin{aligned} z_{0.001} &= -3.1 & \Rightarrow & k_{0.001} = 0.2048 \\ z_{0.01} &= -2.33 & \Rightarrow & k_{0.01} = 0.2061 \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} z_{0.001} &= -3.1 & \Rightarrow k_{0.001} &= 0.2048 \\ z_{0.01} &= -2.33 & \Rightarrow k_{0.01} &= 0.2061 \\ z_{0.025} &= -1.96 & \Rightarrow k_{0.025} &= 0.2067 \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}z_{0.001} &= -3.1 & \Rightarrow k_{0.001} &= 0.2048 \\z_{0.01} &= -2.33 & \Rightarrow k_{0.01} &= 0.2061 \\z_{0.025} &= -1.96 & \Rightarrow k_{0.025} &= 0.2067 \\z_{0.1} &= -1.285 & \Rightarrow k_{0.1} &= 0.2078\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}) &= P\left(\frac{g(\mathbf{X})}{n} \leq \frac{g(\mathbf{x})}{n}\right) \\&= P\left(\frac{\frac{g(\mathbf{X})}{n} - 0.21}{\sqrt{\frac{0.21 \cdot 0.79}{60000}}} \leq \frac{0.2 - 0.21}{\sqrt{\frac{0.21 \cdot 0.79}{60000}}} = -6.01 \mid H_0\right) = 0.000\end{aligned}$$

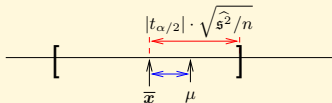
es decir, rechazo la hipótesis nula para casi cualquier nivel de significación.

## 7. Intervalos de confianza y contrastes bilaterales



$\mu$  pertenece al intervalo de confianza  $IC_{1-\alpha}^{\mu}(\mathbf{x})$ ,

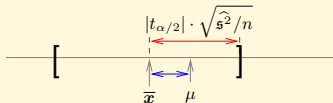
$$|\bar{\mathbf{x}} - \mu| \leq |t_{\alpha/2}| \cdot \sqrt{\widehat{\mathbf{s}}^2/n} \quad (7.1)$$





$\mu$  pertenece al intervalo de confianza  $IC_{1-\alpha}^{\mu}(\mathbf{x})$ ,

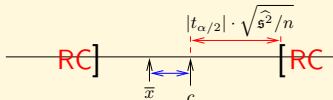
$$|\bar{x} - \mu| \leq |t_{\alpha/2}| \cdot \sqrt{\hat{s}^2/n} \quad (7.1)$$



Por otra parte **no rechazamos**  $H_0: \mu = c$  [ $H_1: \mu \neq c$ ] **si:**

$$|\bar{x} - c| \leq |t_{\alpha/2}| \cdot \sqrt{\hat{s}^2/n} \quad (7.2)$$

donde por  $H_0: \mu = c$





Intervalo de confianza

$(1 - \alpha)$

=

Conjunto

hipótesis

aceptables con significación

$\alpha$

Contrastes bilaterales al  $\alpha\%$  e intervalos de confianza al  $1 - \alpha\%$ ;

- Rechazar  $H_0 : \mu = c$ ; frente  $H_0 : \mu \neq c$ ;

si y sólo si  $c \notin IC_{1-\alpha}^{\mu}(\mathbf{x})$

## 8. Contraste de hipótesis sobre dos muestras

Sean  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$  y  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

**independientes**; y sean los siguientes *m.a.s*

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

y

$$Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$$

Sabemos que los estimadores de media muestral se distribuyen

$$\hat{x} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right); \quad \hat{y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{m}\right);$$

por tanto la diferencia  $\widehat{x} - \widehat{y}$  se distribuye

$$\widehat{x} - \widehat{y} \sim N \left[ (\mu_X - \mu_Y), \left( \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m} \right) \right]$$

Tipificando

$$Z = \frac{(\widehat{x} - \widehat{y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0, 1).$$

Por tanto, si  $H_0: \mu_X = \mu_Y$  frente a  $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ ; calculando el intervalo de confianza del 95 %

$$0.95 = P \left( (\widehat{x} - \widehat{y}) - 1.96 \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \leq \mu_X - \mu_Y \leq (\widehat{x} - \widehat{y}) + 1.96 \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \right)$$

Si el intervalo contiene el cero

$$(H_0 : \mu_X = \mu_Y \Rightarrow \mu_X - \mu_Y = 0)$$

entonces no rechazamos  $H_0$ .

**Ejemplo 5.** [Igualdad de esperanzas (varianzas conocidas):] (Novales, 1997, ejercicio 10.5 (pp. 395))

**Ejemplo 5.** [Igualdad de esperanzas (varianzas conocidas):] (Novales, 1997, ejercicio 10.5 (pp. 395))

*m.a.s* ( $n=64$ ) de  $X \sim N(\mu_X, 1600)$ , con  $\bar{x} = 247.42$ ;

*m.a.s* ( $m=144$ ) de  $Y \sim N(\mu_Y, 2304)$ ; con  $\bar{y} = 258.22$ .

Queremos contrastar  $H_0: \mu_X = \mu_Y$  frente a  $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ .

$$\begin{aligned} \text{intervalo de confianza} &= \left[ \hat{\bar{x}} - \hat{\bar{y}} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \right] \\ &= \left[ 247.42 - 258.22 \pm 1.96 \sqrt{\frac{1600}{n} + \frac{2304}{m}} \right] \\ &= [-23.35, 1.75] \end{aligned}$$

que contiene el cero; por lo tanto no podemos rechazar  $H_0$  al nivel de significación del 5%.

Sean  $X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$  y  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$

**independientes**; y sean los siguientes *m.a.s*

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

y

$$Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$$

Si denotamos la cuasivarianza conjunta de ambas muestras como

$$s^2 = \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2}$$

entonces

$$\frac{(\widehat{\bar{x}} - \widehat{\bar{y}}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim t_{n+m-2}$$

**Ejemplo 6.** [Igualdad de esperanzas (varianzas desconocidas pero iguales):] (Novales, 1997, ejercicio 10.6 (pp. 395))

Queremos contrastar igualdad de salarios entre hombres y mujeres:

**Mujeres** *m.a.s* ( $n=60$ ) de  $X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ , con  $\bar{x} = 1.04$ , y con  $\sum x_i^2 = 80$ ;

**Hombres** *m.a.s* ( $m=120$ ) de  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$ ; con  $\bar{y} = 1.25$ , y con  $\sum y_i^2 = 200$ .

Podemos realizar el contraste de  $H_0: \mu_X = \mu_Y$  frente a  $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ .

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{80 - 60 \cdot 1.04^2}{59} = 0.256; \quad s_y^2 = 0.105$$

de modo que

$$s^2 = \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2} = 0.155$$

Finalmente el intervalo de confianza del 95 % es

$$\begin{aligned} & \left[ \hat{\bar{x}} - \hat{\bar{y}} \pm 1.96 \sqrt{s^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)} \right] \\ &= \left[ 1.04 - 1.25 \pm 1.96 \sqrt{0.155 \left( \frac{1}{60} + \frac{1}{120} \right)} \right] \\ &= [-0.3311, -0.0889] \end{aligned}$$

que no contiene el cero (por lo que rechazamos con  $\alpha = 5\%$ ).

Es preferible que la hipótesis alternativa  $H_1: \mu_X < \mu_Y$  ya que en principio es poco realista (dada la lamentable situación del mercado laboral en ciertos sectores) contemplar la posibilidad de que sean las mujeres las que cobren más. Esto permite realizar un contraste de hipótesis más potente. Por tanto, el contraste debe ser de una sola cola y la región crítica es

$$\left[ \hat{\bar{x}} - \hat{\bar{y}} < -1.65 \sqrt{0.155 \left( \frac{1}{60} + \frac{1}{120} \right)} \right] = \left[ \hat{\bar{x}} - \hat{\bar{y}} < -0.102 \right]$$

Por lo que rechazamos la hipótesis de igualdad de salarios (ó la  $H_0 \mu_X \geq \mu_Y$ ).

Sean  $X \sim \text{Bernoulli}(p_X)$  y  $Y \sim \text{Bernoulli}(p_Y)$   
**independientes**; y sean los siguientes *m.a.s*

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

y

$$Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$$

$H_0: p_X = p_Y$ ;       $H_1: p_X \neq p_Y$  (nivel de significación  $\alpha$ ).

Emplearemos como estimador de  $p_X$  el estadístico

$$\widehat{p}_X = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{\mathcal{X}}{n}$$

donde  $\mathcal{X} \sim B(n, p)$  es el número total de éxitos de  $X$  (y análogamente para  $p_Y$ ).



Si  $H_0$  ( $p_X = p_Y = p$ ) es cierta; entonces

$$\widehat{p}_X - \widehat{p}_Y$$

tiene esperanza nula y varianza

$$\begin{aligned}\text{Var}(\widehat{p}_X - \widehat{p}_Y) &= \text{Var}(\widehat{p}_X) + \text{Var}(\widehat{p}_Y) = \frac{p(1-p)}{n} + \frac{p(1-p)}{m} \\ &= \frac{(n+m)p(1-p)}{nm}\end{aligned}$$

Entonces, por el T.C.L. (bajo  $H_0$ )

$$\frac{\widehat{p}_X - \widehat{p}_Y - \text{E}(\widehat{p}_X - \widehat{p}_Y)}{\sqrt{\text{Var}(\widehat{p}_X - \widehat{p}_Y)}} = \frac{\frac{x}{n} - \frac{y}{m}}{\sqrt{\frac{(n+m)p(1-p)}{nm}}}$$

Posee una distribución aproximada  $N(0, 1)$  para  $m$  y  $n$  grandes.  
(Nótese que  $p$  es desconocido).

Puesto que  $p$  es desconocido, necesitamos una estimación a partir de

$$\hat{p} = \frac{\mathcal{X} + \mathcal{Y}}{m + n}.$$

Finalmente llegamos al siguiente contraste

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si: } \left| \frac{\frac{x}{n} - \frac{y}{m}}{\sqrt{\frac{(n+m)}{nm} \frac{x+y}{m+n} \left(1 - \frac{x+y}{m+n}\right)}} \right| \geq z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$$

donde  $x$  e  $y$  son las realizaciones de  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  (el número de éxitos de  $X$  e  $Y$  en la muestra).

**Ejemplo 7. [Igualdad de proporciones:]** (Novales, 1997, ejercicio 10.7 (pp. 397))

Una entidad financiera quiere contrastar si la proporción de impagos en créditos hipotecarios y al consumo son iguales.

**Consumo** *m.a.s* ( $n=100$ ) de  $X \sim \text{Bernoulli}(p_X)$  de donde

$$X = \sum X_i \sim B(100, p_X) \text{ con } x = 8$$

**Hipotecario** *m.a.s* ( $n=60$ ) de  $Y \sim \text{Bernoulli}(p_Y)$  de donde

$$Y = \sum Y_i \sim B(60, p_Y) \text{ con } y = 3$$

Contrastar  $H_0: p_X = p_Y$  frente a  $H_1: p_X \neq p_Y$

$$\hat{p} = \frac{8 + 3}{100 + 60} = 0.06875$$

por lo que el estadístico es

$$\left| \frac{\frac{x}{n} - \frac{y}{m}}{\sqrt{\frac{(n+m)}{nm} \frac{x+y}{m+n} \left(1 - \frac{x+y}{m+n}\right)}} \right| = \left| \frac{\frac{8}{100} - \frac{3}{60}}{\sqrt{\frac{(100+60)}{100 \cdot 60} \frac{8+3}{100+60} \left(1 - \frac{8+3}{100+60}\right)}} \right| = |0.73| < z_{95\%},$$

donde  $z_{95\%} = 1.96$ ; No rechazamos  $H_0$ .

Sean  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$  y  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  **independientes**, con  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$ ,  $\sigma_X^2$  y  $\sigma_Y^2$  desconocidas; y los siguientes *m.a.s*

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \text{ y } \mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$$

El contraste  $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  frente a  $H_0: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$  con un nivel de significación  $\alpha$  consiste en rechazar  $H_0$  si

$$\frac{s_Y^2}{s_X^2} \leq F_{m-1, n-1, \alpha/2} \quad \text{ó} \quad \frac{s_Y^2}{s_X^2} \geq F_{m-1, n-1, 1-\alpha/2}$$

**Ejemplo 8. [Igualdad de varianzas:]** (Novales, 1997, ejercicio 10.8 (pp. 398)) Se quiere estudiar la renta de las comunidades autónomas del norte y del sur de España, para ello queremos contrastar si el valor esperado es común en ambas regiones. Antes de comparar los valores esperados, debemos decidir si la varianza de las distribuciones es la misma entre ambas poblaciones. Por tanto, realizaremos los siguientes pasos

1. Contrastaremos si las varianzas son iguales
2. En función del resultado de contraste anterior, elegiremos el estadístico más apropiado para contrastar igualdad de esperanzas.

**Norte** *m.a.s* (n=10) de  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

$$\sum x_i = 11018; \quad \sum x_i^2 = 12325480; \quad \bar{x} = 1101.8$$

**Sur** *m.a.s* (n=8) de  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$$\sum y_i = 7588; \quad \sum y_i^2 = 7329196; \quad \bar{y} = 948.5$$

1. Primero contrastamos igualdad de varianzas;  $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  frente a  $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{12325480 - 10 \cdot 1101.8^2}{9} = 20649.7;$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1} = \frac{7329196 - 8 \cdot 948.5^2}{7} = 18854$$

Por tanto  $F = \frac{s_x^2}{s_y^2} = 0.913$ , que pertenece a [ $F_{7,9,0.025} = 0.21$ ,  $F_{7,9,0.975} = 4.20$ ];

No rechazamos  $H_0$

2. Ahora contrastamos  $H_0: \mu_X = \mu_Y$  frente a  $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$  (suponiendo varianzas iguales)

$$s^2 = \frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2} = 19864.1$$

y puesto que bajo  $H_0$

$$\frac{(\hat{x} - \hat{y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim t_{n+m-2}$$

entonces

$$\frac{(\hat{x} - \hat{y})}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = 2.29$$

que no pertenece a  $[t_{16, 0.025} = -2.12, t_{16, 0.975} = 2.12]$ ; Rechazamos  $H_0$

## 9. Problemas

**EJERCICIO 16.** Para puestos de trabajo similares, sean  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$  los salarios de los hombres e  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  los salarios de las mujeres. Se quiere contrastar si los salarios de los hombres son mayores que los de las mujeres (si hay discriminación salarial).

1. Proponga la hipótesis nula y alternativa que considere más apropiada para llevar a cabo este contraste.
2. Proponga el estadístico de contraste y la región crítica para llevar a cabo este contraste, suponiendo independencia entre  $X$  e  $Y$  y conocidas las varianzas  $((\sigma_X^2, \sigma_Y^2) (4, 9))$ .

(NO resuelva el contraste, límitese a contestar lo que se le pide)

*Solución:* Lamentablemente, y dada la experiencia, no cabe esperar que los salarios de la mujeres sean superiores; por tanto el contraste debe ser de una sólo cola. Así pues:

1.  $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0; \quad H_1; \mu_X - \mu_Y > 0;$

2. estadístico:  $\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_y}}} \sim N(0, 1); \quad RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{4}{n_x} + \frac{9}{n_y}}} > z_{1-\alpha} \right.$

Ejercicio 16

**EJERCICIO 17.** Dado un nivel de significación  $\alpha$ , proponga la región crítica que crea más conveniente para resolver el siguiente contraste:  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ ,  $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ . (suponga mismo tamaño muestral,  $n$ , para la  $X$  e  $Y$ ) ¿Cambiaría la región crítica si  $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ ? Razone la respuesta.

*Solución:*  $RC_1 = \left\{ \frac{s_X^2}{s_Y^2} < k_1 \text{ o } \frac{s_X^2}{s_Y^2} > k_2 \right\}$ , con  $k_1 = F_{n,n,\alpha/2}$  y  $k_2 = F_{n,n,1-\alpha/2}$ . En el segundo caso,  $RC_2 = \left\{ \frac{s_X^2}{s_Y^2} > F_{n,n,1-\alpha} \right\}$ , ya que si usáramos la región de dos colas el contraste perdería potencia.

Ejercicio 17

**EJERCICIO 18.** Se cree que las terrazas y chiringuitos de verano tienen unos ingresos fijos “ $a$ ”, más unos ingresos que dependen de los metros cuadrados que ocupan (además de otras circunstancias independientes de su superficie, como son su situación, la proximidad a otros locales, la calidad del servicio, etc.)

La variable  $Y$  hace referencia a los ingresos de toda la temporada de verano en **miles de euros**. La variable  $X$  son los metros cuadrados ocupados por un establecimiento.

Establecimiento	$y_i$	$x_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$	$\hat{y}_i$	$\hat{e}_i$	$x_i \hat{e}_i$	$\hat{e}_i^2$
A	27	5	135	25	28	-1	-5	1
B	23	3	69	9	18	5	15	25
C	35	6	210	36	33	2	12	4
D	9	2	18	4	13	-4	-8	16
E	36	7	252	49	38	-2	-14	4
sumas	130	23	684	123	130	0	0	50

**Cuadro 1:**

Además se sabe que las varianzas y covarianzas muestrales son:

$$T \cdot s_x^2 = 17.2, \quad T \cdot s_y^2 = 480, \quad T \cdot s_{xy} = 86,$$

donde  $T$  es el tamaño muestral.

Suponga que plantea el siguiente modelo

$$Y_i = a + bx_i + U_i,$$

donde  $U_i$  son los otros factores que afectan a los ingresos distintos de la superficie ocupada. Se sabe que la distribución conjunta de dichos factores es:  $\mathbf{U} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ , donde  $\mathbf{I}$  es una matriz identidad de orden 5, y  $\sigma^2$  es la varianza de  $U_i$ , cuyo valor es desconocido.

- Estime por MCO los parámetros del modelo. ¿Cuál es el valor esperado del ingreso fijo de un establecimiento? ¿En cuanto aumenta el ingreso esperado de un local si hace crecer su terraza en un metro cuadrado?
- Estime por MCO la pendiente del modelo, pero dando un intervalo de confianza del 95 %.
- Un empresario hostelero dice que el rendimiento de un metro adicional de establecimiento rinde una cantidad de (al menos) seis mil euros (pero nunca menos). Contraste dicha hipótesis con una significación del 10 %. Bajo la hipótesis del empresario ¿cuál es el p-valor de la estimación del parámetro  $b$ ?
- ¿Qué establecimiento ha ingresado más respecto al nivel esperado, dada su superficie? ¿y cual menos?

(e) Dado el modelo estimado, ¿cuál es el ingreso esperado para un establecimiento con una superficie de 4 metros cuadrados?

**EJERCICIO 19.** Sean los siguientes datos:

Familia	$y_i$	$x_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$	$\hat{y}_i$	$\hat{e}_i$	$x_i \hat{e}_i$	$\hat{e}_i^2$
A	2	4	8	4	1.74	0.26	1.04	0.07
B	3	7	21	9	3.44	-0.44	-3.08	0.19
C	1	3	3	1	1.18	-0.18	-0.54	0.03
D	5	9	45	25	4.56	0.44	3.96	0.19
E	9	17	153	81	9.08	-0.08	-1.36	0.01
sumas	20	40	230	120	20	0	0	0.48

**Cuadro 2:**

donde  $Y$  es el gasto semanal de las familias, y  $X$  es su ingreso semanal.

Además se sabe que las varianzas y covarianzas muestrales son:

$$T \cdot s_y^2 = 124, \quad T \cdot s_x^2 = 40, \quad T \cdot s_{xy} = 70,$$

donde  $T$  es el tamaño muestral.

Suponga que plantea el siguiente modelo

$$Y_i = a + bx_i + U_i,$$

donde  $U_i$  son otros factores que afectan al consumo familiar distintos de sus ingresos. Se sabe que la distribución conjunta de dichos factores es:

$$U \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}),$$

donde  $\mathbf{I}$  es una matriz identidad de orden 5, y  $\sigma^2$  es la varianza de  $U_i$ , cuyo valor es desconocido.

- (a) Estime por MCO los parámetros del modelo.
- (b) Estime por MCO los parámetros del modelo pero dando un intervalo de confianza del 95 %.
- (c) Contraste la hipótesis de que “la propensión marginal es igual a uno” frente a “es menor que uno” con un nivel de significación del 10 %. ¿Cuál es el p-valor de la estimación del “de la propensión marginal estimada”?
- (d) ¿Cuál es la familia que más ha gastado respecto al nivel esperado, dados su ingresos? ¿y la que menos?
- (e) ¿Cuál es el gasto esperado para una familia que tuviera unos ingresos semanales iguales a 2?

**Test.** Conteste a las siguientes cuestiones.

- Queremos contrastar  $H_0: \theta = \theta_0$  frente a  $H_1: \theta = \theta_1$ , ( $\theta_1 \neq \theta_0$ ); para ello empleamos la región crítica óptima en sentido de Neyman-Pearson. Para el nivel de significación  $\alpha = 0.10$  encontramos suficiente evidencia en contra de la hipótesis nula y en favor de la alternativa. De las siguientes afirmaciones:
  - para niveles de significación superiores al 10 % también rechazaríamos la  $H_0$ .
  - únicamente podemos aumentar la potencia disminuyendo el nivel de significación.
  - La potencia del contraste crece con la distancia entre  $\theta_1$  de  $\theta_0$ .
  - La potencia del contraste es independiente del nivel de significación.

(a) Sólo la (i) es verdadera.                      (b) La (i) y la (iii) son verdaderas  
(c) Ninguna es verdadera                      (d) Todas son verdaderas
- Sea  $X$  una variable aleatoria que sigue una distribución desconocida con momentos definidos. Empleando la media muestral se desea contrastar  $H_0: E(X) = 1$  frente a  $H_1: E(X) \neq 1$ ; y se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño  $n$ . Entonces:
  - No podemos realizar el contraste
  - El Teorema Central del Límite nos facilita la distribución exacta del estadístico de contraste bajo la nula cuando  $n > 30$
  - El Teorema Central del Límite nos facilita la distribución de  $E(X)$ .
  - El Teorema Central del Límite nos facilita una distribución aproximada del estadístico para muestras finitas.

**El siguiente texto es válido para las 2 siguientes preguntas:** La variable aleatoria  $X$  tiene la siguiente función de densidad:  $f_X(x) = 2x/a^2$ , definida en el intervalo  $[0, a]$ , con  $a > 0$ . Queremos contrastar  $H_0: a = 1$  frente a  $H_1: a > 1$ . Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 1 y de dos tests que vienen caracterizados por las siguientes regiones críticas:

**Test 1:**  $RC_1 = \{x | x > 0.987\}$

**Test 2:**  $RC_2 = \{x | x < 0.158\}$ .

3. El nivel de significación:

- (a) es el mismo para las dos regiones críticas e igual a 0.025.
- (b) ninguna de las restantes.
- (c) para la  $RC_1$  es 0.025 y para la  $RC_2$  es menor, porque la región crítica  $RC_2$  es mejor.
- (d) para la  $RC_1$  es 0.025 y para la  $RC_2$  es mayor, porque la región crítica  $RC_2$  es peor.

4. Con relación a la función de potencia de ambos contrastes, comente cual de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- i) La función potencia evaluada en  $a = 1$  es la misma en ambos casos
- ii) Las dos son crecientes y convergen monótonamente hacia 1, aunque la primera lo hace más rápido que la segunda.
- iii) La función potencia está definida para cualquier valor de  $a$  en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

iv) La primera converge a 1 y la segunda es decreciente.

- (a) sólo la i) y la ii)
- (b) sólo la ii)
- (c) sólo la i) y la iv)
- (d) sólo la i)

\_\_\_\_\_ ■ fin del grupo de preguntas ■ \_\_\_\_\_

5. Sea  $X$  una variable aleatoria que sigue una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ . Se desea contrastar  $H_0: \sigma^2 = 100$  frente a  $H_1: \sigma^2 < 100$  empleando el contraste uniformemente más potente. Se tiene una muestra de tamaño 31 con una cuasivarianza  $s^2 = 75$ . Entonces:

- (a) con nivel de significación del 5% no se rechaza  $H_0$  en favor de  $H_1$ .
- (b) con nivel de significación del 1% se rechaza  $H_0$  en favor de  $H_1$ .
- (c) la región crítica uniformemente más potente es de dos colas.
- (d) ninguna de las restantes.

*Solución:* La región crítica óptima es: rechazar si  $s^2 < \lambda$ , donde  $\lambda$  satisface  $P(\widehat{s^2} < \lambda | H_0)$

$\alpha$ , o bien  $P\left(\frac{30\widehat{s^2}}{100} < \frac{30\lambda}{100} \mid \sigma^2 = 100\right) = \alpha$ , donde  $\frac{30\widehat{s^2}}{100}$  se distribuye  $\chi_{30}^2$ . Para

$\alpha = 0.05$  ha de ser  $\frac{30\lambda}{100} = 43.8$ , o bien  $\lambda = 146$ , y por tanto para dicho  $\alpha$  no se rechaza  $H_0$  en favor de  $H_1$  como señala la opción (5a). Además, para  $\alpha = 0.01$  ha

de ser  $\frac{30\lambda}{100} = 50.9$ , o bien  $\lambda = 169.67$ , y por tanto para dicho  $\alpha$  tampoco se rechaza  $H_0$  en favor de  $H_1$ , contrariamente a lo indicado en (5b). Debe notarse que opción (5b) puede descartarse a partir de la (5a) sin conocer el valor crítico al 99%, ya que dicho valor debe ser mayor que el valor crítico al 95%. La opción (5c) sólo sería cierta para  $H_1: \sigma^2 \neq 100$  (pero es claramente falso para  $H_1: \sigma^2 < 100$ ). Fin 5

6. Un inversor posee acciones de la empresa “teléfono” y está muy satisfecho con ellas, pero se está planteando venderlas para adquirir acciones de “movilón”. Sea  $X$  el rendimiento diario de “teléfono” e  $Y$  el de “movilón”. El inversor cambiaría las acciones si la rentabilidad media esperada que le da “movilón” es más del doble que la de “teléfono”. ¿Qué hipótesis debería contrastar a la hora de tomar su decisión?

(a)  $H_0: E(Y) = E(X)$ ,  $H_1: E(Y) > E(X)$

(b)  $H_0: E(Y) = E(X)$ ,  $H_1: E(Y) < E(X)$

(c)  $H_0: E(Y) = 2E(X)$ ,  $H_1: E(Y) > 2E(X)$

(d)  $H_0: 2E(Y) = E(X)$ ,  $H_1: 2E(Y) > E(X)$

\_\_\_\_\_ ▼ comienzo de un grupo de preguntas ▼ \_\_\_\_\_

**El siguiente texto es valido para las 3 siguientes preguntas:**

Sean  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$  e  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  las rentas familiares medias de las familias madrileñas y andaluzas respectivamente. Se desea contrastar si la dispersión de la renta en Andalucía es superior a la de Madrid en un porcentaje  $a \geq 1$ . Para

ello disponemos de sendas muestras aleatorias simples, e independientes de las poblaciones  $X$  e  $Y$ , con tamaños muestrales 61 y 121 respectivamente. Las cuasivarianzas muestrales son  $s_x^2 = 1$  y  $s_y^2 = 1.5$ , respectivamente. El diseño de hipótesis correcto para llevar a cabo este contraste es:  $H_0: \sigma_Y^2 = a\sigma_X^2$ , frente a  $H_1: \sigma_Y^2 > a\sigma_X^2$ .

7. La región crítica más adecuada para llevar a cabo este contraste para un nivel de significación  $\alpha$  es:

(a)  $\{s_y^2/s_x^2 > F_{(120,60),1-\alpha/2} \text{ ó } s_y^2/s_x^2 < F_{(120,60),\alpha/2}\}$

(b)  $\{s_y^2/s_x^2 > F_{(120,60),1-\alpha}\}$

(c)  $\{s_y^2/s_x^2 \frac{1}{a} > F_{(120,60),1-\alpha}\}$

(d)  $\{s_y^2/s_x^2 a > F_{(120,60),1-\alpha}\}$

8. Suponga que  $a = 1$  y  $\alpha = 0.05$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) A este nivel de significación, concluimos que la dispersión en Andalucía es superior a la de Madrid.

(b) A este nivel de significación, concluimos que la dispersión en Andalucía es igual a la de Madrid.

(c) A este nivel de significación, concluimos que la dispersión en Andalucía es inferior a la de Madrid

(d) A este nivel de significación, concluimos que la dispersión en Andalucía es igual a la de Madrid

9. Suponer que  $a = 2$  y  $\alpha = 0.05$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) A este nivel de significación, rechazamos la nula.

(b) A este nivel de significación, no rechazamos la nula.

(c) El contraste no cambia con respecto a la pregunta anterior.

(d) El valor del estadístico de contraste es 1.5, por lo que no rechazamos la nula.

\_\_\_\_\_ ■ fin del grupo de preguntas ■ \_\_\_\_\_

10. El p-valor de un determinado contraste es 0.12. ¿Qué nos dice esta información?

(a) Para niveles de significación superiores a 0.12, no aceptamos la hipótesis nula.

(b) Para niveles de significación inferiores a 0.12, no aceptamos la hipótesis nula.

(c) La probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo ésta verdadera es 0.12.

(d) La probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo ésta falsa es 0.12.

11. La variable aleatoria  $X$  es  $N(\mu, 1)$ . Queremos contrastar la siguiente hipótesis  $H_0: E(X) = \mu_0$  frente a  $H_1: E(X) \neq \mu_0$ . Para ello usamos la siguiente región crítica:  $RC = \{\mathbf{x} \text{ tal que } \bar{x} > k\}$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

(a) Podemos ajustar el nivel de significación eligiendo el valor de  $k$  adecuadamente.

(b) Cualquier región crítica de dos colas tiene mayor potencia que  $RC$ .

(c) El nivel de confianza depende del valor de  $k$  y de la distribución del estadístico.

(d) La región crítica  $RC$  no es la uniformemente mas potente.

12. Sea una variable aleatoria  $X$  distribuida uniformemente en el intervalo  $(0, a)$ . Se pretende contrastar la hipótesis  $H_0: a = 1$ , frente a la alternativa  $H_1: a > 1$ . Disponemos de una muestra de tamaño 1. La región crítica es:  $RC = \{x \text{ tales que } x > k\}$ . El valor de  $k$  para un nivel de significación de 0.05 es:

- (a) 0.975
- (b) 0.05
- (c) 0.95
- (d) 0.025

**Pista:** la función de densidad de una  $X$  distribuida uniformemente es

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/a & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

**El siguiente texto es válido para las preguntas 13, 14 y 15:** Un analista cree que la cotización Euro/Dolar puede representarse por una distribución  $N(\mu, 16)$ , siendo 16 la varianza. Desea contrastar  $H_0: \mu = 1$  frente a  $H_1: \mu < 1$ . Para ello, dispone de una muestra de tamaño  $n = 64$ , con  $\bar{x} = 0.92$ . Además, dada una variable aleatoria  $X$  distribuida  $N(0, 1)$ , definimos  $\phi(x) := P(X \leq x)$ .

13. Suponga que el analista rechaza  $H_0$  en favor de  $H_1$  si  $\bar{x} \geq 1.82$ . El nivel de significación ( $\alpha$ ) y potencia ( $W$ ) de dicha región crítica son, respectivamente:
- (a)  $\alpha = 0.05$  y  $W(z)$  es creciente en  $z$  para todo  $z < 1$ .

(b)  $\alpha = 0.05$  y  $W(z) = 1 - \phi(2 \cdot (1.82 - z))$  para todo  $z < 1$ .

(c)  $\alpha = 0.1$  y  $W(z)$  es creciente en  $z$  para todo  $z < 1$ .

(d)  $\alpha = 0.1$  y  $W(z) = 1 - \phi(2 \cdot (1.82 - z))$  para todo  $z < 1$ .

*Solución:* La región crítica es

$$RC = \{\mathbf{x} \mid \bar{x} > 1.82\} = \left\{ \mathbf{x} \mid \frac{\bar{x} - 1}{\sqrt{16/64}} > \frac{1.82 - 1}{\sqrt{16/64}} \right\}$$

por tanto

$$\alpha = P\left(\frac{\hat{\bar{x}} - 1}{1/2} > 1.64\right) = P(Z > 1.64) = 0.05$$

Por ser  $Z = \frac{\hat{\bar{x}} - 1}{1/2}$  una v.a.  $N(0, 1)$ . La función potencia es

$$\begin{aligned} W(z) &= P\left(\frac{\hat{\bar{x}} - z}{1/2} > \frac{1.82 - z}{1/2}\right) = 1 - P(Z \leq 2(1.82 - z)) \\ &= \phi(2 \cdot (1.82 - z)). \end{aligned}$$

que es una función decreciente!

Fin 13

14. El valor  $p$  proporcionado por la muestra es:

(a)  $1 - \phi(-0.16)$

(b)  $\phi(-0.16)$

(c)  $\phi(0.16) - \phi(-0.16)$

(d)  $\phi(0.16)$

*Solución:*

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= P(\bar{x} \geq 0.92 \mid H_0) \\ &= P\left(\frac{\bar{x} - 1}{\sqrt{16/64}} \geq \frac{0.92 - 1}{\sqrt{16/64}}\right) = 1 - P(Z \leq -0.16) \\ &= 1 - \phi(-0.16) \end{aligned}$$

Fin 14

**15.** Un intervalo de confianza al 95 % para el parámetro  $\mu$ :

(a) es  $(-1.96, 1.96)$

(b) tiene una amplitud decreciente con  $\bar{x}$ .

(c) es  $(0.1, 1.74)$

(d) ninguna de las anteriores.

*Solución:* Puesto que  $\frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$  Entonces

$$P\left(z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 95\%$$

donde  $z_{\alpha/2} = -1.96$  y  $z_{1-\alpha/2} = 1.96$ . Por lo tanto,

$$P\left(\hat{x} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{16}{64}} \leq \mu \leq \hat{x} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{16}{64}}\right) = 95\%$$

es decir, el intervalo de confianza es  $(-0.06, 1.9)$ .

Fin 15

**16.** Sea  $X$  una variable aleatoria que sigue una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ . Se desea contrastar  $H_0: \sigma^2 = 100$  frente a  $H_1: \sigma^2 < 100$ . Se tiene una muestra de tamaño 21 con una cuasivarianza  $s^2 = 75$ . Entonces:

- (a) con nivel de significación del 5% no se rechaza  $H_0$  en favor de  $H_1$ .
- (b) con nivel de significación del 1% se rechaza  $H_0$  en favor de  $H_1$ .
- (c) debería tomarse una región crítica de dos colas.
- (d) no se dispone de información suficiente para realizar el contraste.

*Solución:* La región crítica es

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \mid \hat{s}^2 < k_{\alpha} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \mid \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} < \chi_{(n-1, \alpha)}^2 \right\}$$

Por otra parte,  $\chi_{(20, 5\%)}^2 = 10.9$  y  $\chi_{(20, 1\%)}^2 = 9.59$ . Así pues,

$$0.05 = P\left(\frac{20\hat{s}^2}{100} < 10.9\right) = P\left(\hat{s}^2 < 54.5\right)$$

y

$$0.01 = P\left(\frac{20\widehat{s}^2}{100} < 9.59\right) = P\left(\widehat{s}^2 < 47.95\right);$$

es decir no se rechaza no al 5% ni al 10%.

Fin 16

**17.** Sea  $X$  una variable aleatoria que sigue una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ . Se desea contrastar  $H_0: \mu = 1$  frente a  $H_1: \mu \neq 1$ , disponiendo para ello de una muestra aleatoria simple de tamaño  $n$ . Entonces:

- (a) es necesario usar el Teorema Central del Límite para conocer la distribución bajo  $H_0$  del estadístico utilizado en el contraste.
- (b) el Teorema Central del Límite nos dice como se distribuye  $\mu$ , la media poblacional, a medida que aumenta  $n$ .
- (c) el estadístico utilizado depende de que  $\sigma^2$  sea conocido o no.
- (d) si  $n = 1$  y  $\sigma^2$  es conocido, no puede llevarse a cabo el contraste debido a que  $n$  es demasiado pequeño.

*Solución:* Si la varianza es conocida, el estadístico utilizado es:

$$\frac{\widehat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

Por el contrario, Si la varianza es desconocida, el estadístico utilizado es:

$$\frac{\hat{\bar{x}} - \mu}{\sqrt{\hat{s}^2/n}} \sim t_{n-1}.$$

Por otra parte el TCL no es necesario, pues

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

y por tanto la distribución de los estadísticos es conocida para cualquier tamaño muestral. Además,  $\mu$  y  $\sigma^2$  son constantes.

Fin 17

## A. Teorema de Neyman-Pearson



Sea  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim i.i.d$  con

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \boldsymbol{\theta}).$$

Cuando  $\boldsymbol{\theta}$  es conocido, esta función determina  $P(\mathbf{x}_0)$ .

Sea  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim i.i.d$  con

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \boldsymbol{\theta}).$$

Cuando  $\boldsymbol{\theta}$  es conocido, esta función determina  $P(\mathbf{x}_0)$ .

¿Cambio de óptica! conocida la muestra  $\mathbf{x}_0$  ¿Qué parámetros  $\boldsymbol{\theta}$  la hacen más probable según  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta})$ ?

Definimos la *función de verosimilitud* como

$$L(\boldsymbol{\theta} \mid x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = L(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}_0) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta})$$



Sea un contraste de  $H_0: \theta = \theta_0$  frente a  $H_1: \theta = \theta_1$  con un nivel de significación  $\alpha$ , y con región crítica  $RC$ ;

$$(\Theta = \{\theta_0, \theta_1\})$$

Sea un contraste de  $H_0: \theta = \theta_0$  frente a  $H_1: \theta = \theta_1$  con un nivel de significación  $\alpha$ , y con región crítica  $RC$ ;

$$(\Theta = \{\theta_0, \theta_1\})$$

$RC$  es **Óptima** ( para contrastar  $H_0: \theta = \theta_0$  frente a  $H_1: \theta = \theta_1$  con nivel de significación  $\alpha$  ) si para cualquier otra región crítica  $\widetilde{RC}$  con el mismo nivel de significación

$$W_{RC}(\theta_1) \geq W_{\widetilde{RC}}(\theta_1).$$

Es decir, para contrastar  $H_0: \theta = \theta_0$  frente a  $H_1: \theta = \theta_1$  con un nivel de significación  $\alpha$ , el contraste con  $RC$  es el más potente.

Sea  $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ , y sea  $\mathbf{X}$  un *m.a.s.* con función de densidad conjunta conocida  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta)$ .

Parece razonable caracterizar una *RC* como

$$\mathbf{x} \in RC \quad \text{si} \quad L(\theta_1 | \mathbf{x}) > L(\theta_0 | \mathbf{x})$$

es decir, si  $\mathbf{x}$  es más verosímil bajo  $H_1$  que bajo  $H_0$ .

Sea  $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ , y sea  $\mathbf{X}$  un *m.a.s.* con función de densidad conjunta conocida  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta)$ .

Parece razonable caracterizar una *RC* como

$$\mathbf{x} \in RC \quad \text{si} \quad L(\theta_1 | \mathbf{x}) > L(\theta_0 | \mathbf{x})$$

es decir, si  $\mathbf{x}$  es más verosímil bajo  $H_1$  que bajo  $H_0$ .

Sin embargo, si queremos garantizar un  $\alpha$  determinado, quizá tengamos que ajustar el criterio:

$$\mathbf{x} \in RC \quad \text{si} \quad c_\alpha \cdot L(\theta_1 | \mathbf{x}) > L(\theta_0 | \mathbf{x})$$

donde  $c_\alpha \cdot \geq 0$ .

Sea  $L(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}_0)$  la función de verosimilitud de una *m.a.s*  $\mathbf{x}_0$  extraída de una población con función de densidad  $f_{\mathbf{X}}(x, \boldsymbol{\theta})$  y sea el espacio paramétrico  $\Theta = \{\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1\}$ .

Si existe un contraste con *RC* caracterizada por

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \mid \frac{L(\boldsymbol{\theta}_0 \mid \mathbf{x})}{L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid \mathbf{x})} \leq c_\alpha \right\}$$

para algún  $c_\alpha$  tal que  $P(\mathbf{x} \in RC \mid \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0) = \alpha$ .

Entonces *RC* es la **región crítica óptima** para contrastar  $H_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$  frente a  $H_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$  con un nivel de significación  $\alpha$ .

TEO (Lema de Neyman-Pearson): Sea  $H_0 : \theta^* = \theta_0$  frente a  $H_1 : \theta^* = \theta_1$ . Supongamos que existe cierto  $k_\alpha$  tal que  $P_{\theta_0}(\mathcal{R}_{NP}) = \alpha$ , donde  $\mathcal{R}_{NP} = \{(x_1, \dots, x_n) : L(\theta_1; x_1, \dots, x_n) > k_\alpha L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)\}$ . Entonces  $\psi_{NP} = 1_{\mathcal{R}_{NP}}$  es el test más potente de nivel  $\alpha$ .

Dem: Sea  $\psi \in \Psi_\alpha$ . Hay que probar que  $\beta_{\psi_{NP}}(\theta_1) \geq \beta_\psi(\theta_1)$ . En primer lugar, notamos que  $\forall x_1, \dots, x_n$ ,

$$[\psi_{NP}(x_1, \dots, x_n) - \psi(x_1, \dots, x_n)][L(\theta_1; x_1, \dots, x_n) - k_\alpha L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)] \geq 0.$$

En efecto. Cuando  $x_1, \dots, x_n$  es tal que  $\psi_{NP}(x_1, \dots, x_n) = 1$ , entonces, como  $\psi \in [0, 1]$  se tiene que  $[\psi_{NP}(x_1, \dots, x_n) - \psi(x_1, \dots, x_n)] \geq 0$ . Por otra parte, como la definición de  $\psi_{NP}$  implica que  $\psi_{NP}(x_1, \dots, x_n) = 1$  es equivalente a  $L(\theta_1; x_1, \dots, x_n) > k_\alpha L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)$ , entonces  $L(\theta_1; x_1, \dots, x_n) - k_\alpha L(\theta_0; x_1, \dots, x_n) \geq 0$  de donde se deduce la desigualdad. El caso en que  $x_1, \dots, x_n$  es tal que  $\psi_{NP}(x_1, \dots, x_n) = 0$  se trata similarmente.

Dada esta propiedad, tenemos que (tratamos el caso continuo sin pérdida de generalidad),

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{\mathfrak{R}} \dots \int_{\mathfrak{R}} [\psi_{NP}(x_1, \dots, x_n) - \psi(x_1, \dots, x_n)] [L(\theta_1; x_1, \dots, x_n) - k_\alpha L(\theta_0; x_1, \dots, x_n)] \\
 &= \int_{\mathfrak{R}} \dots \int_{\mathfrak{R}} \psi_{NP}(x_1, \dots, x_n) L(\theta_1; x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\
 &\quad - \int_{\mathfrak{R}} \dots \int_{\mathfrak{R}} \psi(x_1, \dots, x_n) L(\theta_1; x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\
 &\quad - k_\alpha \left( \int_{\mathfrak{R}} \dots \int_{\mathfrak{R}} \psi_{NP}(x_1, \dots, x_n) L(\theta_0; x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \right. \\
 &\quad \left. - k_\alpha \int_{\mathfrak{R}} \dots \int_{\mathfrak{R}} \psi(x_1, \dots, x_n) L(\theta_0; x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \right) \\
 &= \beta_{\psi_{NP}}(\theta_1) - \beta_\psi(\theta_1) - k_\alpha (\beta_{\psi_{NP}}(\theta_0) - \beta_\psi(\theta_0)).
 \end{aligned}$$

Por definición de  $k_\alpha$  y dado que  $\psi \in \Psi_\alpha$  se tiene que  $(\beta_{\psi_{NP}}(\theta_0) - \beta_\psi(\theta_0)) \geq 0$  y por tanto, como  $k_\alpha \geq 0$  (si  $k_\alpha < 0$ , entonces  $\mathcal{R}_{NP} = \mathfrak{R}^n$  por lo que tendríamos que  $\beta_{\psi_{NP}}(\theta_0) = 1$ ) puede escribirse que

$$0 \leq \beta_{\psi_{NP}}(\theta_1) - \beta_\psi(\theta_1) - k_\alpha (\beta_{\psi_{NP}}(\theta_0) - \beta_\psi(\theta_0)) \leq \beta_{\psi_{NP}}(\theta_1) - \beta_\psi(\theta_1),$$

lo que prueba el resultado.

## B. Contraste uniformemente más potente

Un contraste de  $H_0: \theta \in \Theta_0$  frente a  $H_1: \theta \in \Theta_1$  definido por  $RC$  se dice que es un contraste **uniformemente más potente (UMP)** de tamaño  $\alpha$  si

1.  $\sup_{\theta \in \Theta_0} W_{RC}(\theta) = \alpha$
2.  $W_{RC}(\theta) \geq W_{\widetilde{RC}}(\theta)$  para todo  $\theta \in \Theta_1$   
donde  $W_{\widetilde{RC}}(\theta)$ , es la función potencia de cualquier otro contraste de tamaño  $\alpha$ .

Contrastes **UMP** no existen en general.



Decimos que un contraste  $H_0: \theta \in \Theta_0$  frente a  $H_1: \theta \in \Theta_1$  es **insesgado** si

$$W(\theta') \geq W(\theta'')$$

para cualquier  $\theta' \in \Theta_1$  y  $\theta'' \in \Theta_0$ .



En general, para un contraste genérico  $H_0: \theta \in \Theta_0$  frente a  $H_1: \theta \in \Theta_1$  no hay un resultado equivalente al T. de Neyman-Pearson ( No podemos garantizar la existencia de de un contraste UMP o UMP e insesgado ).

En general, para un contraste genérico  $H_0: \theta \in \Theta_0$  frente a  $H_1: \theta \in \Theta_1$  no hay un resultado equivalente al T. de Neyman-Pearson ( No podemos garantizar la existencia de un contraste UMP o UMP e insesgado ).

Un contraste que en ocasiones ofrece buenos resultados es

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \left| \frac{\sup_{\Theta_0} L(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{x})}{\sup_{\Theta} L(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{x})} = \lambda(\mathbf{x}) \leq c_\alpha \right. \right\}$$

donde  $0 \leq c_\alpha \leq 1$ .

## C. Trasparencias

### Lista de Trasparencias

- 1 Contrastes de hipótesis paramétricas
- 2 Contrastes de hipótesis paramétricas
- 3 Etapas de un contraste
- 4 Contraste de hipótesis de Neyman-Pearson
- 5 Contraste de hipótesis de Neyman-Pearson: errores
- 6 Contraste de hipótesis: errores
- 7 Función potencia: "*La bola de cristal*"
- 8 Contraste de hipótesis: Función potencia
- 9 Nivel crítico  $p$  (ó  $p$ -valor)
- 10 Contrastes bajo normalidad: esperanza (varianza conocida)
- 11 Contrastes bajo normalidad: esperanza (varianza conocida)
- 12 Contrastes bajo normalidad: esperanza (varianza conocida)
- 13 Contrastes bajo normalidad: esperanza (varianza conocida)
- 14 Contrastes bajo normalidad: esperanza (varianza conocida)
- 15 Contrastes de una y dos colas
- 16 Correcta selección de las regiones críticas
- 17 Mala selección de las regiones críticas
- 18 Mala selección de las regiones críticas

- 19 Correcta selección de las regiones críticas
- 20 Mala selección de las regiones críticas
- 21 Contrastes de Proporción
- 22 Intervalos de confianza y contrastes bilaterales
- 23 Intervalos y contrastes
- 24 Intervalos de confianza frente a contrastes de hipótesis bilaterales
- 25 Igualdad de esperanzas: varianzas conocidas
- 26 Igualdad de esperanzas: varianzas conocidas
- 27 Igualdad de esperanzas: Var. desconocidas e idénticas
- 28 Igualdad de proporciones
- 29 Igualdad de proporciones
- 30 Igualdad de proporciones
- 31 Igualdad de varianzas
- 32 Función de verosimilitud
- 33 Región crítica óptima
- 34 Región crítica óptima
- 35 Teorema de Neyman-Pearson
- 36 Contraste uniformemente más potente
- 37 Contraste insesgado
- 38 Contraste de razón de verosimilitudes
- 39 Partes del temario

## D. Bibliografía

- Novales, A. (1997). *Estadística y Econometría*. McGraw-Hill, Madrid, primera ed. ISBN 84-481-0798-5. 6, 75, 85, 87, 92, 94
- Peña, D. (2001). *Fundamentos de Estadística*. Alianza Editorial, Madrid. ISBN 84-206-8696-4. 6
- Peña, D. (2002). *Regresión y diseño de experimentos*. Alianza Editorial, Madrid. ISBN 84-206-8695-6. 6
- Peña, D. y Romo, J. (1997). *Introducción a la Estadística para la Ciencias Sociales*. McGraw-Hill, Madrid. ISBN 84-481-1617-8. 6

## E. Chuletario y Tablas

**Distribuciones de funciones de variables aleatorias** si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  
 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  y  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  con muestras de tamaños  $n, n_1$  y  $n_2$  respectivamente.

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1); \quad \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t_{n-1}; \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2; \quad \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}, \text{ si } \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

donde  $s^2$  denota la *cuasivarianza* muestral  $\left(\frac{1}{n-1} \sum (x - \bar{x})^2\right)$ .

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0, 1); \quad \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{(n+m)\widehat{PMV}(1-\widehat{PMV})}{n \cdot m}}} \sim N(0, 1); \quad \text{donde } \widehat{PMV} = \frac{n\hat{p}_1 + m\hat{p}_2}{n+m}$$

Probabilidad acumulada desde  $-\infty$  hasta  $z$  para una normal  $N(0, 1)$

$Z$	x.x0	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0.0	<b>0.5000</b>	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	<b>0.5987</b>	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	<b>0.6985</b>	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	<b>0.7486</b>	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	<b>0.7995</b>	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	<b>0.8508</b>	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	<b>0.8997</b>	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	<b>0.9495</b>	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	<b>0.9750</b>	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	<b>0.9898</b>	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Probabilidad acumulada desde  $-\infty$  hasta  $x$  para  $t$  de STUDENT con  $\nu$  grados de libertad

$\nu$	60.0 %	66.7 %	75.0 %	80.0 %	87.5 %	90.0 %	95.0 %	97.5 %	99.0 %	99.5 %	99.9 %
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.436	0.684	0.856	1.178	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.436	0.684	0.856	1.177	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.435	0.684	0.855	1.176	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.435	0.683	0.855	1.175	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.435	0.683	0.854	1.174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.435	0.683	0.854	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.255	0.434	0.682	0.852	1.170	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.255	0.434	0.681	0.851	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.255	0.434	0.680	0.850	1.165	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.255	0.433	0.679	0.849	1.164	1.299	1.676	2.009	2.403	2.679	3.261

$\nu$	Probabilidad acumulada desde 0 hasta $x$ para $\chi^2_\nu$										
	0.1%	0.5%	1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	12.5%	20.0%	25.0%	33.3%	50.0%
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.025	0.064	0.102	0.186	0.455
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.267	0.446	0.575	0.811	1.386
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	0.692	1.005	1.213	1.568	2.366
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.219	1.649	1.923	2.378	3.357
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	1.808	2.343	2.675	3.216	4.351
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	2.441	3.070	3.455	4.074	5.348
7	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.106	3.822	4.255	4.945	6.346
8	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	3.797	4.594	5.071	5.826	7.344
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	4.507	5.380	5.899	6.716	8.343
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	5.234	6.179	6.737	7.612	9.342
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	5.975	6.989	7.584	8.514	10.341
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	6.729	7.807	8.438	9.420	11.340
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	7.493	8.634	9.299	10.331	12.340
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	8.266	9.467	10.165	11.245	13.339
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	9.048	10.307	11.037	12.163	14.339
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	9.837	11.152	11.912	13.083	15.338
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	10.633	12.002	12.792	14.006	16.338
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	11.435	12.857	13.675	14.931	17.338
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	12.242	13.716	14.562	15.859	18.338
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	13.055	14.578	15.452	16.788	19.337
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	13.873	15.445	16.344	17.720	20.337
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	14.695	16.314	17.240	18.653	21.337
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	15.521	17.187	18.137	19.587	22.337
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	16.351	18.062	19.037	20.523	23.337
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	17.184	18.940	19.939	21.461	24.337
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	18.021	19.820	20.843	22.399	25.336
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	18.861	20.703	21.749	23.339	26.336
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	19.704	21.588	22.657	24.280	27.336
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	20.550	22.475	23.567	25.222	28.336
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	21.399	23.364	24.478	26.165	29.336
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	25.678	27.836	29.054	30.894	34.336
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	30.008	32.345	33.660	35.643	39.335
45	21.251	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	34.379	36.884	38.291	40.407	44.335
50	24.573	27.884	29.787	32.357	34.764	37.688	38.785	41.448	43.214	45.484	49.335

Probabilidad acumulada desde 0 hasta  $x$  para  $\chi^2_\nu$

$\nu$	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	6.211	6.867	7.841	8.558	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	7.283	7.992	9.037	9.803	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	8.351	9.107	10.219	11.030	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	9.414	10.215	11.389	12.242	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	10.473	11.317	12.549	13.442	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	11.530	12.414	13.701	14.631	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	12.584	13.506	14.845	15.812	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	13.636	14.595	15.984	16.985	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	14.685	15.680	17.117	18.151	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	15.733	16.761	18.245	19.311	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	16.780	17.840	19.369	20.465	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	17.824	18.917	20.489	21.615	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	18.868	19.991	21.605	22.760	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	19.910	21.063	22.718	23.900	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	20.951	22.133	23.828	25.038	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	21.991	23.201	24.935	26.171	28.559	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	23.031	24.268	26.039	27.301	29.737	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	24.069	25.333	27.141	28.429	30.911	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	25.106	26.397	28.241	29.553	32.081	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	26.143	27.459	29.339	30.675	33.247	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620
26	27.179	28.520	30.435	31.795	34.410	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	28.214	29.580	31.528	32.912	35.570	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	29.249	30.639	32.620	34.027	36.727	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	30.283	31.697	33.711	35.139	37.881	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	31.316	32.754	34.800	36.250	39.033	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703
35	36.475	38.024	40.223	41.778	44.753	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
40	41.622	43.275	45.616	47.269	50.424	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402
45	46.761	48.510	50.985	52.729	56.052	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166	80.077
50	51.888	53.738	56.284	58.454	61.617	63.167	67.505	71.420	76.154	78.488	86.551

$\nu_2$	$\nu_1$	$F_{\alpha}^2(x)$ de una $F$ de Fisher-Snedecor con $\nu_1, \nu_2$ grados de lib.																						
		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	
5	0.750	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	
	0.800	2.47	2.48	2.48	2.48	2.47	2.47	2.47	2.47	2.46	2.46	2.45	2.45	2.45	2.42	2.43	2.44	2.45	2.45	2.45	2.45	2.45	2.45	
	0.500	0.80	0.91	0.96	1.00	1.02	1.04	1.05	1.07	1.07	1.09	1.10	1.11	1.11	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	
	0.600	1.11	1.20	1.24	1.27	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.34	1.33	1.34	1.33	1.34	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	
	0.667	1.38	1.45	1.48	1.50	1.51	1.52	1.53	1.53	1.53	1.54	1.54	1.55	1.54	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	
	0.750	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	
	0.800	2.26	2.25	2.24	2.23	2.22	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.18	2.18	2.18	2.18	2.18	2.18	2.18	2.18	2.18	2.18	2.18	2.18	
	0.500	0.78	0.89	0.94	0.98	1.00	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	
6	0.600	1.07	1.16	1.20	1.22	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	
	0.667	1.33	1.39	1.42	1.44	1.44	1.45	1.45	1.46	1.46	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47	
	0.750	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	1.76	
	0.800	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	
	0.500	0.77	0.87	0.93	0.96	0.98	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	
	0.600	1.05	1.13	1.17	1.19	1.21	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25	1.25	1.24	1.25	1.24	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25
	0.667	1.29	1.35	1.38	1.39	1.40	1.40	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	
	0.750	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.70	1.69	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	
7	0.800	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	
	0.500	0.76	0.86	0.91	0.95	0.97	0.99	1.00	1.02	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	
	0.600	1.03	1.11	1.15	1.17	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	
	0.667	1.26	1.32	1.35	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37	1.37	1.37	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	1.38	
	0.750	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.62	1.62	1.62	1.62	1.62	1.62	1.62	1.62	1.62	1.62	1.62	1.62	
	0.800	1.98	1.95	1.92	1.90	1.88	1.87	1.86	1.84	1.83	1.81	1.81	1.81	1.81	1.81	1.81	1.81	1.81	1.81	1.81	1.81	1.81	1.81	
	0.500	0.74	0.85	0.90	0.93	0.95	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	
	0.600	1.01	1.08	1.12	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	
8	0.667	1.23	1.28	1.30	1.31	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32		
	0.750	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53		
	0.800	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69		
	0.500	0.74	0.84	0.89	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	
	0.600	1.00	1.07	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	
	0.667	1.22	1.27	1.29	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	
	0.750	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	
	0.800	1.87	1.83	1.80	1.77	1.75	1.73	1.72	1.69	1.68	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	
9	0.500	0.73	0.84	0.89	0.92	0.94	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01		
	0.600	0.99	1.07	1.10	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17		
	0.667	1.21	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	
	0.750	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	
	0.800	1.85	1.80	1.77	1.74	1.72	1.70	1.69	1.66	1.65	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	
	0.500	0.73	0.83	0.88	0.92	0.94	0.96	0.97	0.98	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	
	0.600	0.98	1.06	1.09	1.11	1.13	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	
	0.667	1.20	1.25	1.26	1.27	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	
10	0.750	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46		
	0.800	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60	1.60		
	0.500	0.74	0.85	0.90	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03		
	0.600	1.01	1.10	1.13	1.15	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	
	0.667	1.24	1.30	1.32	1.33	1.34	1.34	1.34	1.34	1.34	1.34	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	
	0.750	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	
	0.800	1.93	1.90	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	
	0.500	0.74	0.85	0.90	0.93	0.95	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	
11	0.600	1.01	1.08	1.12	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19		
	0.667	1.23	1.28	1.30	1.31	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32		
	0.750	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53		
	0.800	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69	1.69		
	0.500	0.74	0.84	0.89	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	1.01	1.02	
	0.600	1.00	1.07	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	
	0.667	1.22	1.27	1.29	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	
	0.750	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	1.48	
12	0.800																							





$\nu_2$	$\nu_1$	$F_{\alpha}^2(x)$ de una $F$ de Fisher-Snedecor con $\nu_1, \nu_2$ grados de lib.																					
		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20											
5	0.990	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.5	14.4	14.2	14.1	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.5	14.4	14.2	14.1
	0.999	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.0	47.4	46.8	46.6	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.0	47.4	46.8	46.6
	0.900	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.30	3.27	3.24	3.22	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.30	3.27	3.24	3.22
	0.950	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.62	4.59	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.62	4.59
	0.975	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.62	6.52	6.43	6.33	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.62	6.52	6.43	6.33
	0.990	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.1	9.89	9.72	9.51	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.1	9.89	9.72	9.51
	0.999	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	26.9	26.4	25.9	25.5	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	26.9	26.4	25.9	25.5
	0.900	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.94	2.90	2.87	2.84	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.94	2.90	2.87	2.84
	0.950	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.94	3.88	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.94	3.88
0.975	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.46	5.37	5.27	5.17	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.46	5.37	5.27	5.17	
0.990	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.87	7.72	7.56	7.44	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.87	7.72	7.56	7.44	
0.999	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.4	18.0	17.6	17.1	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.4	18.0	17.6	17.1	
0.900	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.70	2.67	2.63	2.55	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.70	2.67	2.63	2.55	
0.950	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	
0.975	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.76	4.67	4.57	4.44	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.76	4.67	4.57	4.44	
0.990	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.62	6.47	6.31	6.11	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.62	6.47	6.31	6.11	
0.999	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.1	13.7	13.3	12.1	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.1	13.7	13.3	12.1	
0.900	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.54	2.50	2.46	2.44	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.54	2.50	2.46	2.44	
0.950	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.35	3.28	3.22	3.11	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.35	3.28	3.22	3.11	
0.975	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.29	4.20	4.10	4.00	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.29	4.20	4.10	4.00	
0.990	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.81	5.67	5.52	5.33	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.81	5.67	5.52	5.33	
0.999	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.5	11.2	10.8	10.1	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.5	11.2	10.8	10.1	
9	0.900	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.42	2.38	2.34	2.31	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.42	2.38	2.34	2.31
	0.950	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.14	3.07	3.01	2.99	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.14	3.07	3.01	2.99
	0.975	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	3.96	3.87	3.77	3.66	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	3.96	3.87	3.77	3.66
	0.990	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.26	5.11	4.96	4.88	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.26	5.11	4.96	4.88
	0.999	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	9.89	9.57	9.24	8.99	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	9.89	9.57	9.24	8.99
	0.900	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.32	2.28	2.24	2.22	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.32	2.28	2.24	2.22
	0.950	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.98	2.91	2.84	2.77	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.98	2.91	2.84	2.77
	0.975	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.72	3.62	3.52	3.44	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.72	3.62	3.52	3.44
	0.990	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.85	4.71	4.56	4.44	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.85	4.71	4.56	4.44
0.999	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.75	8.45	8.13	7.88	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.75	8.45	8.13	7.88	
0.900	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.25	2.21	2.17	2.11	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.25	2.21	2.17	2.11	
0.950	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.85	2.79	2.72	2.66	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.85	2.79	2.72	2.66	
0.975	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.53	3.43	3.33	3.22	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.53	3.43	3.33	3.22	
0.990	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.54	4.40	4.25	4.11	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.54	4.40	4.25	4.11	
0.999	13.8	11.6	10.3	9.58	9.05	8.66	8.35	7.92	7.63	7.32	7.01	13.8	11.6	10.3	9.58	9.05	8.66	8.35	7.92	7.63	7.32	7.01	
0.900	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.19	2.15	2.10	2.00	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.19	2.15	2.10	2.00	
0.950	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.75	2.69	2.62	2.55	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.75	2.69	2.62	2.55	
0.975	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.37	3.28	3.18	3.07	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.37	3.28	3.18	3.07	
0.990	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.30	4.16	4.01	3.88	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.30	4.16	4.01	3.88	
0.999	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.29	7.00	6.71	6.44	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.29	7.00	6.71	6.44	
0.900	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.14	2.10	2.05	2.00	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.14	2.10	2.05	2.00	
0.950	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.67	2.60	2.53	2.44	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.67	2.60	2.53	2.44	
0.975	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.25	3.15	3.05	2.99	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.25	3.15	3.05	2.99	
0.990	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.10	3.96	3.82	3.66	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.10	3.96	3.82	3.66	
0.999	12.3	10.2	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.80	6.52	6.23	5.99	12.3	10.2	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.80	6.52	6.23	5.99	

$\nu_2$	$\nu_1$	$F_{\alpha; q}(x)$ de una $F$ de Fisher-Snedecor con $\nu_1, \nu_2$ grados de libertad																						
		2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	
22	0.900	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.90	1.86	1.81	1.77	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.90	1.86	1.81	1.77	
	0.950	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.30	2.23	2.15	2.10	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.30	2.23	2.15	2.10	
	0.975	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.70	2.60	2.50	2.43	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.70	2.60	2.50	2.43	
	0.990	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.26	3.12	2.98	2.88	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.26	3.12	2.98	2.88	
	0.999	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.83	4.48	4.23	3.99	3.76	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.83	4.48	4.23	3.99
	0.900	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.89	1.84	1.80	1.77	1.74	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.89	1.84	1.80	1.77
	0.950	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.27	2.20	2.13	2.07	2.02	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.27	2.20	2.13	2.07
	0.975	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.67	2.57	2.47	2.39	2.32	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.67	2.57	2.47	2.39
	0.990	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.21	3.07	2.93	2.79	2.71	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.21	3.07	2.93	2.79
	0.999	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.73	4.48	4.23	3.99	3.76	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.73	4.48	4.23	3.99
23	0.900	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.88	1.83	1.78	1.74	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.88	1.83	1.78	1.74	
	0.950	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.25	2.18	2.11	2.05	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.25	2.18	2.11	2.05	
	0.975	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.64	2.54	2.44	2.37	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.64	2.54	2.44	2.37	
	0.990	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.17	3.03	2.89	2.77	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.17	3.03	2.89	2.77	
	0.999	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.64	4.39	4.14	3.87	3.64	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.64	4.39	4.14	3.87
	0.900	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.87	1.82	1.77	1.72
	0.950	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.24	2.16	2.09	2.02	1.96	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.24	2.16	2.09	2.02
	0.975	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.61	2.51	2.41	2.33	2.25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.61	2.51	2.41	2.33
	0.990	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.13	2.99	2.85	2.70	2.61	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.13	2.99	2.85	2.70
	0.999	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.56	4.31	4.06	3.77	3.51	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.56	4.31	4.06	3.77
26	0.900	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.86	1.81	1.76	1.71	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.86	1.81	1.76	1.71	
	0.950	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.22	2.15	2.07	1.99	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.22	2.15	2.07	1.99	
	0.975	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.59	2.49	2.39	2.29	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.59	2.49	2.39	2.29	
	0.990	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.09	2.96	2.81	2.66	2.51	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.09	2.96	2.81	2.66
	0.999	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.48	4.24	3.99	3.77	3.51	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.48	4.24	3.99	3.77
	27	0.900	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.85	1.80	1.75	1.70	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.85	1.80	1.75	1.70
		0.950	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.20	2.13	2.06	1.99	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.20	2.13	2.06	1.99
		0.975	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.57	2.47	2.36	2.27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.57	2.47	2.36	2.27
		0.990	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.06	2.93	2.78	2.66	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.06	2.93	2.78	2.66
		0.999	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.41	4.17	3.92	3.66	3.40	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.41	4.17	3.92
0.900		2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69
0.950		3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.19	2.12	2.04	1.99	1.93	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.19	2.12	2.04	1.99
0.975		4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.55	2.45	2.34	2.22	2.12	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.55	2.45	2.34	2.22
0.990		5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.03	2.90	2.75	2.66	2.55	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.03	2.90	2.75	2.66
0.999		8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.35	4.11	3.86	3.66	3.40	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.35	4.11	3.86	3.66
29	0.900	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.83	1.78	1.73	1.68	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.83	1.78	1.73	1.68	
	0.950	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.18	2.10	2.03	1.99	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.18	2.10	2.03	1.99	
	0.975	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.53	2.43	2.32	2.25	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.53	2.43	2.32	2.25	
	0.990	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.00	2.87	2.73	2.55	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.00	2.87	2.73	2.55	
	0.999	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.29	4.05	3.80	3.55	3.29	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.29	4.05	3.80	3.55
	0.900	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.82	1.77	1.72	1.66	1.61	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.82	1.77	1.72	1.66
	0.950	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.16	2.09	2.01	1.99	1.91	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.16	2.09	2.01	1.99
	0.975	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.51	2.41	2.31	2.22	2.15	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.51	2.41	2.31	2.22
	0.990	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.98	2.84	2.70	2.55	2.40	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.98	2.84	2.70	2.55
	0.999	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.24	4.00	3.75	3.44	3.18	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.24	4.00	3.75	3.44
60	0.900	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.71	1.66	1.60	1.55	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.71	1.66	1.60	1.55	
	0.950	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.99	1.92	1.84	1.77	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.99	1.92	1.84	1.77	
	0.975	4.02	3.43	3.09	2.86	2.70	2.58	2.48	2.34	2.22	2.10	2.00	4.02	3.43	3.09	2.86	2.70	2.58	2.48	2.34	2.22	2.10	2.00	
	0.990	5.27	4.39	3.90	3.58	3.34	3.16	3.03	2.83	2.69	2.54	2.40	5.27	4.39	3.90	3.58	3.34	3.16	3.03	2.83	2.69	2.54	2.40	
	0.999	9.05	7.30	6.37	5.78	5.36	5.05	4.82	4.47	4.23	3.97	3.71	3.45	9.05	7.30	6.37	5.78	5.36	5.05	4.82	4.47	4.23	3.97	3.71
	0.900	2.38	2.17	2.03	1.94	1.86	1.81	1.76	1.71	1.66	1.61	1.56	1.51	2.38	2.17	2.03	1.94	1.86	1.81	1.76	1.71	1.66	1.61	1.56
	0.950	3.14	2.75	2.52	2.36	2.24	2.15	2.08	1.97	1.90	1.82	1.75	1.68	3.14	2.75	2.52	2.36	2.24	2.15	2.08	1.97	1.90	1.82	1.75
	0.975	4.00	3.41	3.07	2.84	2.68	2.56	2.46	2.32	2.20	2.08	1.97	1.88	4.00	3.41	3.07	2.84	2.68	2.56	2.46	2.32	2.20	2.08	1.97
	0.990	5.25	4.37	3.88	3.56	3.32	3.14	3.01	2.81	2.67	2.52	2.37	2.22	5.25	4.37	3.88	3.56	3.32	3.14	3.01	2.81	2.67	2.52	2.37
	0.999	9.00																						

$x$	$\lambda$	$F_x(x)$ de una Poisson( $\lambda$ )									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0		0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407	0.368
1		0.995	0.982	0.963	0.938	0.910	0.878	0.844	0.809	0.772	0.736
2		1.000	0.999	0.996	0.992	0.986	0.977	0.966	0.953	0.937	0.920
3		1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.987	0.981
4		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996
5		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
6		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$x$	$\lambda$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0		0.333	0.301	0.273	0.247	0.223	0.202	0.183	0.165	0.150	0.135
1		0.699	0.663	0.627	0.592	0.558	0.525	0.493	0.463	0.434	0.406
2		0.900	0.879	0.857	0.833	0.809	0.783	0.757	0.731	0.704	0.677
3		0.974	0.966	0.957	0.946	0.934	0.921	0.907	0.891	0.875	0.857
4		0.995	0.992	0.989	0.986	0.981	0.976	0.970	0.964	0.956	0.947
5		0.999	0.998	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992	0.990	0.987	0.983
6		1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.997	0.995
7		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
8		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$x$	$\lambda$	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0		0.111	0.091	0.074	0.061	0.050	0.041	0.033	0.027	0.022	0.018
1		0.355	0.308	0.267	0.231	0.199	0.171	0.147	0.126	0.107	0.092
2		0.623	0.570	0.518	0.469	0.423	0.380	0.340	0.303	0.269	0.238
3		0.819	0.779	0.736	0.692	0.647	0.603	0.558	0.515	0.473	0.433
4		0.928	0.904	0.877	0.848	0.815	0.781	0.744	0.706	0.668	0.629
5		0.975	0.964	0.951	0.935	0.916	0.895	0.871	0.844	0.816	0.785
6		0.993	0.988	0.983	0.976	0.966	0.955	0.942	0.927	0.909	0.889
7		0.998	0.997	0.995	0.992	0.988	0.983	0.977	0.969	0.960	0.949
8		1.000	0.999	0.999	0.998	0.996	0.994	0.992	0.988	0.984	0.979
9		1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992
10		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997

		$F_x(x)$ de una Poisson( $\lambda$ )									
$x$	$\lambda$	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
0		0.015	0.012	0.010	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002
1		0.078	0.066	0.056	0.048	0.040	0.034	0.029	0.024	0.021	0.017
2		0.210	0.185	0.163	0.143	0.125	0.109	0.095	0.082	0.072	0.062
3		0.395	0.359	0.326	0.294	0.265	0.238	0.213	0.191	0.170	0.151
4		0.590	0.551	0.513	0.476	0.440	0.406	0.373	0.342	0.313	0.285
5		0.753	0.720	0.686	0.651	0.616	0.581	0.546	0.512	0.478	0.446
6		0.867	0.844	0.818	0.791	0.762	0.732	0.702	0.670	0.638	0.606
7		0.936	0.921	0.905	0.887	0.867	0.845	0.822	0.797	0.771	0.744
8		0.972	0.964	0.955	0.944	0.932	0.918	0.903	0.886	0.867	0.847
9		0.989	0.985	0.980	0.975	0.968	0.960	0.951	0.941	0.929	0.916
10		0.996	0.994	0.992	0.990	0.986	0.982	0.977	0.972	0.965	0.957
11		0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.990	0.988	0.984	0.980
12		1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.991
13		1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996
14		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
15		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
16		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$x$	$\lambda$	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0
0		0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1		0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2		0.043	0.030	0.020	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001
3		0.112	0.082	0.059	0.042	0.030	0.021	0.015	0.010	0.007	0.005
4		0.224	0.173	0.132	0.100	0.074	0.055	0.040	0.029	0.021	0.015
5		0.369	0.301	0.241	0.191	0.150	0.116	0.089	0.067	0.050	0.038
6		0.527	0.450	0.378	0.313	0.256	0.207	0.165	0.130	0.102	0.079
7		0.673	0.599	0.525	0.453	0.386	0.324	0.269	0.220	0.179	0.143
8		0.792	0.729	0.662	0.593	0.523	0.456	0.392	0.333	0.279	0.232
9		0.877	0.830	0.776	0.717	0.653	0.587	0.522	0.458	0.397	0.341
10		0.933	0.901	0.862	0.816	0.763	0.706	0.645	0.583	0.521	0.460
11		0.966	0.947	0.921	0.888	0.849	0.803	0.752	0.697	0.639	0.579
12		0.984	0.973	0.957	0.936	0.909	0.876	0.836	0.792	0.742	0.689

## Partes del temario

- Tema 1 IntEctr-T01
- Tema 2 IntEctr-T02
- Tema 3 IntEctr-T03
- Tema 4 IntEctr-T04
- Tema 5 IntEctr-T05
- Tema 6 IntEctr-T06
- Tema 7 IntEctr-T07

## Soluciones a los Ejercicios

### Ejercicio 18(a)

## Soluciones a los Ejercicios

### Ejercicio 18(a)

1. Por una parte:

$$\hat{b} = \frac{\widehat{\sigma_{XY}}}{\widehat{\sigma_X^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{86}{17.2} = 5$$

por otra, las medias muestrales son

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{5} = \frac{130}{5} = 26; \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{5} = \frac{23}{5} = 4.6;$$

por lo que

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} = 26 - 4.6 \cdot 5 = 3$$

El valor esperado del ingreso fijo es de 3000 euros. Y el incremento esperado del ingreso al hacer crecer la terraza en un metro adicional es de 5000 euros.



## Ejercicio 18(b)

**Ejercicio 18(b)** El estimador MCO se distribuye Normal con esperanza igual al verdadero valor de los parámetros estimados, y varianza desconocida.

- **(Parámetro  $b$ )** buscamos los valores  $A$  y  $B$  tales que

$$P \left( A \leq \frac{(\hat{b}-b)}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}} \leq B \right) = (1 - \alpha)$$

Donde  $\frac{(\hat{b}-b)}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}}$  se distribuye como una  $t$  de Student con  $T-2$  grados de libertad; por tanto

$$\begin{aligned} & \left[ -3.182 \leq \frac{(5-b)}{\sqrt{\frac{16.6}{17.2}}} \leq 3.182 \right] \\ & [-3.182 \times 0.98 \leq (5-b) \leq 3.182 \times 0.98] \\ & [5 + 3.1323 \geq b \geq 5 - 3.1323] \end{aligned}$$

es decir, el intervalo de confianza al 0.95 es

$$b \in [1.87, 8.13]$$



## Ejercicio 18(c)

**Ejercicio 18(c)** Las hipótesis son:

$$H_0 : b = 6$$

$$H_1 : b < 6$$

La región crítica de una sola cola es

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \text{ tales que } \frac{\hat{b} - 6}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}} < k \right\},$$

donde  $k$  es el valor de la tabla para una  $t$  de Student de tres grados de libertad, ya que el estadístico de la parte izquierda de la desigualdad tiene dicha distribución. Para  $\alpha = 0.1$ , tenemos que  $k = t_{3,0.1} = -1.638$  sustituyendo tenemos que

$$\frac{5 - 6}{0.98} = -1.02$$

por lo que no rechazamos  $H_0$  con un 10% de significación.

El  $p$ -valor es la probabilidad de

$$\begin{aligned} P_{H_0}(\hat{b} \leq 5) &= P_{H_0} \left( \frac{\hat{b} - b}{\sqrt{\frac{\widehat{s}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}} \leq \frac{5 - b}{\sqrt{\frac{\widehat{s}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}} \right) \\ &= P \left( W \leq \frac{5 - 6}{0.98} = -1.02 \right) = 0.19, \end{aligned}$$

donde  $W$  se distribuye como una  $t$  de Student con tres grados de libertad.



## Ejercicio 18(d)

**Ejercicio 18(d)** El establecimiento  $B$  ha ingresado 5000 euros por encima de su ingreso esperado.

El establecimiento  $D$  ha ingresado 4000 euros por debajo de lo esperado.



## Ejercicio 18(e)

**Ejercicio 18(e)** La estimación del ingreso esperado para un establecimiento de 4 metros es:

$$\hat{Y} = 3 + 5 \times 4 = 23$$



## Ejercicio 19(a)

### Ejercicio 19(a)

1. Por una parte:

$$\hat{b} = \frac{\widehat{\sigma_{XY}}}{\widehat{\sigma_X^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{70}{124} = 0.56$$

por otra, las medias muestrales son

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{5} = \frac{20}{5} = 4; \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{5} = \frac{40}{5} = 8;$$

por lo que

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} = 8 - 0.56 \cdot 4 = 5.76.$$



## Ejercicio 19(b)

**Ejercicio 19(b)** El estimador MCO se distribuye Normal con esperanza igual al verdadero valor de los parámetros estimados, y varianza desconocida.

- **(Parámetro  $a$ )** Buscamos los valores  $A$  y  $B$  tales que

$$P \left( A \leq \frac{(\hat{a} - a)}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2 \sum x_i^2}{T \sum (x_i - \bar{x})^2}}} \leq B \right) = (1 - \alpha)$$

Donde  $\frac{(\hat{a} - a)}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2 \sum x_i^2}{T \sum (x_i - \bar{x})^2}}}$  se distribuye como una  $t$  de Student con  $T-2$  grados de

libertad, y  $\hat{s}^2$  es el estimador de la cuasi-varianza muestral. Por tanto  $A$  y  $B$  son los valores que aparecen en las tablas, y que determinan un intervalo centrado en cero con una probabilidad asociada del 95 %; es decir,  $A = -3.182$ , y  $B = 3.182$ , y  $\hat{s}^2 = 0.48 / (T - 2) = 0.16$ . Así pues,

$$P \left( -3.182 \leq \frac{(-0.52 - a)}{\sqrt{\frac{0.16 \cdot 120}{5 \cdot 124}}} \leq 3.182 \right) = 0.95$$

$$P \left( -3.182 \cdot \sqrt{0.03} \leq (-0.52 - a) \leq 3.182 \cdot \sqrt{0.03} \right) = 0.95$$

$$P \left( -0.52 + 3.182 \cdot \sqrt{0.03} \geq a \geq -0.52 - 3.182 \cdot \sqrt{0.03} \right) = 0.95,$$

es decir,

$$a \in [-1.078, 0.046]$$

con probabilidad 0.95

- **(Parámetro  $b$ )** Del mismo modo, buscamos los valores  $A$  y  $B$  tales que

$$P \left( A \leq \frac{(\hat{b}-b)}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}} \leq B \right) = (1 - \alpha)$$

Donde  $\frac{(\hat{b}-b)}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}}$  se distribuye como una  $t$  de Student con  $T-2$  grados de libertad; por tanto

$$P \left( -3.182 \leq \frac{(0.56-b)}{\sqrt{\frac{0.16}{124}}} \leq 3.182 \right) = 0.95$$

$$P \left( -3.182 \cdot \sqrt{0.0013} \leq (0.56 - b) \leq 3.182 \cdot \sqrt{0.0013} \right) = 0.95$$

$$P \left( 0.56 + 3.182 \cdot \sqrt{0.0013} \geq b \geq 0.56 - 3.182 \cdot \sqrt{0.0013} \right) = 0.95,$$

es decir,

$$b \in [0.449, 0.679]$$

con probabilidad 0.95



## Ejercicio 19(c)

**Ejercicio 19(c)** Las hipótesis son:

$$H_0 : b = 1$$

$$H_1 : b < 1$$

La región crítica de una sola cola es

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \mid \frac{\hat{b} - 1}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}} < k \right\},$$

donde  $k$  es el valor de la tabla para una  $t$  de Student de tres grados de libertad, ya que el estadístico de la parte izquierda de la desigualdad tiene dicha distribución. Para  $\alpha = 0.1$ , tenemos que  $k = t_{3,0.1} = -1.638$  sustituyendo tenemos que

$$\frac{0.56 - 1}{\sqrt{0.0013}} = -338 < k = t_{3,0.1} = -1.638$$

por lo que rechazamos  $H_0$ .

El  $p$ -valor es la probabilidad de

$$\begin{aligned} P(\hat{b} \leq 0.56 \mid H_0) &= P\left(\frac{\hat{b} - b}{\sqrt{\frac{\widehat{s}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}} \leq \frac{0.56 - b}{\sqrt{\frac{\widehat{s}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}} \mid H_0\right) \\ &= P\left(W \leq \frac{0.56 - 1}{\sqrt{0.0013}} = -338\right) \simeq 0, \end{aligned}$$

donde  $W$  se distribuye como una  $t$  de Student con tres grados de libertad.



## Ejercicio 19(d)

**Ejercicio 19(d)** La familia  $D$  es la que más ha gastado (5) respecto al nivel esperado (4.56)

La familia  $B$  es la que menos ha gastado (3) respecto al nivel esperado (3.44)



## Ejercicio 19(e)

**Ejercicio 19(e)** Según el modelo estimado, una familia con ingresos de 2 debería gastar

$$\hat{Y} = -0.52 + 0.56 \cdot 2 = 0.6$$

