Dpto. de Economía Cuantitativa

Universidad Complutense de Madrid

Introducción a la Econometría

Tema 6 — Repaso a la contrastación de Hipótesis Estadísticas.

Métodos Paramétricos

Marcos Bujosa y Gustavo A. Marrero

Material de apoyo para el curso *Introducción a la Econometría* de la licenciatura en Economía de la Universidad Complutense de Madrid.

Actualizado el: 13 de abril de 2007 Versión 4.0

Puede encontrar la última versión de este material en:

http://www.ucm.es/info/ecocuan/mbb/index.html#ietria

Índice

Este es un material de apoyo a las clases. En ningún caso sustituye a los libros de texto que figuran en el programa de la asignatura; textos que el alumno debe estudiar para afrontar el examen final con ciertas garantías de éxito.

El programa se cubre con los siguientes capítulos de libro de texto Novales (1997)[1]:

Capítulos 1 a 3: Estos temas han sido cubiertos en asignaturas anteriores, y debido a su bajo nivel de complejidad no se verán en clase (aunque forman parte del programa).

Capítulos 4 a 6: Estos temas han sido cubiertos en las asignaturas Estadística I y II. Se realizará un breve repaso en clase (una semana o semana y media como máximo), asumiendo que el alumno es capaz de preparar por su cuenta esta parte.

Capítulos 7 y 8: completos

Capítulo 9: secciones 9.4 a 9.6

Capítulos 10 y 12: completos

Tema 6. Repaso a la contrastación de Hipótesis Estadísticas. Métodos Paramétricos (Tema 10 de EyE) **(2 semanas y media)**

Capítulo 10 del manual de Alfonso Novales "Estadística y Econometría"

1. Conceptos fundamentales. Elementos de un contraste: hipótesis nula y alternativa; región crítica, región de aceptación; tipos de errores; nivel de significación y potencia; estadístico de contraste; distribución del estadístico de contraste; valor de crítico del contraste; p-valor de un contraste.
2. Contraste de hipótesis en una muestra.
3. Contrastes de la media de una distribución
4. Contrastes de proporciones
5. Contrastes de la varianza de una distribución
6. Contraste de hipótesis en dos muestras.
7. Contrastes de igualdad de esperanzas en poblaciones normales
8. Contrastes de igualdad de proporciones
9. Contrastes de igualdad de varianzas
10. La curva de potencia de un contraste. Relación entre potencia y tamaño muestral y nivel de significación.
11. Contraste de significación de β en el Modelo Lineal Simple.
12. Regiones críticas óptimas. Teorema de Neyman-Pearson.

1. Introducción

⇑ **Contrastes de hipótesis paramétricas** 1

Hipótesis afirmación sobre uno o varios parámetros poblacionales

- H_0: hipótesis *nula*
- H_1: hipótesis complementaria (*alternativa*)

Contraste de hipótesis es una regla que establece

- para que valores muestrales $\mathbf{x}$ se rechaza H_0 (*región crítica*, *RC*)
- para que valores muestrales $\mathbf{x}$ no se rechaza H_0 (*región de aceptación*, *RA*)

Toma de decisión rechazo o no rechazo de H_0

[1] Otros excelentes manuales en castellano son Peña (2001), Peña (2002) y Peña y Romo (1997).

⇑ **Contrastes de hipótesis paramétricas** 2

Caracterizamos RC mediante un estadístico $g(X)$.
Ejemplo

- Tren sale cada hora (tardo 10' en llegar al andén)
- H_0: me da tiempo
  H_1: NO me da tiempo
- $g(X)$: media de los relojes de los presentes
- $RC = \{\mathbf{x}$ tales que: $g(\mathbf{x}) \geq 45'\}$ (*nivel de significación*)
- Pregunto la hora, y decido si voy al andén

Pero el estadístico podría ser

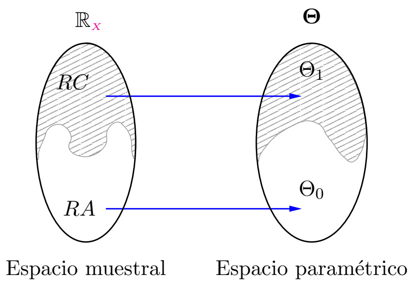
- $g^*(X)$: media de los relojes de más de 130 euros.
- $RC^* = \{\mathbf{x}$ tales que: $g^*(\mathbf{x}) \geq 49'\}$ (*nivel de significación*)

2. Contrastación de hipótesis paramétricas

⇑ **Etapas de un contraste** 3

1. Planteamiento de hipótesis nula
$$H_0: \quad \boldsymbol{X} \sim f_{\scriptscriptstyle X}(x;\boldsymbol{\theta})\,; \qquad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$$
   y alternativa
$$H_1: \quad \boldsymbol{X} \sim f_{\scriptscriptstyle X}(x;\boldsymbol{\theta})\,; \qquad \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$
   donde $\quad \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1 \quad$, y $\quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$
2. Elección del estadístico $g(X)$
3. División del espacio muestral en dos regiones: RC y RA
   (dado un nivel de significación α)
   $RC \cap RA = \emptyset; \qquad RC \cup RA =$ espacio muestral
4. Cálculo del estadístico sobre la muestra: $g(\mathbf{x})$
5. Rechazar o no rechazar H_0 (y toma de decisión)

⇑ **Contraste de hipótesis de Neyman-Pearson** 4



$\mathbf{x} \in RC: \quad$ RechazoH_0
$\mathbf{x} \in RA: \quad$ No rechazoH_0

Si Θ_i contiene un único elemento $\longrightarrow$ *hipótesis simple*
Si Θ_i contiene varios elementos $\longrightarrow$ *hipótesis compuesta*

$$\boldsymbol{\Theta} = \Theta_0 \cup \Theta_1; \qquad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset;$$
$$\mathbb{R}_{\scriptscriptstyle X} = RC \cup RA; \qquad RC \cap RA = \emptyset;$$

3. Errores tipo I y II

Contraste de hipótesis de Neyman-Pearson: errores **5**

En un contraste de hipótesis

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta_0^c$$

se pueden cometer dos tipos de errores

Tipo I: H_0 es cierta pero la rechazo

$$\alpha = P_{H_0}\left(X \in RC\right) : \quad P\left(\text{rechazar } H_0\right) \text{ cuando es cierta}$$

Tipo II: H_0 es falsa pero la acepto

$$\beta = P_{H_1}\left(X \in RA\right) : \quad P\left(\text{aceptar } H_0\right) \text{ cuando es falsa}$$

Contraste de hipótesis: errores **6**

Verdadera distribución de probabilidad

Resultado del test	H_0	H_1
No rechazar H_0	Decisión correcta	Error Tipo II Pobabilidad β $P_{H_1}(X \in RA)$
Rechazar H_0	Error Tipo I Probabilidad α $P_{H_0}(X \in RC)$	Decisión correcta

A resolver en clase

EJERCICIO 1. Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

Si la hipótesis nula no es rechazada, entonces es cierta.

EJERCICIO 2. Considere una variable aleatoria discreta X, de la que desconoce su ley de probabilidad. Usted tiene dos hipótesis posibles para la posible función de cuantía de X:

X	1	2	3	4	5	6
Bajo H_0 $P_X(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Bajo H_1 $P_X(x)$	2/15	1/6	1/5	1/5	1/6	2/15

Para contrastar H_0, decide realizar el siguiente contraste empleando una muestra de tamaño uno:

Rechazar H_0 si se observan los valores 4 o 5 (y no rechazar si se observa cualquier otro valor)

Halle el nivel de significación (probabilidad de cometer el error tipo I) y la probabilidad de cometer el error tipo II.

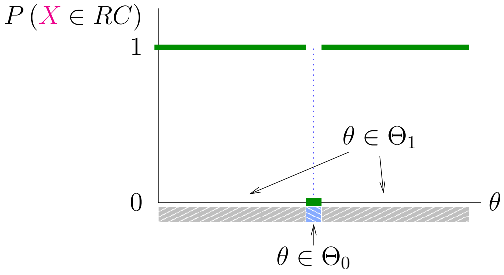
4. Función potencia de un contraste

Función potencia: "*La bola de cristal*" **7**

Función potencia es la *probabilidad de rechazar* H_0

$$W(\theta) = P\left(X \in RC\right)$$

Si tuviéramos una *bola de cristal* su función potencia sería

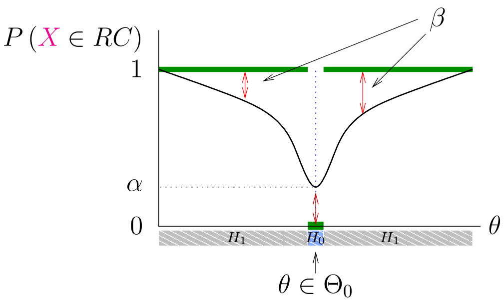


Nótese que siempre
Probabilidad de rechazar= 1-*Probabilidad de aceptar*

Contraste de hipótesis: Función potencia **8**

Función potencia es la *probabilidad de rechazar* H_0

$$W(\theta) = P\left(X \in RC\right) = \begin{cases} W(\theta \in \Theta_0) & = \alpha \quad \text{(Nivel de significación)} \\ W(\theta \in \Theta_1) & = 1 - \beta \quad \text{(potencia}^*\text{)} \end{cases}$$



(*) Cuando H_1 es simple.

Ejemplo 1. [**Binomial:**] Un trilero nos propone apostar a **cara** o cruz. $\theta = P\left(☺\right)$

- ¿Es un tramposo? pido previamente cinco ensayos; $X \sim$ binomial$(5, \theta)$ $\quad$ $(m.a.s)$
- H_0: $\theta < 1/2$ $\quad$ (es un tramposo) $\quad$ H_1: $\theta \geq 1/2$
- $g(X)$: suma de las caras $\quad$ $RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) = 5\}$
- Decido si juego o no

La función potencia es

$$W_1(\theta) = P\left(\text{rechazar } H_0\right) = P\left(X \in RC\right) = P\left(X = 5\right) = \theta^5$$

que es muy baja para casi todos los valores de θ. (añadir link a cálculo con octave)

Por tanto, la probabilidad del error Tipo I es baja

$$\alpha_1 = W_1(\theta \in \Theta_0) < \left(1/2\right)^5 = 0.0312$$

pero sin embargo, para casi todos los valores de $\theta \geq 1/2$, la probabilidad del error Tipo II es muy alta (no rechazo aunque debiera. . .)

¿Para qué valor de θ la probabilidad de rechazo de $H_0 \geq \frac{1}{2}$? Es decir ¿cómo debe ser la moneda para que confíe en el trilero según este contraste?

$$P\left(X \in RC\right) = 1/2 \;\Rightarrow\; \theta = \sqrt[5]{1/2} = 0.87$$

Para lograr mayor potencia cambiamos la región crítica

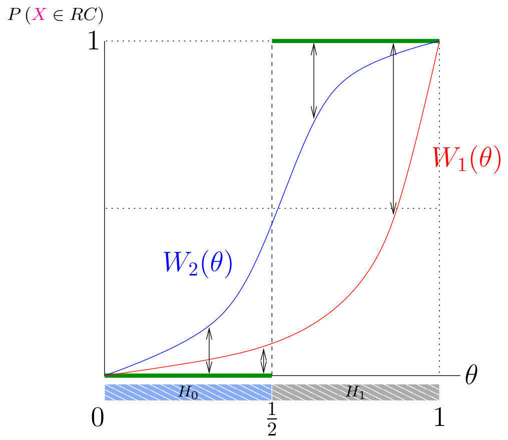
$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } g(\mathbf{x}) = 3,\ 4,\ \text{ó } 5\}$$

La función potencia es $W_2(\theta) = P(X \in RC) = P(X = 3,\ 4,\ ó\ 5) =$

$$\binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2 + \binom{5}{4}\theta^4(1-\theta)^1 + \binom{5}{5}\theta^5(1-\theta)^0$$

Ahora ha disminuido β, pero ha aumentado α

Función potencia de ambos contrastes y de la "*bola de cristal*"



Ejemplo 2. **[Poisson:]**

- Sea $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$; H_0: $\lambda = 4$; H_1: $\lambda = 12$; $n = 1$; $g(X) = X$

Dos contraste distintos

1. $RC_1 = \{x \text{ tales que: } x > 8\}$
2. $RC_2 = \{x \text{ tales que: } x < 1 \text{ ó } x > 10\}$

¿Qué contraste es mejor?

Error tipo I Función potencia evaluada en $\boxed{H_0 :\ \lambda = 4}$

$$\begin{aligned} W(4)_1 = \alpha_1 = & \ P_{H_0}(X > 8) = 1 - P_{H_0}(X \le 8) \\ = & \ 1 - F_{\mathcal{P}(4)}(8) = 1 - 0.979 = 0.021 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(4)_2 = \alpha_2 = & \ P_{H_0}(X < 1) + P_{H_0}(X > 10) \\ = & \ P_{H_0}(X \le 0) + 1 - P_{H_0}(X \le 10) \\ = & \ F_{\mathcal{P}(4)}(0) + 1 - F_{\mathcal{P}(4)}(10) + \\ = & \ 0.018 + 1 - 0.997 = 0.021 \end{aligned}$$

Potencia Función potencia evaluada en $\boxed{H_1 :\ \lambda = 12}$

$$W(12)_1 = P_{H_1}(X > 8) = 1 - F_{\mathcal{P}(12)}(8) = 0.845$$

$$W(12)_2 = P_{H_1}(X < 1,\ X > 10) = 0.653$$

Por tanto es mejor el contraste que posee RC_1

Ejercicio 3. **[Normal:]**

- Sea $X \sim N(\mu, 1)$; H_0: $\mu = 1$; H_1: $\mu = 4$;
- $n = 1$; $g(X) = X$

Dos contraste distintos

1. $RC_1 = \{x \text{ tales que: } x > 2.5\}$
2. $RC_2 = \{x \text{ tales que: } x < -0.8 \text{ ó } x > 2.8\}$

¿Qué contraste es mejor?

A resolver en clase

Ejercicio 4. **[Uniforme:]**

- Sea $X \sim U(0, a)$; H_0: $a = 1$; H_1: $a > 1$;
- $n = 1$; $g(X) = X$; $RC = \{x \text{ tales que: } x \ge k_\alpha\}$

(a) Fijando $\alpha = 0.05$ ¿cuanto debe vale k_α?
(b) Calcule la función potencia (para k_α tal que $\alpha = 0.05$)

A resolver en clase
Ejercicio 5. [**Uniforme:**]

- Sea $X \sim U(a, 1)$; H_0: $a = 0$; H_1: $a = 0.1$;
- Tamaño muestral n $(m.a.s.)$; $RC = \{x \text{ tales que: } x > k_\alpha\}$
- Estadístico de orden uno[2] $g(X)$, con función de distribución

$$F_{g(X)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - \left(\frac{1-x}{1-a}\right)^n & \text{si } a < x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

(a) Calcular k_α para un nivel de significación α
Solución:
$$\begin{aligned} \alpha &= W(a \in \Theta_0) = P_{H_0}\left(g(X) > k_\alpha\right) \\ &= 1 - F_{g(X)}(k_\alpha)\big|_{a=0} = 1 - 1 + \left(\tfrac{1-k_\alpha}{1-0}\right)^n = (1-k_\alpha)^n; \end{aligned}$$
y por tanto $k_\alpha = 1 - \sqrt[n]{\alpha}$ Ejercicio 5

(b) Calcule la potencia
Solución:
$$W(a \in \Theta_1) = P_{H_1}\left(g(X) > k_\alpha\right) =$$
$$= 1 - F_{g(X)}(k_\alpha)\big|_{a=0.1} = \left(\frac{1-k_\alpha}{0.9}\right)^n$$
Ejercicio 5

(c) Exprese la potencia en función de un nivel de significación α
Solución: Del primer apartado sabemos que $\alpha = (1-k_\alpha)^n$; por tanto
$$W(a = 0.1) = \frac{\alpha}{0.9^n}; \qquad \text{que depende de } n$$
Ejercicio 5

(d) Fijado $\alpha = 0.01$ ¿Para que tamaño muestral la potencia $W(a = 0.1) \geq 0.95$?
Solución:
$$W(a = 0.1) = \frac{\alpha}{0.9^n}; \quad \longrightarrow 0.95 = \frac{0.01}{0.9^n}$$
Por tanto, despejando y tomando logaritmos:
$$n \cdot \ln(0.9) = \ln\left(\frac{0.01}{0.95}\right); \quad n = 43,22$$
es decir, el tamaño muestral debe ser $n = 44$. Ejercicio 5

Suponga que en lugar de emplear el estadístico de orden, de las n observaciones elegimos una de ellas al azar. Entonces el estadístico se reduce a $g(\boldsymbol{X}) = X_k$, donde $X_k \sim U(a, 1)$

(a) Calcule el nivel de significación
Solución:
$$\alpha = W(a \in \Theta_0) = W(0) = P_{H_0}\left(g(X) > k_\alpha\right) = \int_{k_\alpha}^1 1dx = (1 - k_\alpha)$$
Ejercicio 5

(b) Calcule la potencia
Solución:
$$W(a \in \Theta_1) = W(0.1) = P_{H_1}\left(g(X) > k_\alpha\right) = \int_{k_\alpha}^1 \frac{1}{0.9}dx = \frac{1}{0.9}(1 - k_\alpha)$$
que fijado α es:
$$W(a \in \Theta_1) = \frac{\alpha}{0.9},$$
que no depende de n. Ejercicio 5

[2]se ordena la muestra de menor a mayor y se toma el menor

EJERCICIO 6. La variable aleatoria X tiene la siguiente función de densidad: $f_X(x) = 2x/a^2$ definida en el intervalo $[0, a]$, con $a > 0$. Queremos contrastar H_0: $a = 1$ frente a H_1: $a > 1$. Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 1 y de dos tests que vienen caracterizados por las siguientes regiones críticas:

Test 1: $RC_1 = \{\mathbf{x} | x > 0.987\}$

Test 2: $RC_2 = \{\mathbf{x} | x < 0.158\}$.

Calcule el nivel de significación de ambos contrastes.

EJERCICIO 7. Dibuje en un mismo gráfico las funciones potencia de los contrastes de hipótesis de la pregunta anterior.

Nota 1. La suma de n variables aleatorias con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ tiene distribución $\mathcal{P}(n\lambda)$.

Demostración:

$$X_i \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

por tanto, si $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, $\quad X_i \sim$ i.i.d.

$$M_Y(t) = \mathrm{E}\left(e^{t\sum X_i}\right) = M_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(t, t, \ldots, t) = \left(\mathrm{E}\left(e^{tX_i}\right)\right)^n = e^{\lambda n(e^t - 1)}$$

es decir $Y \sim \mathcal{P}(\lambda n)$.

Del mismo modo si $\boldsymbol{X}$ es *m.a.s.* entonces se verifica lo siguiente

$$\begin{aligned}
X_i \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad &\Rightarrow \quad \sum X_i \sim \mathcal{P}(n\lambda) \\
X_i \sim \mathcal{B}(1, p) \quad &\Rightarrow \quad \sum X_i \sim \mathcal{B}(n, p) \\
X_i \sim \exp(\lambda) \quad &\Rightarrow \quad \sum X_i \sim \exp(n\lambda) \\
X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad &\Rightarrow \quad \sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)
\end{aligned}$$

A resolver en clase

EJERCICIO 8. [**Poisson:**] Sea X el N° de vehículos que entran en una gasolinera cada minuto.

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$; $\quad H_0$: $\lambda = 1$; $\quad H_1$: $\lambda = 2$;
- $g(\boldsymbol{X}) = \sum X_i$ (m.a.s); $\quad RC = \{\mathbf{x}$ tales que: $g(\mathbf{x}) > k_\alpha\}$

Pista. la suma de n variables con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ tiene distribución $\mathcal{P}(n\lambda)$.

(a) Calcular k_α para un nivel de significación α

(b) Calcular la potencia

A resolver en clase

EJERCICIO 9. [**Poisson:**]

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$; $\quad H_0$: $\lambda = 1$; $\quad H_1$: $\lambda > 1$;
- $g(\boldsymbol{X}) = \sum_1^n X_i$ (m.a.s); $\quad RC = \{\mathbf{x}$ tales que: $g(\mathbf{x}) \geq 5\}$

(a) ¿Cual es el nivel de significación α que logramos con un tamaño muestral $n = 8$?

(b) ¿Qué tamaño muestral es suficiente para que

(c) Para un tamaño muestral $n = 8$ evaluar la función potencia en $\lambda = 1,\ 2,\ $ y 5.

A resolver en clase

EJERCICIO 10. Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

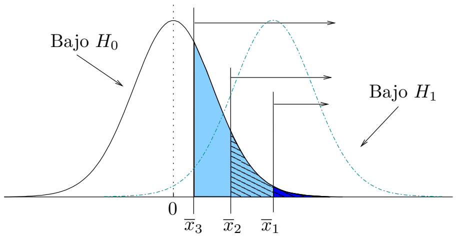
> Si se rechaza H_0 con un nivel de significación $\alpha = 0.05$ también se rechaza H_0 con un nivel de significación $\alpha = 0.10$

5. Nivel crítico p ó p-valor

⇑ Nivel crítico p (ó p-valor) 9

Llamamos Nivel crítico p (ó p-valor) de la realización del estádístico $g(X)$ a

$$p(\mathbf{x}) = P_{H_0}\left(g(X) \geq g(\mathbf{x})\right)$$



Un bajo nivel crítico p es una evidencia en contra de H_0
Si

$$\begin{array}{ll} \alpha > p - \text{valor} & \Rightarrow \text{Rechazamos } H_0 \\ \alpha < p - \text{valor} & \Rightarrow \text{No rechazamos } H_0 \end{array}$$

El p-valor es la probabilidad de obtener un valor del estadístico utilizado en el contraste, que sea igual al que hemos obtenido con la muestra o aún más extremo en la dirección de H_1, bajo el supuesto de que H_0 es cierta.

A resolver en clase
Ejercicio 11. ¿Es cierta la siguiente afirmación? *"El p-valor de la media muestral para un contraste $H_0: \ \mu = 0$ frante a $H_1: \ \mu = 3$ es 0,085. Esto quiere decir que con un nivel de significación del 0,05 debemos rechazar H_0"*. Razone su respuesta.

Ejercicio 12. El p-valor de un determinado contraste es 0.12. ¿Qué nos dice esta información?

Solución: Que no se rechaza la hipótesis nula planteada en el contraste con niveles de significación de 12 % o menos. Ejercicio 12

6. Contrastes bajo normalidad

6.1. Contrastes sobre la esperanza cuando la varianza es conocida

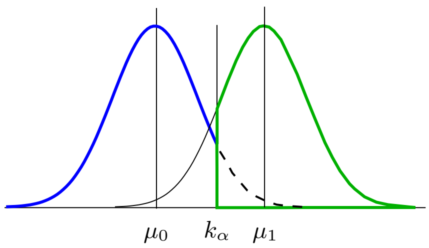
⇑ Contrastes bajo normalidad: esperanza (varianza conocida) 10

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$; $\quad \boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim$ i.i.d. (m.a.s)

- $H_0: \ \mu = \mu_0 \qquad g(X) = \widehat{\overline{x}}; \qquad \frac{\widehat{\overline{x}} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$

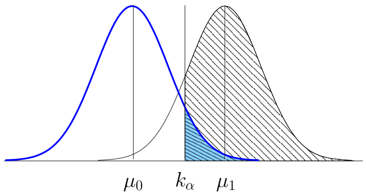
a) Si $\quad H_1: \ \mu > \mu_0; \qquad$ ó $\quad H_1: \ \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} > k_\alpha\} = \left\{\mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > z_{1-\alpha}\right\}$$

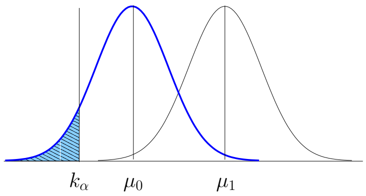


Contrastes bajo normalidad: esperanza (varianza conocida) **11**

$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} > k_\alpha\}$



$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} < k_\alpha\}$



Contrastes bajo normalidad: esperanza (varianza conocida) **12**

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$; $\quad \boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim$ i.i.d. (m.a.s)

- $H_0: \ \mu = \mu_0 \qquad g(X) = \widehat{\overline{x}}; \qquad \frac{\widehat{\overline{x}} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$

b) Si $\quad H_1: \ \mu < \mu_0; \qquad$ ó $\quad H_1: \ \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 < \mu_0)$

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} < k_\alpha\} = \left\{\mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} < z_\alpha\right\}$$

Contrastes bajo normalidad: esperanza (varianza conocida) **13**

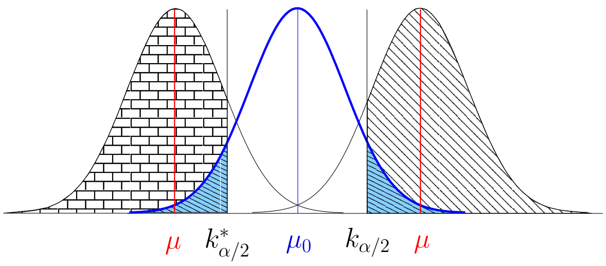
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$; $\quad \boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim$ i.i.d. (m.a.s)

- $H_0: \ \mu = \mu_0 \qquad g(X) = \widehat{\overline{x}}; \qquad \frac{\widehat{\overline{x}} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$

c) Si $\quad H_1: \ \mu \neq \mu_0$

$$\begin{aligned} RC &= \left\{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} > k_{\alpha/2} \quad \text{ó} \quad \overline{x} < k^*_{\alpha/2}\right\} \\ &= \left\{\mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > z_{1-\alpha/2} \quad \text{ó} \quad \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} < z_{\alpha/2}\right\} \end{aligned}$$

Contrastes bajo normalidad: esperanza (varianza conocida) **14**



$$RC = \left\{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} > k_{\alpha/2} \quad \text{ó} \quad \overline{x} < k^*_{\alpha/2}\right\}$$

Ejemplo 3.

- $X \sim N(\mu, 9)$: Crecimiento medio del salario real familias
- media del crecimiento de las familias en marzo fue 6.4 %
- Creemos que no ha variado en abril
- Se publica una previsión de crecimiento del 7.5 %

- Queremos contrastar $H_0 : \mu_{\text{abril}} = \mu_{\text{marzo}} = 6.4$ frente a $H_1 : \mu_{\text{abril}} = 7.5$ con un nivel de significación del 5 %.

$$RC = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} > k_\alpha\} = \left\{\mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{k_\alpha - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} = z_{1-\alpha}\right\}$$

$$\alpha = 0.05 = P_{H_0}\left(\frac{\widehat{\overline{x}} - 6.4}{\sqrt{9/n}} > z_{1-0.05} = 1.645\right)$$

Por tanto si $\overline{x} > 6.4 + 1.645\frac{3}{\sqrt{n}} = k_\alpha$ entonces suponemos que hay suficiente evidencia en contra de H_0

Por ejemplo, si $n = 20$ entonces $k_\alpha = 7.5035$.
La potencia del contraste es $W(\mu \in \Theta_1)$:

$$\begin{aligned} W(7.5) &= P_{H_1}\left(\widehat{\overline{x}} > k_\alpha = 7.5035\right) \\ &= 1 - P_{H_1}\left(\widehat{\overline{x}} \le k_\alpha = 7.5035\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{\widehat{\overline{x}} - 7.5}{3/\sqrt{n}} \le \frac{7.5035 - 7.5}{3/\sqrt{20}}\right) = 1 - P\left(Z \le 0.00521\right) \simeq 0.5 \end{aligned}$$

¿Que tamaño muestral necesitamos para tener una potencia del 90 %?

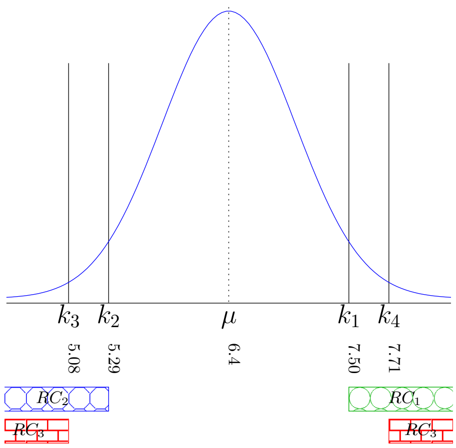
$$\begin{aligned} 0.90 &= P_{H_1}\left(\widehat{\overline{x}} > k_\alpha = 6.4 + 1.645\frac{3}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{\widehat{\overline{x}} - 7.5}{3/\sqrt{n}} \le \frac{(6.4 + 1.645\frac{3}{\sqrt{n}}) - 7.5}{3/\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - P\left(Z \le \frac{(6.4 + 1.645\frac{3}{\sqrt{n}}) - 7.5}{3/\sqrt{n}} = z_{0.1}\right) \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{(6.4+1.645\frac{3}{\sqrt{n}})-7.5}{3/\sqrt{n}} = z_{0.1} = -1.285$; es decir $n \simeq 64$.

⇑ **Contrastes de una y dos colas** **15**

Sea $X \sim N(\mu, 9)$; $n = 20$; $\alpha = 0.05$ $(z_{0.95} = 1.645;\ \ z_{0.975} = 1.96)$

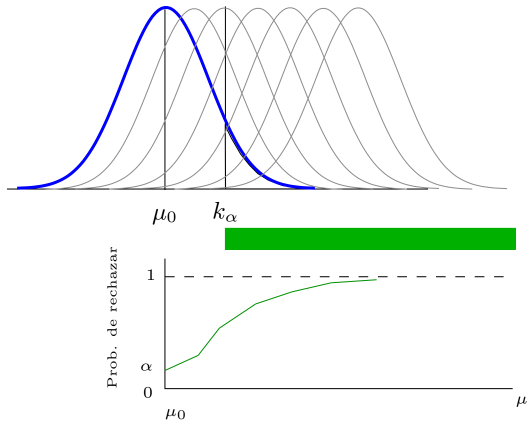
1. $\left.\begin{array}{l} H_0 : \ \mu = 6.4 \\ H_1 : \ \mu > 6.4 \end{array}\right\} \Rightarrow RC_1 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} > k_1\}$; $\quad k_1 = 7.50$
2. $\left.\begin{array}{l} H_0 : \ \mu = 6.4 \\ H_1 : \ \mu < 6.4 \end{array}\right\} \Rightarrow RC_2 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} < k_2\}$; $\quad k_2 = 5.29$
3. $\left.\begin{array}{l} H_0 : \ \mu = 6.4 \\ H_1 : \ \mu \neq 6.4 \end{array}\right\} \Rightarrow RC_3 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} < k_3 \text{ ó } \overline{x} > k_4\}$; $k_3 = 5.08$; $k_4 = 7.71$



Correcta selección de las regiones críticas 16

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \ \mu = 6.4 \\ H_1: \ \mu > 6.4 \end{array}\right\}; \quad \Theta = [6.4, \ \infty) \qquad \boxed{RC_1 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} > k_1\}}$$

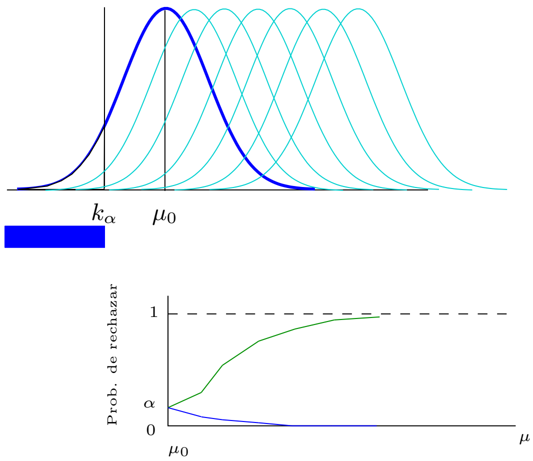
α ajustado por valor k_1. Buen comportamiento función potencia



Mala selección de las regiones críticas 17

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \ \mu = 6.4 \\ H_1: \ \mu > 6.4 \end{array}\right\}; \quad \Theta = [6.4, \ \infty) \qquad \boxed{RC_2 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} < k_2\}}$$

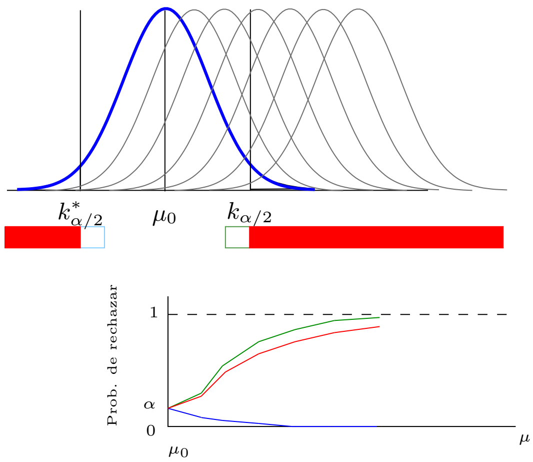
α ajustado por valor k_2. bajísima potencia del contraste!!!



Mala selección de las regiones críticas 18

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \ \mu = 6.4 \\ H_1: \ \mu > 6.4 \end{array}\right\}; \qquad \boxed{RC_3 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} < k_3 \text{ ó } \overline{x} > k_4\};}$$

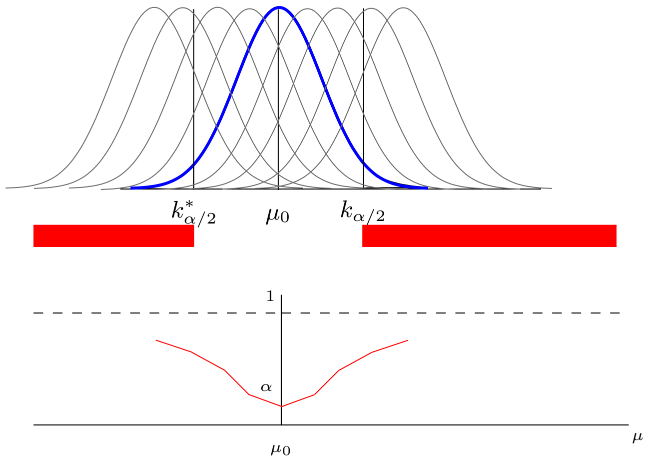
α ajustado por valor k_3 y k_4. Función potencia mejorable



⇑ **Correcta selección de las regiones críticas** 19

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \ \mu = 6.4 \\ H_1: \ \mu \neq 6.4 \end{array}\right\}; \quad \Theta{=}(-\infty,\ \infty) \quad \boxed{RC_3 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} < k_3 \text{ ó } \overline{x} > k_4\};}$$

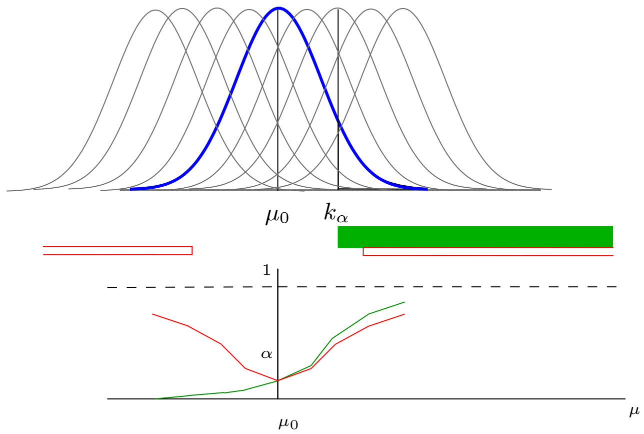
Buen comportamiento en todo el dominio



⇑ **Mala selección de las regiones críticas** 20

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \ \mu = 6.4 \\ H_1: \ \mu \neq 6.4 \end{array}\right\}; \quad \Theta{=}(-\infty,\ \infty) \quad \boxed{RC_1 = \{\mathbf{x} \text{ tales que: } \overline{x} > k_1\};}$$

buen comportamiento en parte del dominio y **muy malo** en la otra parte.



A resolver en clase

Ejercicio 13. Queremos contrastar una hipótesis nula simple frente a una alternativa también simple. Para este propósito, disponemos de dos regiones críticas con idénticos niveles de significación. ¿Quiere esto decir que los dos contrastes son igualmente buenos? Razone la respuesta.

A resolver en clase

Ejercicio 14. Realice el siguiente ejercicio:

- Sea $X \sim U(0, a)$; $\quad H_0$: $a = 1$; $\quad H_1$: $a > 1$;
- $n = 1$; $\quad g(X) = X$; $\quad RC = \{x \text{ tales que: } x < k_\alpha\}$

(a) Fijando $\alpha = 0.05$ determinar k_α

(b) Calcular función potencia (para $\alpha = 0.05$) y compare el resultado con el ejemplo 4 en la página˜6 (Uniforme 1). Dibuje ambas funciones potencia.

A resolver en clase

Ejercicio 15. (Consta de 5 apartados)

Sea X el precio de un determinado producto que su empresa va a comenzar a comercializar. Suponemos que dicho precio se distribuye $X \sim \mathrm{N}(\mu, 100)$. Usted afirma que el precio medio más adecuado es de 30 euros, y para contrastar esta hipótesis frente a la de su jefe, que afirma que es de 40 euros, selecciona al azar una muestra de precios de compra de 25 clientes, y adopta la siguiente regla de decisión:

- Si la media muestral es inferior a 35, se considera adecuado fijar un precio de 30 euros.
- Si por el contrario la media muestral es igual o superior a 35, se considera adecuado fijar el precio *alternativo* de 40 euros.

(a) A partir de su afirmación y la de su jefe escriba la hipótesis nula y la alternativa; y a partir de la regla decisión escriba la región crítica del contraste.

(b) Obtenga el nivel de significación del contraste.

(c) ¿Cúal es la potencia del contraste?

(d) Obtenga la región crítica para un nivel de significación del 1 %.

(e) Para el nivel de significación anterior, resuelva el contraste suponiendo que la media muestral obtenida ha sido 36.

A resolver en clase

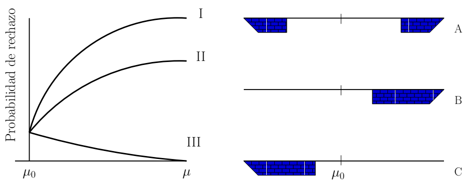
Ejercicio 16. Sea X una variable aleatoria con distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. Suponga que tiene una muestra de tamaño n y desea contrastar H_0: $\mu = \mu_0$ frente a H_1: $\mu > \mu_0$. Se definen tres regiones críticas A), B) y C) con nivel de significación α.

A) $RC_A = \{\boldsymbol{x}$ tales que: $\overline{\boldsymbol{x}} > k_2$ ó $\overline{\boldsymbol{x}} < k_3\}$

B) $RC_B = \{\boldsymbol{x}$ tales que: $\overline{\boldsymbol{x}} > k_1\}$

C) $RC_C = \{\boldsymbol{x}$ tales que: $\overline{\boldsymbol{x}} < k_4\}$

Dichas regiones aparecen representadas en la parte derecha de la figura.



Asocie cada una de las funciones potencia I), II) y III) (de la izquierda) con una de las regiones críticas A), B) o C).

A resolver en clase

Ejercicio 17. Sea una población X que se distribuye $N(\mu,\ 2)$. Queremos llevar a cabo el siguiente contraste; H_0: $\mu = 0$ frente a H_1: $\mu = 0.5$ con $\alpha = 0.05$ (a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 20). Disponemos de dos regiones críticas: $RC_1 = \{\boldsymbol{x}$ tales que: $\overline{\boldsymbol{x}} > k_1\}$ y $RC_2 = \left\{\boldsymbol{x} \text{ tales que: } \frac{x_1+x_2}{2} > k_2\right\}$, donde x_1 y x_2 son los dos primeros elementos de la muestra. [Pista: recuerde que la X_1 y X_2 son elementos de la muestra aleatoria simple, y como tales son independientes e idénticamente distribuidos]

(a) Halle el valor de k_1 y k_2 para que ambas regiones críticas posean el mismo nivel de significación α. Dado que ambos contrastes tienen el mismo nivel de significación, ¿esto implica que ambos son igualmente adecuados para realizar el contraste?

(b) Calcule la potencia de ambos contrastes ¿Que podemos decir acerca de la idoneidad de ambas regiones críticas?

(c) ¿Variaría su respuesta a los apartados anteriores si aumentara el tamaño muestral?

Ejercicio 18. Sea una población X que se distribuye $N(\mu,\ 1)$. Se desea contrastar H_0: $\mu = 5$ frente a H_1: $\mu > 5$. Se tiene una muestra aleatoria simple de tamaño 16, con $\overline{\boldsymbol{x}} = 5.5$, calcule el p-valor del contraste [para su resolución, proponga la región crítica más apropiada].

6.2. Contrastes sobre la varianza

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$; $\quad \boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim$ i.i.d. (m.a.s)

- $H_0 :\ \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad g(X) = \widehat{\mathfrak{s}^2}; \qquad \frac{(n-1)\widehat{\mathfrak{s}^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

a) Si $\quad H_1 :\ \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad$ o $\quad H_1 :\ \sigma^2 = \sigma_1^2 \quad (\sigma_1^2 > \sigma_0^2)$

$$RC = \left\{\mathbf{x} \text{ tales que: } \widehat{\mathfrak{s}^2} > k_\alpha\right\} = \left\{\mathbf{x} \text{ tales que: } \frac{(n-1)\widehat{\mathfrak{s}^2}}{\sigma^2} > \chi^2_{(n-1,1-\alpha)}\right\}$$

b) Si $\quad H_1:\ \sigma^2 < \sigma_0^2 \quad$ o $\quad H_1:\ \sigma^2 = \sigma_1^2 \quad (\sigma_1^2 < \sigma_0^2)$

$$RC = \left\{\mathbf{x}\ \text{ tales que: }\ \widehat{\mathfrak{s}}^2 < k_\alpha\right\} = \left\{\mathbf{x}\ \text{ tales que: }\ \frac{(n-1)\widehat{\mathfrak{s}}^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(n-1,\alpha)}\right\}$$

c) Si $\quad H_1:\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$$\begin{aligned} RC &= \left\{\mathbf{x}\ \text{ tales que: }\ \widehat{\mathfrak{s}}^2 > k_\alpha \quad \text{ó} \quad \widehat{\mathfrak{s}}^2 < k^*_\alpha\right\} \\ &= \left\{\mathbf{x}\ \text{ tales que: }\ \tfrac{(n-1)\widehat{\mathfrak{s}}^2}{\sigma^2} > \chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)} \quad \text{ó} \quad \tfrac{(n-1)\widehat{\mathfrak{s}}^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(n-1,\alpha/2)}\right\} \end{aligned}$$

A resolver en clase

EJERCICIO 19. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Se desea contrastar H_0: $\sigma^2 = 100$ frente a H_1: $\sigma^2 < 100$ empleando el contraste uniformemente más potente. Se tiene una muestra de tamaño 31 con una cuasi-varianza $\mathfrak{s}^2 = 75$. Resuelva el contraste con una significación del 5 % y del 1 %.

6.3. Contrastes sobre la esperanza cuando la varianza es desconocida

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2); \qquad \boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim$ i.i.d. (m.a.s)

- $H_0:\ \mu = \mu_0 \qquad g(X) = \widehat{\overline{x}}; \qquad \frac{\widehat{\overline{x}}-\mu}{\sqrt{\widehat{\mathfrak{s}}^2/n}} \sim t_{n-1}$

a) Si $\quad H_1:\ \mu > \mu_0; \quad$ ó $\quad H_1:\ \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$

$$RC = \{\mathbf{x}\ \text{ tales que: }\ \overline{x} > k_\alpha\} = \left\{\mathbf{x}\ \text{ tales que: }\ \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sqrt{\widehat{\mathfrak{s}}^2/n}} > t_{n-1,1-\alpha}\right\}$$

b) Si $\quad H_1:\ \mu < \mu_0; \quad$ ó $\quad H_1:\ \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 < \mu_0)$

$$RC = \{\mathbf{x}\ \text{ tales que: }\ \overline{x} < k_\alpha\} = \left\{\mathbf{x}\ \text{ tales que: }\ \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sqrt{\widehat{\mathfrak{s}}^2/n}} < t_{n-1,\alpha}\right\}$$

c) Si $\quad H_1:\ \mu \neq \mu_0$

$$\begin{aligned} RC &= \{\mathbf{x}\ \text{ tales que: }\ \overline{x} > k_\alpha \quad \text{ó} \quad \overline{x} < k^*_\alpha\} \\ &= \left\{\mathbf{x}\ \text{ tales que: }\ \tfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sqrt{\widehat{\mathfrak{s}}^2/n}} > t_{n-1,1-\alpha/2} \quad \text{ó} \quad \tfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sqrt{\widehat{\mathfrak{s}}^2/n}} < t_{n-1,\alpha/2}\right\} \end{aligned}$$

6.3.1. Contrastes de $\boldsymbol{\beta}$ en el Modelo Lineal Simple

A resolver en clase

EJERCICIO 20. En el siguiente modelo de regresión simple, $Y = \alpha + \beta X + U$, donde Y mide la tasa de crecimiento del PIB real y X la tasa de crecimiento de la masa monetaria. Tenemos una muestra de tamaño 35. Queremos contrastar la hipótesis de neutralidad monetaria en esta muestra (es decir, la masa monetaria no tiene efecto real sobre el nivel del PIB). Proponga la hipótesis nula y alternativa que, según la tª económica, crea más conveniente para realizar el contraste, así como la región crítica. ¿Cual es la distribución del estadístico de contraste?

A resolver en clase

EJERCICIO 21. Sea Y la creación de empleo trimestral de las 17 Comunidades Autónomas (CCAA) españolas (excluidas Ceuta y Melilla) y X un indicador que mide el crecimiento en el nivel de actividad de la comunidad a lo largo del último año. Queremos estimar un modelo de regresión lineal simple que relacione Y en funcion de X. La media muestral de Y es 0.04, la de X es 0.03; sus desviaciones típicas son 0.2 y 0.15, respectivamente, y la covarianza es 0.01.

(a) Presente el modelo de regresiónn lineal y estime por MCO sus parámetros.

(b) La siguiente tabla muestra los residuos MCO de la estimación anterior correspondientes a cada una de las 17 comunidades autonomas (CCAA)

CCAA Nº	residuo	CCAA Nº	residuo	CCAA Nº	residuo
1	0.79	7	0.24	13	-0.68
2	1.00	8	0.67	14	1.10
3	0.84	9	0.45	15	0.61
4	-0.51	10	-0.81	16	-0.60
5	-0.33	11	1.54	17	-2.40
6	-1.33	12	-0.60		

¿Qué interpretación tienen los residuos en el marco de este modelo? En función de dicha interpretación, comente los aspectos más destacables de esta tabla de residuos con relación a cómo ha sido la creación de empleo en las diferentes CCAA en el trimestre.

(c) Suponga que desea llevar a cabo el contraste de significación individual de la pendiente del modelo de regresión. Indique qué hipótesis alternativa es la más apropiada para este contraste. ¿Qué estadístico de contraste y qué región crítica son más apropiados?.

Ejercicio 22. El siguiente modelo de regresión lineal simple intenta captar la relación entre el PIB per capita de los países de la OCDE, Y, y el grado de escolarización como medida del nivel de educación de la economía, $\mathbf{X}$:

$$\ln(Y_i) = \alpha + \beta \ln(X_i) + U_i;$$

donde U_i son otros factores desconocidos o perturbaciones del modelo, que suponemos se distribuyen normal $(0, \sigma_U^2)$ condicionados a $\mathbf{X}$. Las estimaciones MCO de los parámetros del modelo son $\widehat{\alpha} = 0.89$ y $\widehat{\beta} = 0.28$, y sus desviaciones típicas son 0.025 y 0.08, respectivamente. Para un país j con un grado de escolarización $X_j = 10$

(a) ¿Cuál sería el valor esperado de su PIB per capita? (Nótese que se pide el valor esperado de Y_j, y no de $\ln Y_j$)

(b) Proponga la hipótesis nula y alternativa más apropiada para discutir si el nivel de educación de un país es significativo para explicar su PIB per capita. Indique también la región crítica más apropiada para el contraste.

Ejercicio 23. Disponemos de una muestra de datos relativa a la renta X, y el consumo Y de 128 familias; con los siguientes estadísticos: $\overline{y} = 5$, $\overline{x} = 4$, $s_{xy} = 3$ y $s_x^2 = 4$. Se ha estimado el siguiente modelo lineal simple $Y = \alpha + \beta X + U$ obteniendo los siguientes resultados: $\widehat{\beta}$ =0.75 y $\widehat{\alpha}$ =2.

Dibuje e interprete la recta de regresión suponiendo que el soporte de X es, $\mathbb{R}_X = [1,\ 9]$.

Ejercicio 24. Empleando los datos del ejercicio anterior, contraste si la propensión marginal a consumir es de 1/2 (frente a que se consuma más de la mitad de la renta) si la cuasi-varianza residual del modelo estimado es 8. Realice el contraste con un 2.5 % de significación.

6.4. Contrastes de proporción

⇑ **Contrastes de Proporción** **21**

$X_i \sim B(1, p)$; $\quad \boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim$ i.i.d. (m.a.s)

- $H_0 : \ p = p_0 \qquad g(\boldsymbol{X}) = \sum X_i \sim B(n, p)$

Sabemos por T.C.L. que para n grande (Novales, 1997, Secc. 9.6)

$$\frac{\frac{g(\boldsymbol{X})}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Si $\quad H_1 : \ p < p_0; \qquad$ ó $\quad H_1 : \ p = p_1 \quad (p_1 < p_0)$

$$RC = \left\{ \boldsymbol{x} \ \text{ tales que: } \frac{\sum x}{n} < k_\alpha \right\} = \left\{ \boldsymbol{x} \ \text{ tales que: } \frac{\frac{\sum x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < z_\alpha \right\}$$

Ejemplo 4. [**Proporción:**]

- $\sum X$: Nº de parados en España
- Queremos contrastar que no ha variado respecto al mes anterior (fue el 21 %)
- Última EPA dice que *Activos* = 60.000, de los cuales
  - 48000 trabajan
  - 12000 no trabajan

  por tanto $\widehat{p} = \frac{12000}{60000} = 0.2$
- Queremos contrastar $H_0 : \ p = .21$ frente a $H_1 : \ p = 0.2$ con un nivel de significación de α.

$$RC = \left\{ \boldsymbol{x} \quad \text{tales que:} \quad \frac{\sum x}{n} < k_\alpha \right\} = \left\{ x \quad \text{tales que:} \ \frac{\frac{\sum x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < z_\alpha \right\};$$

donde

$$z_\alpha = \frac{k_\alpha - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{k_\alpha - 0.21}{\sqrt{\frac{0.21 \cdot 0.79}{60000}}}.$$

Así pues,

$$\begin{array}{llll} z_{0.001} & = -3.1 & \Rightarrow k_{0.001} & = 0.2048 \\ z_{0.01} & = -2.33 & \Rightarrow k_{0.01} & = 0.2061 \\ z_{0.025} & = -1.96 & \Rightarrow k_{0.025} & = 0.2067 \\ z_{0.1} & = -1.285 & \Rightarrow k_{0.1} & = 0.2078 \end{array}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= P\left(\frac{g(X)}{n} \leq \frac{g(\mathbf{x})}{n} \right) \\ &= P\left(\frac{\frac{g(X)}{n} - 0.21}{\sqrt{\frac{0.21 \cdot 0.79}{60000}}} \leq \frac{\mathbf{0.2} - 0.21}{\sqrt{\frac{0.21 \cdot 0.79}{60000}}} = -6.01 \ \Big| \ H_0 \right) = 0.000 \end{aligned}$$

es decir, rechazo la hipótesis nula para casi cualquier nivel de significación.

Ejercicio 25. En un estudio de mercado dos investigadores analizan la probabilidad “p” de que un individuo compre en un determinado establecimiento. Disponen de una muestra con 16 datos, de consumidores de la zona, para contrastar $H_0 : \ p = 0.5$ frente a $H_1 : \ p = 0.8$. El primer investigador piensa que debe rechazar H_0 si 9 o más consumidores compran en el establecimiento, mientras que el segundo cree que sólo se debe rechazar H_0 si son 10 o más los compradores.

(a) Calcule los niveles de significación de ambos contrastes (Emplee la aproximación Normal que aparece en el “chuletario” de la Sección D en la página˜29)

(b) Calcule la potencia en ambos contrastes.

(c) A la luz de los resultados anteriores, discuta si alguno de los contrastes es preferible al otro.

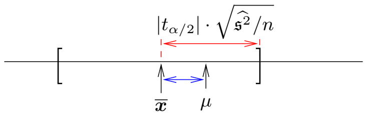
(d) Calcule para cada contraste cuál es el tamaño de muestra suficiente para garantizar una significación del 5 %.

7. Intervalos de confianza y contrastes bilaterales

Intervalos de confianza y contrastes bilaterales **22**

μ pertenece al intervalo de confianza $\mathrm{IC}^{\mu}_{1-\alpha}(\boldsymbol{x})$, si $\quad \mu \in \left[\overline{\boldsymbol{x}} \pm t_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\widehat{\mathfrak{s}}^2/n} \right]$ Por tanto μ está en el intervalo de confianza si

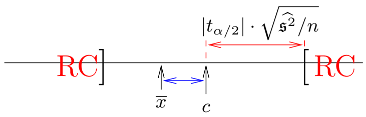
$$|\overline{\boldsymbol{x}} - \mu| \leq |t_{\alpha/2}| \cdot \sqrt{\widehat{\mathfrak{s}}^2/n} \tag{7.1}$$



Por otra parte **no rechazamos** H_0: $\mu = c \quad [H_1\colon \mu \neq c]$ **si:** $\quad \overline{\boldsymbol{x}} \in \left[c \pm |t_{\alpha/2}| \cdot \sqrt{\widehat{\mathfrak{s}}^2/n} \right]$; es decir, si

$$|\overline{\boldsymbol{x}} - c\,| \leq |t_{\alpha/2}| \cdot \sqrt{\widehat{\mathfrak{s}}^2/n} \tag{7.2}$$

donde por H_0: $\mu = c$



Comparando (7.1) y (7.2) es sencillo comprobar que todas las hipótesis $H_0: \ \mu = c^*$ que cumplen (7.2) (i.e., que no se rechazarían), son puntos que pertenecen al intervalo de confianza de μ (por (7.1)). Por tanto el intervalo con nivel de confianza $(1-\alpha)$ contiene todas las hipótesis nulas $H_0: \ \mu = c^*$ que no se rechazarían en un contraste **bilateral** con una significación α.

Intervalos y contrastes **23**

Intervalo de confianza $(1-\alpha)$	$=$	Conjunto hipótesis aceptables con significación α

Intervalos de confianza frente a contrastes de hipótesis bilaterales **24**

Contrastes bilaterales al $\alpha\,\%$ e intervalos de confianza al $1-\alpha\,\%$;

- Rechazar $H_0: \mu = c$; frente $H_0: \mu \neq c$;

  si y sólo si $\quad c \notin \mathrm{IC}^{\mu}_{1-\alpha}(\boldsymbol{x})$

8. Contraste de hipótesis sobre dos muestras

Igualdad de esperanzas: varianzas conocidas **25**

Sean $X \sim N(\mu_X, \sigma^2_X)$ y $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2_Y)$
independientes; y sean los siguientes $m.a.s$

$$\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

y

$$\boldsymbol{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$$

Sabemos que los estimadores de media muestral se distribuyen

$$\widehat{\overline{x}} \sim N(\mu_X, \frac{\sigma^2_X}{n}); \qquad \widehat{\overline{y}} \sim N(\mu_Y, \frac{\sigma^2_Y}{m});$$

⇑ **Igualdad de esperanzas: varianzas conocidas** **26**

por tanto la diferencia $\widehat{\overline{x}} - \widehat{\overline{y}}$ se distribuye

$$\widehat{\overline{x}} - \widehat{\overline{y}} \sim N\left[(\mu_X - \mu_Y),\ \left(\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)\right]$$

Tipificando

$$Z = \frac{(\widehat{\overline{x}} - \widehat{\overline{y}}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,\ 1).$$

Por tanto, si H_0: $\mu_X = \mu_Y$ frente a H_1: $\mu_X \neq \mu_Y$; calculando el intervalo de confianza del 95 %

$$0.95 = P\left((\widehat{\overline{x}} - \widehat{\overline{y}}) - 1.96\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \leq \mu_X - \mu_Y \leq (\widehat{\overline{x}} - \widehat{\overline{y}}) + 1.96\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}\right)$$

Si el intervalo contiene el cero
$(H_0 : \mu_X = \mu_Y \ \Rightarrow \mu_X - \mu_Y = 0)$
entonces no rechazamos H_0.

Ejemplo 5. [**Igualdad de esperanzas (varianzas conocidas):**] (Novales, 1997, ejercicio 10.5 (pp. 395))
$m.a.s$ (n=64) de $X \sim N(\mu_X, 1600)$, con $\overline{x} = 247.42$;
$m.a.s$ (m=144) de $Y \sim N(\mu_Y, 2304)$; con $\overline{y} = 258.22$.
Queremos contrastar H_0: $\mu_X = \mu_Y$ frente a H_1: $\mu_X \neq \mu_Y$.

$$\text{intervalo de confianza} = \left[\widehat{\overline{x}} - \widehat{\overline{y}} \pm 1.96\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}\right]$$

$$= \left[247.42 - 258.22 \pm 1.96\sqrt{\frac{1600}{n} + \frac{2304}{m}}\right]$$

$$= [-23.35,\ 1.75]$$

que contiene el cero; por lo tanto no podemos rechazar H_0 al nivel de significación del 5 %.

⇑ **Igualdad de esperanzas: Var. desconocidas e idénticas** **27**

Sean $X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ y $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$
independientes; y sean los siguientes $m.a.s$

$$\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

y

$$\boldsymbol{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$$

Si denotamos la cuasivarianza conjunta de ambas muestras como

$$\mathfrak{s}^2 = \frac{(n-1)\mathfrak{s}_{\mathbf{x}}^2 + (m-1)\mathfrak{s}_{\mathbf{y}}^2}{n+m-2}$$

entonces

$$\frac{(\widehat{\overline{x}} - \widehat{\overline{y}}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\mathfrak{s}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim t_{n+m-2}$$

Ejemplo 6. [**Igualdad de esperanzas (varianzas desconocidas pero iguales):**] (Novales, 1997, ejercicio 10.6 (pp. 395))

Queremos contrastar igualdad de salarios entre hombres y mujeres:
Mujeres $m.a.s$ (n=60) de $X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$, con $\overline{x} = 1.04$, y con $\sum x_i^2 = 80$;

Hombres $m.a.s$ (m=120) de $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$; con $\overline{y} = 1.25$, y con $\sum y_i^2 = 200$.
Podemos realizar el contraste de H_0: $\mu_X = \mu_Y$ frente a H_1: $\mu_X \neq \mu_Y$.

$$\mathfrak{s}_{\mathbf{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{80 - 60 \cdot 1.04^2}{59} = 0.256; \qquad \mathfrak{s}_{\mathbf{y}}^2 = 0.105$$

de modo que

$$\mathfrak{s}^2 = \frac{(n-1)\mathfrak{s}_{\mathbf{x}}^2 + (m-1)\mathfrak{s}_{\mathbf{y}}^2}{n+m-2} = 0.155$$

Finalmente el intervalo de confianza del 95 % es

$$\left[\widehat{\bar{x}} - \widehat{\bar{y}} \pm 1.96\sqrt{\mathfrak{s}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}\right]$$

$$= \left[1.04 - 1.25 \pm 1.96\sqrt{0.155\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{120}\right)}\right]$$

$$= [-0.3311,\ -0.0889]$$

que no contiene el cero (por lo que rechazamos con $\alpha = 5\,\%$.

Es preferible que la hipótesis alternativa H_1: $\mu_X < \mu_Y$ ya que en principio es poco realista (dada la lamentable situación del mercado laboral en ciertos sectores) contemplar la posibilidad de que sean las mujeres las que cobren más. Esto permite realizar un contraste de hipótesis más potente. Por tanto, el contraste debe ser de una sola cola y la región crítica es

$$\left[\widehat{\bar{x}} - \widehat{\bar{y}} < -1.65\sqrt{0.155\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{120}\right)}\right] = \left[\widehat{\bar{x}} - \widehat{\bar{y}} < -0.102\right]$$

Por lo que rechazamos la hipótesis de igualdad de salarios (ó la H_0 $\mu_X \geq \mu_Y$).

⇑ **Igualdad de proporciones** **28**

Sean $X \sim \text{Bernoulli}(p_X)$ y $Y \sim \text{Bernoulli}(p_Y)$
independientes; y sean los siguientes $m.a.s$

$$\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

y

$$\boldsymbol{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$$

H_0: $p_X = p_Y$; H_1: $p_X \neq p_Y$ (nivel de significación α).

Emplearemos como estimador de p_X el estadístico

$$\widehat{p_X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{\mathcal{X}}{n}$$

donde $\mathcal{X} \sim B(n,p)$ es el número total de éxitos de X (y análogamente para p_Y).

⇑ **Igualdad de proporciones** **29**

Si H_0 ($p_X = p_Y = p$) es cierta; entonces

$$\widehat{p_X} - \widehat{p_Y}$$

tiene esperanza nula y varianza

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\widehat{p_X} - \widehat{p_Y}\right) &= \text{Var}\left(\widehat{p_X}\right) + \text{Var}\left(\widehat{p_Y}\right) = \tfrac{p(1-p)}{n} + \tfrac{p(1-p)}{m} \\ &= \tfrac{(n+m)p(1-p)}{nm}\end{aligned}$$

Entonces, por el T.C.L. (bajo H_0)

$$\frac{\widehat{p_X} - \widehat{p_Y} - \text{E}\left(\widehat{p_X} - \widehat{p_Y}\right)}{\sqrt{\text{Var}\left(\widehat{p_X} - \widehat{p_Y}\right)}} = \frac{\frac{\mathcal{X}}{n} - \frac{\mathcal{Y}}{m}}{\sqrt{\frac{(n+m)p(1-p)}{nm}}}$$

Posee una distribución aproximada $N(0,1)$ para m y n grandes.
(Nótese que p es desconocido).

⇑ **Igualdad de proporciones** **30**

Puesto que p es desconocido, necesitamos una estimación a partir de

$$\widehat{p} = \frac{\mathcal{X} + \mathcal{Y}}{m+n}.$$

Finalmente llegamos al siguiente contraste

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si: } \left| \frac{\frac{x}{n} - \frac{y}{m}}{\sqrt{\frac{(n+m)\frac{x+y}{m+n}\left(1-\frac{x+y}{m+n}\right)}{nm}}} \right| \geq z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$$

donde x e y son las realizaciones de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ (el numero de éxitos de X e Y en la muestra).

Ejemplo 7. [**Igualdad de proporciones:**] (Novales, 1997, ejercicio 10.7 (pp. 397))

Una entidad financiera quiere contrastar si la proporción de impagos en créditos hipotecarios y al consumo son iguales.

Consumo $m.a.s$ (n=100) de $X \sim \text{Bernoulli}(p_X)$ de donde
$\mathcal{X} = \sum X_i \sim B(100, p_X)$ con $x = 8$

Hipotecario $m.a.s$ (n=60) de $Y \sim \text{Bernoulli}(p_Y)$ de donde
$\mathcal{Y} = \sum Y_i \sim B(60, p_Y)$ con con $y = 3$

Contrastar H_0: $p_X = p_Y$ frente a H_1: $p_X \neq p_Y$

$$\widehat{p} = \frac{8+3}{100+60} = 0.06875$$

por lo que el estadístico es

$$\left| \frac{\frac{x}{n} - \frac{y}{m}}{\sqrt{\frac{(n+m)\frac{x+y}{m+n}\left(1-\frac{x+y}{m+n}\right)}{nm}}} \right| = \left| \frac{\frac{8}{100} - \frac{3}{60}}{\sqrt{\frac{(100+60)\frac{8+3}{100+60}\left(1-\frac{8+3}{100+60}\right)}{100 \cdot 60}}} \right| = |0.73| < z_{95\,\%},$$

donde $z_{95\,\%} = 1.96$; No rechazamos H_0.

⇑ **Igualdad de varianzas** **31**

Sean $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ y $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ **independientes**, con μ_X, μ_Y, σ_X^2 y σ_Y^2 desconocidas; y los siguientes $m.a.s$
$\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ y $\boldsymbol{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$

El contraste H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ frente a H_0: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ con un nivel de significación α consiste en rechazar H_0 si

$$\frac{\mathfrak{s}_Y^2}{\mathfrak{s}_X^2} \leq F_{m-1,n-1,\alpha/2} \qquad \text{ó} \qquad \frac{\mathfrak{s}_Y^2}{\mathfrak{s}_X^2} \geq F_{m-1,n-1,1-\alpha/2}$$

Ejemplo 8. [**Igualdad de varianzas:**] (Novales, 1997, ejercicio 10.8 (pp. 398)) Se quiere estudiar la renta de las comunidades autónomas del norte y del sur de España, para ello queremos contrastar si el valor esperado es común en ambas regiones. Antes de comparar los valores esperados, debemos decidir si la varianza de las distribuciones es la misma entre ambas poblaciones. Por tanto, realizaremos los siguientes pasos

1. Contrastaremos si las varianzas son iguales
2. En función del resultado de contraste anterior, elegiremos el estadístico más apropiado para contrastar igualdad de esperanzas.

Norte $m.a.s$ (n=10) de $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$
$\sum x_i = 11018$; $\sum x_i^2 = 12325480$; $\overline{x} = 1101.8$

Sur $m.a.s$ (n=8) de $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$
$\sum y_i = 7588$; $\sum y_i^2 = 7329196$; $\overline{y} = 948.5$

1. Primero contrastamos igualdad de varianzas; H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ frente a H_1: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

$$\mathfrak{s}_{\mathbf{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{12325480 - 10 \cdot 1101.8^2}{9} = 20649.7;$$

$$\mathfrak{s}_{\mathbf{y}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 - n\overline{y}^2}{n-1} = \frac{7329196 - 8 \cdot 948.5^2}{7} = 18854$$

Por tanto $F = \frac{\mathfrak{s}_{\mathbf{x}}^2}{\mathfrak{s}_{\mathbf{y}}^2} = 0.913$, que pertenece a $[F_{7,9,0.025} = 0.21, \quad F_{7,9,0.975} = 4.20]$;
No rechazamos H_0

2. Ahora contrastamos H_0: $\mu_X = \mu_Y$ frente a H_1: $\mu_X \neq \mu_Y$ (suponiendo varianzas iguales)

$$\mathfrak{s}^2 = \frac{(n-1)\mathfrak{s}_{\mathbf{x}}^2 + (m-1)\mathfrak{s}_{\mathbf{y}}^2}{n+m-2} = 19864.1$$

y puesto que bajo H_0

$$\frac{(\widehat{\overline{x}} - \widehat{\overline{y}}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\mathfrak{s}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim t_{n+m-2}$$

entonces

$$\frac{(\widehat{\overline{x}} - \widehat{\overline{y}})}{\sqrt{\mathfrak{s}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = 2.29$$

que no pertenece a $[t_{16,\ 0.025} = -2.12, \quad t_{16,\ 0.975} = 2.12]$; Rechazamos H_0

Ejercicio 26. (Novales, 1997, ejercicio 10.4 (pp. 400))
$m.a.s$ $(n = 2200)$ de $X \sim \text{Bernoulli}(p)$; de donde
$\mathcal{X} = \sum X_i \sim B(2200, p)$ con $x = 415$

Contrastar H_0: $p \geq 0.2$ frente a H_1: $p < 0.2$.

Ejercicio 27. Sean $X \sim \mathrm{N}\left(\mu_X\,,\,\sigma_X^2\right)$ e $Y \sim \mathrm{N}\left(\mu_Y\,,\,\sigma_Y^2\right)$ los rendimientos de dos activos financieros. Se dispone de dos muestras de tamaños n y m respectivamente y se quiere hacer un contraste para discutir si el primer rendimiento tiene más incertidumbre que el segundo. Proponga las hipótesis nula y alternativa más apropiadas para llevar a cabo este contraste. Proponga el estadístico de contraste y la región crítica para llevar a cabo este contraste con un nivel de significación α.
(NO resuelva el contraste, limitese a contestar lo que se le pide)

9. Problemas

Ejercicio 28. Para puestos de trabajo similares, sean $X \sim \mathrm{N}\left(\mu_X\,,\,\sigma_X^2\right)$ los salarios de los hombres e $Y \sim \mathrm{N}\left(\mu_Y\,,\,\sigma_Y^2\right)$ los salarios de las mujeres. Se quiere contrastar si los salarios de los hombres son mayores que los de las mujeres (si hay discriminación salarial).

1. Proponga la hipótesis nula y alternativa que considere más apropiada para llevar a cabo este contraste.
2. Proponga el estadístico de contraste y la región crítica para llevar a cabo este contraste, suponiendo independencia entre X e Y y conocidas las varianzas $(\left(\sigma_X^2, \sigma_Y^2\right) = (4, 9))$.

(NO resuelva el contraste, limitese a contestar lo que se le pide)

Ejercicio 29. Dado un nivel de significación α, proponga la región crítica que crea más conveniente para resolver el siguiente contraste: $H_0 :\ \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, $H_1 :\ \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$. (suponga mismo tamaño muestral, n, para la X e Y) ¿Cambiaría la región crítica si $H_1 :\ \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$? Razone la respuesta.

Ejercicio 30. Se cree que las terrazas y chiringuitos de verano tienen unos ingresos fijos "a", más unos ingresos que dependen de los metros cuadrados que ocupan (además de otras circunstancias independientes de su superficie, como son su situación, la proximidad a otros locales, la calidad del servicio, etc.)

La variable Y hace referencia a los ingresos de toda la temporada de verano en **miles de euros**. La variable X son los metros cuadrados ocupados por un establecimiento.

Establecimiento	y_i	x_i	$x_i y_i$	x_i^2	$\widehat{y_i}$	$\widehat{e_i}$	$x_i\widehat{e_i}$	$\widehat{e_i}^2$
A	27	5	135	25	28	-1	-5	1
B	23	3	69	9	18	5	15	25
C	35	6	210	36	33	2	12	4
D	9	2	18	4	13	-4	-8	16
E	36	7	252	49	38	-2	-14	4
sumas	130	23	684	123	130	0	0	50

Cuadro 1:

Además se sabe que las varianzas y covarianzas muestrales son:

$$T \cdot s_x^2 = 17.2, \quad T \cdot s_y^2 = 480, \quad T \cdot s_{xy} = 86,$$

donde T es el tamaño muestral.

Suponga que plantea el siguiente modelo

$$Y_i = a + bx_i + U_i,$$

donde U_i son los otros factores que afectan a los ingresos distintos de la superficie ocupada. Se sabe que la distribución conjunta de dichos factores es: $\boldsymbol{U} \sim N(\mathbf{0},\ \sigma^2\,\mathbf{I})$, donde $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de orden 5, y σ^2 es la varianza de U_i, cuyo valor es desconocido.

(a) Estime por MCO los parámetros del modelo. ¿Cual es el valor esperado del ingreso fijo de un establecimiento? ¿En cuanto aumenta el ingreso esperado de un local si hace crecer su terraza en un metro cuadrado?

(b) Estime por MCO la pendiente del modelo, pero dando un intervalo de confianza del 95 %.

(c) Un empresario hostelero dice que el rendimiento de un metro adicional de establecimiento rinde una cantidad de (al menos) seis mil euros (pero nunca menos). Contraste dicha hipótesis con una significación del 10 %. Bajo la hipótesis del empresario ¿cuál es el p-valor de la estimación del parámetro b?

(d) ¿Qué establecimiento ha ingresado más respecto al nivel esperado, dada su superficie? ¿y cual menos?

(e) Dado el modelo estimado, ¿cuál es el ingreso esperado para un establecimiento con una superficie de 4 metros cuadrados?

Ejercicio 31. Sean los siguientes datos:

Familia	y_i	x_i	$x_i y_i$	x_i^2	$\widehat{y_i}$	$\widehat{e_i}$	$x_i\widehat{e_i}$	$\widehat{e_i}^2$
A	2	4	8	4	1.74	0.26	1.04	0.07
B	3	7	21	9	3.44	-0.44	-3.08	0.19
C	1	3	3	1	1.18	-0.18	-0.54	0.03
D	5	9	45	25	4.56	0.44	3.96	0.19
E	9	17	153	81	9.08	-0.08	-1.36	0.01
sumas	20	40	230	120	20	0	0	0.48

Cuadro 2:

donde Y es el gasto semanal de las familias, y X es su ingreso semanal.

Además se sabe que las varianzas y covarianzas muestrales son:

$$T \cdot s_y^2 = 124, \quad T \cdot s_x^2 = 40, \quad T \cdot s_{xy} = 70,$$

donde T es el tamaño muestral.

Suponga que plantea el siguiente modelo

$$Y_i = a + bx_i + U_i,$$

donde U_i son otros factores que afectan al consumo familiar distintos de sus ingresos. Se sabe que la distribución conjunta de dichos factores es:

$$\boldsymbol{U} \sim N(\mathbf{0},\ \sigma^2\,\mathbf{I}),$$

donde $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de orden 5, y σ^2 es la varianza de U_i, cuyo valor es desconocido.

(a) Estime por MCO los parámetros del modelo.

(b) Estime por MCO los parámetros del modelo pero dando un intervalo de confianza del 95 %.

(c) Contraste la hipótesis de que "la propensión marginal es igual a uno" frente a "es menor que uno" con un nivel de significación del 10 %. ¿Cuál es el p-valor de la estimación del "de la propensión marginal estimada"?

(d) ¿Cuál es la familia que más ha gastado respecto al nivel esperado, dados su ingresos? ¿y la que menos?

(e) ¿Cuál es el gasto esperado para una familia que tuviera unos ingresos semanales iguales a 2?

Test. Conteste a las siguientes cuestiones.

1. Queremos contrastar H_0: $\theta = \theta_0$ frente a H_1: $\theta = \theta_1$, $(\theta_1 \neq \theta_0)$; para ello empleamos la región crítica óptima en sentido de Neyman-Pearson. Para el nivel de significación $\alpha = 0.10$ encontramos suficiente evidencia en contra de la hipótesis nula y en favor de la alternativa. De las siguientes afirmaciones:

(i) para niveles de significación superiores al 10 % también rechazaríamos la H_0.

(ii) únicamente podemos aumentar la potencia disminuyendo el nivel de significación.

(iii) La potencia del contraste crece con la distancia entre θ_1 de θ_0.

(iv) La potencia del contraste es independiente del nivel de significación.

(a) Sólo la (i) es verdadera.

(b) La (i) y la (iii) son verdaderas

(c) Ninguna es verdadera

(d) Todas son verdaderas

2. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución desconocida con momentos definidos. Empleando la media muestral se desea contrastar H_0: $\mathrm{E}(X) = 1$ frente a H_1: $\mathrm{E}(X) \neq 1$; y se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño n. Entonces:

(a) No podemos realizar el contraste

(b) El Teorema Central del Límite nos facilita la distribución exacta del estadístico de contraste bajo la nula cuando $n > 30$

(c) El Teorema Central del Límite nos facilita la distribución de $\mathrm{E}(X)$.

(d) El Teorema Central del Límite nos facilita una distribución aproximada del estadístico para muestras finitas.

El siguiente texto es valido para las 2 siguientes preguntas: La variable aleatoria X tiene la siguiente función de densidad: $f_X(x) = 2x/a^2$, definida en el intervalo $[0, a]$, con $a > 0$. Queremos contrastar H_0: $a = 1$ frente a H_1: $a > 1$. Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 1 y de dos tests que vienen caracterizados por las siguientes regiones críticas:

Test 1: $RC_1 = \{\mathbf{x} | x > 0.987\}$

Test 2: $RC_2 = \{\mathbf{x} | x < 0.158\}$.

3. El nivel de significación:

(a) es el mismo para las dos regiones críticas e igual a 0.025.

(b) ninguna de las restantes.

(c) para la RC_1 es 0.025 y para la RC_2 es menor, porque la región crítica RC_2 es mejor.

(d) para la RC_1 es 0.025 y para la RC_2 es mayor, porque la región crítica RC_2 es peor.

4. Con relación a la función de potencia de ambos contrastes, comente cual de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

i) La función potencia evaluada en $a = 1$ es la misma en ambos casos

ii) Las dos son crecientes y convergen monótonamente hacia 1, aunque la primera lo hace más rápido que la segunda.

iii) La función potencia está definida para cualquier valor de a en el intervalo $(-\infty,\ \infty)$.

iv) La primera converge a 1 y la segunda es decreciente.

(a) sólo la i) y la ii)

(b) sólo la ii)

(c) sólo la i) y la iv)

(d) sólo la i)

■ fin del grupo de preguntas ■

5. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Se desea contrastar H_0: $\sigma^2 = 100$ frente a H_1: $\sigma^2 < 100$ empleando el contraste uniformemente más potente. Se tiene una muestra de tamaño 31 con una cuasivarianza $\mathfrak{s}^2 = 75$. Entonces:

(a) con nivel de significación del 5 % no se rechaza H_0 en favor de H_1.
(b) con nivel de significación del 1 % se rechaza H_0 en favor de H_1.
(c) la región crítica uniformemente mas potente es de dos colas.
(d) ninguna de las restantes.

6. Un inversor posee acciones de la empresa "telefón" y está muy satisfecho con ellas, pero se está planteando venderlas para adquirir acciones de "movilón". Sea X el rendimiento diario de "telefón" e Y el de "movilón". El inversor cambiaría las acciones si la rentabilidad media esperada que le da "movilón" es más del doble que la de "telefón". ¿Qué hipótesis debería contrastar a la hora de tomar su decisión?

(a) H_0: $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X)$, $\quad H_1$: $\mathrm{E}(Y) > \mathrm{E}(X)$
(b) H_0: $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X)$, $\quad H_1$: $\mathrm{E}(Y) < \mathrm{E}(X)$
(c) H_0: $\mathrm{E}(Y) = 2\mathrm{E}(X)$, $\quad H_1$: $\mathrm{E}(Y) > 2\mathrm{E}(X)$
(d) H_0: $2\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X)$, $\quad H_1$: $2\mathrm{E}(Y) > \mathrm{E}(X)$

▼ comienzo de un grupo de preguntas ▼

El siguiente texto es valido para las 3 siguientes preguntas:
Sean $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ las rentas familiares medias de las familias madrileñas y andaluzas respectivamente. Se desea contrastar si la dispersión de la renta en Andalucía es superior a la de Madrid en un porcentaje $a \geq 1$. Para ello disponemos de sendas muestras aleatorias simples, e independientes de las poblaciones X e Y, con tamaños muestrales 61 y 121 respectivamente. Las cuasivarianzas muestrales son $\mathfrak{s}_x^2 = 1$ y $\mathfrak{s}_y^2 = 1.5$, respectivamente. El diseño de hipótesis correcto para llevar a cabo este contraste es: H_0: $\sigma_Y^2 = a\sigma_X^2$, frente a H_1: $\sigma_Y^2 > a\sigma_X^2$.

7. La región crítica más adecuada para llevar a cabo este contraste para un nivel de significación α es:

(a) $\left\{\mathfrak{s}_y^2/\mathfrak{s}_x^2 > F_{(120,60),1-\alpha/2} \text{ ó } \mathfrak{s}_y^2/\mathfrak{s}_x^2 < F_{(120,60),\alpha/2}\right\}$

(b) $\left\{\mathfrak{s}_y^2/\mathfrak{s}_x^2 > F_{(120,60),1-\alpha}\right\}$

(c) $\left\{\mathfrak{s}_y^2/\mathfrak{s}_x^2 \frac{1}{a} > F_{(120,60),1-\alpha}\right\}$

(d) $\left\{\mathfrak{s}_y^2/\mathfrak{s}_x^2 a > F_{(120,60),1-\alpha}\right\}$

8. Suponga que $a = 1$ y $\alpha = 0.05$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) A este nivel de significación, concluimos que la dispersión en Andalucía es superior a la de Madrid.
(b) A este nivel de significación, concluimos que la dispersión en Andalucía es igual a la de Madrid.
(c) A este nivel de significación, concluimos que la dispersión en Andalucía es inferior a la de Madrid
(d) A este nivel de significación, concluimos que la dispersión en Andalucía es igual a la de Madrid

9. Suponer que $a = 2$ y $\alpha = 0.05$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) A este nivel de significación, rechazamos la nula.
(b) A este nivel de significación, no rechazamos la nula.
(c) El contraste no cambia con respecto a la pregunta anterior.
(d) El valor del estadístico de contraste es 1.5, por lo que no rechazamos la nula.

■ fin del grupo de preguntas ■

10. El p-valor de un determinado contraste es 0.12. ¿Qué nos dice esta información?

(a) Para niveles de significación superiores a 0.12, no aceptamos la hipótesis nula.
(b) Para niveles de significación inferiores a 0.12, no aceptamos la hipótesis nula.
(c) La probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo ésta verdadera es 0.12.
(d) La probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo ésta falsa es 0.12.

11. La variable aleatoria X es $N(\mu, 1)$. Queremos contrastar la siguiente hipótesis H_0: $\mathrm{E}(X) = \mu_0$ frente a H_1: $\mathrm{E}(X) \neq \mu_0$. Para ello usamos la siguiente región critica: $RC = \{\mathbf{x} \text{ tal que } \overline{\mathbf{x}} > k\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

(a) Podemos ajustar el nivel de significación eligiendo el valor de k adecuadamente.
(b) Cualquier región crítica de dos colas tiene mayor potencia que RC.
(c) El nivel de confianza depende del valor de k y de la distribución del estadístico.
(d) La región crítica RC no es la uniformemente mas potente.

12. Sea una variable aleatoria X distribuida uniformemente en el intervalo $(0, a)$. Se pretende contrastar la hipótesis H_0: $a = 1$, frente a la alternativa H_1: $a > 1$. Disponemos de una muestra de tamaño 1. La región crítica es: $RC = \{x \text{ tales que } x > k\}$. El valor de k para un nivel de significación de 0.05 es:

(a) 0.975
(b) 0.05
(c) 0.95
(d) 0.025

Pista: la función de densidad de una X distribuida uniformemente es

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/a & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

El siguiente texto es válido para las preguntas 13, 14 y 15: Un analista cree que la cotización Euro/Dolar puede representarse por una distribución $N(\mu, 16)$, siendo 16 la varianza. Desea contrastar $H_0: \ \mu = 1$ frente a $H_1: \ \mu < 1$. Para ello, dispone de una muestra de tamaño $n = 64$, con $\overline{x} = 0.92$. Además, dada una variable aleatoria X distribuida $N(0, 1)$, definimos $\phi(x) := P(X \leq x)$.

13. Suponga que el analista rechaza H_0 en favor de H_1 si $\overline{x} \geq 1.82$. El nivel de significación (α) y potencia (W) de dicha región crítica son, respectivamente:

(a) $\alpha = 0.05$ y $W(z)$ es creciente en z para todo $z < 1$.
(b) $\alpha = 0.05$ y $W(z) = 1 - \phi(2 \cdot (1.82 - z))$ para todo $z < 1$.
(c) $\alpha = 0.1$ y $W(z)$ es creciente en z para todo $z < 1$.
(d) $\alpha = 0.1$ y $W(z) = 1 - \phi(2 \cdot (1.82 - z))$ para todo $z < 1$.

14. El valor p proporcionado por la muestra es:

(a) $1 - \phi(-0.16)$
(b) $\phi(-0.16)$
(c) $\phi(0.16) - \phi(-0.16)$
(d) $\phi(0.16)$

15. Un intervalo de confianza al 95 % para el parámetro μ:

(a) es $(-1.96, 1.96)$
(b) tiene una amplitud decreciente con $\overline{x}$.
(c) es $(0.1, 1.74)$
(d) ninguna de las anteriores.

16. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Se desea contrastar H_0: $\sigma^2 = 100$ frente a H_1: $\sigma^2 < 100$. Se tiene una muestra de tamaño 21 con una cuasivarianza $s^2 = 75$. Entonces:

(a) con nivel de significación del 5 % no se rechaza H_0 en favor de H_1.
(b) con nivel de significación del 1 % se rechaza H_0 en favor de H_1.
(c) debería tomarse una región crítica de dos colas.
(d) no se dispone de información suficiente para realizar el contraste.

17. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Se desea contrastar H_0: $\mu = 1$ frente a H_1: $\mu \neq 1$, disponiendo para ello de una muestra aleatoria simple de tamaño n. Entonces:

(a) es necesario usar el Teorema Central del Límite para conocer la distribución bajo H_0 del estadístico utilizado en el contraste.
(b) el Teorema Central del Límite nos dice como se distribuye μ, la media poblacional, a medida que aumenta n.
(c) el estadístico utilizado depende de que σ^2 sea conocido o no.
(d) si $n = 1$ y σ^2 es conocido, no puede llevarse a cabo el contraste debido a que n es demasiado pequeño.

A. Teorema de Neyman-Pearson

⇑ **Función de verosimilitud** 32

Sea $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim i.i.d$ con

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \boldsymbol{\theta}) = f_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i, \boldsymbol{\theta}).$$

Cuando $\boldsymbol{\theta}$ es conocido, esta función determina $P(\mathbf{x}_0)$.

¡Cambio de óptica! conocida la muestra $\mathbf{x}_0$ ¿Qué parámetros $\boldsymbol{\theta}$ la hacen más probable según $f_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta})$?

Definimos la *función de verosimilitud* como

$$L(\boldsymbol{\theta} \,|\, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) = L(\boldsymbol{\theta} \,|\, \mathbf{x}_0) = f_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta})$$

⇑ **Región crítica óptima** 33

Sea un contraste de $H_0\colon \theta = \theta_0$ frente a $H_1\colon \theta = \theta_1$ con un nivel de significación α, y con región crítica RC;

$(\boldsymbol{\Theta} = \{\theta_0,\ \theta_1\})$

RC es **Óptima** (para contrastar $H_0\colon \theta = \theta_0$ frente a $H_1\colon \theta = \theta_1$ con nivel de significación α) si para cualquier otra región crítica $\widetilde{RC}$ con el mismo nivel de significación

$$W_{RC}(\theta_1) \geq W_{\widetilde{RC}}(\theta_1).$$

Es decir, para contrastar $H_0\colon \theta = \theta_0$ frente a $H_1\colon \theta = \theta_1$ con un nivel de significación α, el contraste con RC es el más potente.

⇑ **Región crítica óptima** 34

Sea $\boldsymbol{\Theta} = \{\theta_0,\ \theta_1\}$, y sea $\boldsymbol{X}$ un *m.a.s.* con función de densidad conjunta conocida $f_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$.

Parece razonable caracterizar una RC como

$$\mathbf{x} \in RC \quad \text{si} \quad L(\boldsymbol{\theta}_1 |\, \mathbf{x}) > L(\boldsymbol{\theta}_0 |\, \mathbf{x})$$

es decir, si $\mathbf{x}$ es más verosímil bajo H_1 que bajo H_0.

Sin embargo, si queremos garantizar un α determinado, quizá tengamos que ajustar el criterio:

$$\mathbf{x} \in RC \quad \text{si} \quad c_\alpha \cdot L(\boldsymbol{\theta}_1 |\, \mathbf{x}) > L(\boldsymbol{\theta}_0 |\, \mathbf{x})$$

donde $c_\alpha \cdot \geq 0$.

⇑ **Teorema de Neyman-Pearson** 35

Sea $L(\boldsymbol{\theta} \,|\, \mathbf{x}_0)$ la función de verosimilitud de una *m.a.s* $\mathbf{x}_0$ extraída de una población con función de densidad $f_X(x, \boldsymbol{\theta})$ y sea el espacio paramétrico $\boldsymbol{\Theta} = \{\boldsymbol{\theta}_0,\ \boldsymbol{\theta}_1\}$.

Si existe un contraste con RC caracterizada por

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \frac{L(\boldsymbol{\theta}_0 |\, \mathbf{x})}{L(\boldsymbol{\theta}_1 |\, \mathbf{x})} \leq c_\alpha \right\}$$

para algún c_α tal que $P\left(\mathbf{x} \in RC |\ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0\right) = \alpha$.

Entonces RC es la **región crítica óptima** para contrastar $H_0\colon \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ frente a $H_0\colon \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$ con un nivel de significación α.

TEO (Lema de Neyman-Pearson): Sea $H_0 : \theta^* = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta^* = \theta_1$. Supongamos que existe cierto k_α tal que $P_{\theta_0}(\mathcal{R}_{NP}) = \alpha$, donde $\mathcal{R}_{NP} = \{(x_1, ..., x_n) : L(\theta_1; x_1, ..., x_n) > k_\alpha L(\theta_0; x_1, ..., x_n)\}$. Entonces $\psi_{NP} = 1_{\mathcal{R}_{NP}}$ es el test más potente de nivel α.

Dem: Sea $\psi \in \Psi_\alpha$. Hay que probar que $\beta_{\psi_{NP}}(\theta_1) \geq \beta_\psi(\theta_1)$. En primer lugar, notamos que $\forall x_1, ..., x_n$,

$$[\psi_{NP}(x_1,...,x_n) - \psi(x_1,...,x_n)][L(\theta_1;x_1,...,x_n) - k_\alpha L(\theta_0;x_1,...,x_n)] \geq 0.$$

En efecto. Cuando $x_1,...,x_n$ es tal que $\psi_{NP}(x_1,...,x_n) = 1$, entonces, como $\psi \in [0,1]$ se tiene que $[\psi_{NP}(x_1,...,x_n) - \psi(x_1,...,x_n)] \geq 0$. Por otra parte, como la definición de ψ_{NP} implica que $\psi_{NP}(x_1,...,x_n) = 1$ es equivalente a $L(\theta_1;x_1,...,x_n) > k_\alpha L(\theta_0;x_1,...,x_n)$, entonces $L(\theta_1;x_1,...,x_n) - k_\alpha L(\theta_0;x_1,...,x_n) \geq 0$ de donde se deduce la desigualdad. El caso en que $x_1,...,x_n$ es tal que $\psi_{NP}(x_1,...,x_n) = 0$ se trata similarmente.

Dada esta propiedad, tenemos que (tratamos el caso continuo sin pérdida de generalidad),

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Re} ... \int_{\Re} [\psi_{NP}(x_1,...,x_n) - \psi(x_1,...,x_n)][L(\theta_1;x_1,...,x_n) - k_\alpha L(\theta_0;x_1,...,x_n)]\ dx_1...dx_n \\
&= \int_{\Re} ... \int_{\Re} \psi_{NP}(x_1,...,x_n) L(\theta_1;x_1,...,x_n)\ dx_1...dx_n \\
&\quad - \int_{\Re} ... \int_{\Re} \psi(x_1,...,x_n) L(\theta_1;x_1,...,x_n)\ dx_1...dx_n \\
&\quad - k_\alpha \left(\int_{\Re} ... \int_{\Re} \psi_{NP}(x_1,...,x_n) L(\theta_0;x_1,...,x_n)\ dx_1...dx_n \right. \\
&\quad \left. - k_\alpha \int_{\Re} ... \int_{\Re} \psi(x_1,...,x_n) L(\theta_0;x_1,...,x_n)\ dx_1...dx_n \right) \\
&= \beta_{\psi_{NP}}(\theta_1) - \beta_\psi(\theta_1) - k_\alpha(\beta_{\psi_{NP}}(\theta_0) - \beta_\psi(\theta_0)).
\end{aligned}$$

Por definición de k_α y dado que $\psi \in \Psi_\alpha$ se tiene que $(\beta_{\psi_{NP}}(\theta_0) - \beta_\psi(\theta_0)) \geq 0$ y por tanto, como $k_\alpha \geq 0$ (si $k_\alpha < 0$, entonces $\mathcal{R}_{NP} = \Re^n$ por lo que tendríamos que $\beta_{\psi_{NP}}(\theta_0) = 1$) puede escribirse que

$$0 \leq \beta_{\psi_{NP}}(\theta_1) - \beta_\psi(\theta_1) - k_\alpha(\beta_{\psi_{NP}}(\theta_0) - \beta_\psi(\theta_0)) \leq \beta_{\psi_{NP}}(\theta_1) - \beta_\psi(\theta_1),$$

lo que prueba el resultado.

B. Contraste uniformemente más potente

⇑ **Contraste uniformemente más potente** 36

Un contraste de H_0: $\theta \in \Theta_0$ frente a H_1: $\theta \in \Theta_1$ definido por RC se dice que es un contraste **uniformemente más potente (UMP)** de tamaño α si

1. $\sup_{\theta \in \Theta_0} W_{RC}(\theta) = \alpha$
2. $W_{RC}(\theta) \geq W_{\widetilde{RC}}(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta_1$
   donde $W_{\widetilde{RC}}(\theta)$, es la función potencia de cualquier otro contraste de tamaño α.

Contrastes **UMP** no existen en general.

⇑ **Contraste insesgado** 37

Decimos que un contraste H_0: $\theta \in \Theta_0$ frente a H_1: $\theta \in \Theta_1$ es **insesgado** si

$$W(\theta') \geq W(\theta'')$$

para cualquier $\theta' \in \Theta_1$ y $\theta'' \in \Theta_0$.

⇑ **Contraste de razón de verosimilitudes** 38

En general, para un contraste genérico H_0: $\theta \in \Theta_0$ frente a H_1: $\theta \in \Theta_1$ no hay un resultado equivalente al T. de Neyman-Pearson (No podemos garantizar la existencia de de un contraste UMP o UMP e insesgado).

Un contraste que en ocasiones ofrece buenos resultados es

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \frac{\sup_{\Theta_0} L(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{x})}{\sup_{\boldsymbol{\Theta}} L(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{x})} = \lambda(\mathbf{x}) \leq c_\alpha \right\}$$

donde $0 \leq c_\alpha \leq 1$.

Lista de Trasparencias

C. Bibliografía

Novales, A. (1997). *Estadística y Econometría*. McGraw-Hill, Madrid, primera ed. ISBN 84-481-0798-5. 2, 16, 19, 21, 22, 44

Peña, D. (2001). *Fundamentos de Estadística*. Alianza Editorial, Madrid. ISBN 84-206-8696-4. 2

Peña, D. (2002). *Regresión y diseño de experimentos*. Alianza Editorial, Madrid. ISBN 84-206-8695-6. 2

Peña, D. y Romo, J. (1997). *Introducción a la Estadística para la Ciencias Sociales*. McGraw-Hill, Madrid. ISBN 84-481-1617-8. 2

D. Chuletario y Tablas

Distribuciones de funciones de variables aleatorias si $X \sim \mathrm{N}\left(\mu\,,\,\sigma^2\right)$, $X_1 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1\,,\,\sigma_1^2\right)$ y $X_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu_2\,,\,\sigma_2^2\right)$ con muestras de tamaños n, n_1 y n_2 respectivamente:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1); \qquad \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\mathfrak{s}^2/n}} \sim t_{n-1}; \qquad \frac{(n-1)\mathfrak{s}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}; \qquad \frac{\mathfrak{s}_1^2/\sigma_1^2}{\mathfrak{s}_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

$$\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\frac{(n_1-1)\mathfrak{s}_1^2+(n_2-1)\mathfrak{s}_2^2}{n_1+n_2-2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2},\ \text{si } \sigma_1^2=\sigma_2^2$$

donde $\mathfrak{s}^2$ denota la *cuasivarianza* muestral $\left(\frac{1}{n-1}\sum(x-\overline{x})^2\right)$.

$$\frac{\widehat{p}-p}{\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}} \sim N(0,1); \qquad \frac{(\widehat{p_1}-\widehat{p_2})-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{(n+m)\widehat{p_{MV}}\,(1-\widehat{p_{MV}})}{n\cdot m}}} \sim N(0,1); \quad \text{donde } \widehat{p_{MV}} = \frac{n\widehat{p_1}+m\widehat{p_2}}{n+m}$$

Cuadro 3: Tablas de la N (0 , 1)

	Probabilidad acumulada desde $-\infty$ hasta z para una normal $N(0,\ 1)$									
Z	x.x0	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0.0	**0.5000**	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	**0.5987**	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	**0.6985**	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	**0.7486**	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	**0.7995**	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	**0.8508**	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	**0.8997**	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	**0.9495**	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	**0.9750**	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	**0.9898**	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Cuadro 4: Tablas de la t de STUDENT

ν	Probabilidad acumulada desde $-\infty$ hasta x para t de STUDENT con ν grados de libertad										
	60.0 %	66.7 %	75.0 %	80.0 %	87.5 %	90.0 %	95.0 %	97.5 %	99.0 %	99.5 %	99.9 %
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.436	0.684	0.856	1.178	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.436	0.684	0.856	1.177	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.435	0.684	0.855	1.176	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.435	0.683	0.855	1.175	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.435	0.683	0.854	1.174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.435	0.683	0.854	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.255	0.434	0.682	0.852	1.170	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.255	0.434	0.681	0.851	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.255	0.434	0.680	0.850	1.165	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.255	0.433	0.679	0.849	1.164	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
55	0.255	0.433	0.679	0.848	1.163	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
60	0.254	0.433	0.679	0.848	1.162	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
∞	0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Cuadro 5: Tablas de la χ^2_ν

ν	Probabilidad acumulada desde 0 hasta x para χ^2_ν										
	0.1 %	0.5 %	1.0 %	2.5 %	5.0 %	10.0 %	12.5 %	20.0 %	25.0 %	33.3 %	50.0 %
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.025	0.064	0.102	0.186	0.455
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.267	0.446	0.575	0.811	1.386
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	0.692	1.005	1.213	1.568	2.366
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.219	1.649	1.923	2.378	3.357
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	1.808	2.343	2.675	3.216	4.351
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	2.441	3.070	3.455	4.074	5.348
7	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.106	3.822	4.255	4.945	6.346
8	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	3.797	4.594	5.071	5.826	7.344
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	4.507	5.380	5.899	6.716	8.343
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	5.234	6.179	6.737	7.612	9.342
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	5.975	6.989	7.584	8.514	10.341
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	6.729	7.807	8.438	9.420	11.340
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	7.493	8.634	9.299	10.331	12.340
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	8.266	9.467	10.165	11.245	13.339
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	9.048	10.307	11.037	12.163	14.339
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	9.837	11.152	11.912	13.083	15.338
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	10.633	12.002	12.792	14.006	16.338
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	11.435	12.857	13.675	14.931	17.338
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	12.242	13.716	14.562	15.859	18.338
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	13.055	14.578	15.452	16.788	19.337
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	13.873	15.445	16.344	17.720	20.337
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	14.695	16.314	17.240	18.653	21.337
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	15.521	17.187	18.137	19.587	22.337
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	16.351	18.062	19.037	20.523	23.337
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	17.184	18.940	19.939	21.461	24.337
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	18.021	19.820	20.843	22.399	25.336
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	18.861	20.703	21.749	23.339	26.336
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	19.704	21.588	22.657	24.280	27.336
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	20.550	22.475	23.567	25.222	28.336
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	21.399	23.364	24.478	26.165	29.336
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	25.678	27.836	29.054	30.894	34.336
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	30.008	32.345	33.660	35.643	39.335
45	21.251	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	34.379	36.884	38.291	40.407	44.335
50	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	38.785	41.449	42.942	45.184	49.335
55	28.173	31.735	33.570	36.398	38.958	42.060	43.220	46.036	47.610	49.972	54.335
60	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	47.680	50.641	52.294	54.770	59.335

Cuadro 6: Tablas de la χ^2_ν

	Probabilidad acumulada desde 0 hasta x para χ^2_ν										
ν	60.0 %	66.7 %	75.0 %	80.0 %	87.5 %	90.0 %	95.0 %	97.5 %	99.0 %	99.5 %	99.9 %
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	6.211	6.867	7.841	8.558	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	7.283	7.992	9.037	9.803	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	8.351	9.107	10.219	11.030	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	9.414	10.215	11.389	12.242	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	10.473	11.317	12.549	13.442	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	11.530	12.414	13.701	14.631	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	12.584	13.506	14.845	15.812	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	13.636	14.595	15.984	16.985	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	14.685	15.680	17.117	18.151	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	15.733	16.761	18.245	19.311	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	16.780	17.840	19.369	20.465	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	17.824	18.917	20.489	21.615	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	18.868	19.991	21.605	22.760	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	19.910	21.063	22.718	23.900	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	20.951	22.133	23.828	25.038	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	21.991	23.201	24.935	26.171	28.559	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	23.031	24.268	26.039	27.301	29.737	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	24.069	25.333	27.141	28.429	30.911	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	25.106	26.397	28.241	29.553	32.081	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	26.143	27.459	29.339	30.675	33.247	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620
26	27.179	28.520	30.435	31.795	34.410	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	28.214	29.580	31.528	32.912	35.570	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	29.249	30.639	32.620	34.027	36.727	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	30.283	31.697	33.711	35.139	37.881	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	31.316	32.754	34.800	36.250	39.033	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703
35	36.475	38.024	40.223	41.778	44.753	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
40	41.622	43.275	45.616	47.269	50.424	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402
45	46.761	48.510	50.985	52.729	56.052	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166	80.077
50	51.892	53.733	56.334	58.164	61.647	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.661
55	57.016	58.945	61.665	63.577	67.211	68.796	73.311	77.380	82.292	85.749	93.168
60	62.135	64.147	66.981	68.972	72.751	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.607

Cuadro 7: Tablas de la F de Fisher-Snedecor

ν_2	q \ ν_1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
		$F_x(x)$ de una F de Fisher-Snedecor con ν_1, ν_2 grados de libertad													
1	0.500	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.04	2.07	2.09	2.12	2.15	2.17	2.20
	0.600	2.63	2.93	3.09	3.20	3.27	3.32	3.36	3.41	3.45	3.48	3.52	3.56	3.59	3.64
	0.667	4.00	4.42	4.64	4.78	4.88	4.95	5.00	5.08	5.13	5.18	5.24	5.29	5.33	5.39
	0.750	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.32	9.41	9.50	9.58	9.67	9.74	9.85
	0.800	12.0	13.1	13.6	14.0	14.3	14.4	14.6	14.8	14.9	15.0	15.2	15.3	15.4	15.6
2	0.500	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.35	1.36	1.38	1.39	1.41	1.42	1.44
	0.600	1.50	1.64	1.72	1.76	1.80	1.82	1.84	1.86	1.88	1.89	1.91	1.92	1.94	1.96
	0.667	2.00	2.15	2.22	2.27	2.30	2.33	2.34	2.37	2.38	2.40	2.42	2.43	2.45	2.47
	0.750	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.38	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.48
	0.800	4.00	4.16	4.24	4.28	4.32	4.34	4.36	4.38	4.40	4.42	4.43	4.45	4.47	4.48
3	0.500	0.88	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.18	1.20	1.21	1.23	1.24	1.25	1.27
	0.600	1.26	1.37	1.43	1.47	1.49	1.51	1.52	1.54	1.55	1.56	1.57	1.58	1.59	1.60
	0.667	1.62	1.72	1.77	1.80	1.82	1.83	1.84	1.86	1.87	1.88	1.89	1.90	1.90	1.91
	0.750	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47
	0.800	2.89	2.94	2.96	2.97	2.97	2.97	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98
4	0.500	0.83	0.94	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.18	1.19
	0.600	1.16	1.26	1.31	1.34	1.36	1.37	1.38	1.40	1.41	1.42	1.43	1.43	1.44	1.45
	0.667	1.46	1.55	1.58	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65	1.65	1.66	1.67	1.67	1.68	1.68
	0.750	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	0.800	2.47	2.48	2.48	2.48	2.47	2.47	2.47	2.46	2.46	2.45	2.44	2.44	2.43	2.43
5	0.500	0.80	0.91	0.96	1.00	1.02	1.04	1.05	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13	1.15
	0.600	1.11	1.20	1.24	1.27	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.34	1.35	1.36	1.37
	0.667	1.38	1.45	1.48	1.50	1.51	1.52	1.53	1.53	1.54	1.54	1.54	1.55	1.55	1.55
	0.750	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.87
	0.800	2.26	2.25	2.24	2.23	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.18	2.17	2.16	2.15	2.13
6	0.500	0.78	0.89	0.94	0.98	1.00	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07	1.08	1.10	1.11	1.12
	0.600	1.07	1.16	1.20	1.22	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.30	1.31	1.31
	0.667	1.33	1.39	1.42	1.44	1.44	1.45	1.45	1.46	1.46	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47
	0.750	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.74
	0.800	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.00	1.98	1.97	1.95
7	0.500	0.77	0.87	0.93	0.96	0.98	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05	1.07	1.08	1.09	1.10
	0.600	1.05	1.13	1.17	1.19	1.21	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25	1.26	1.26	1.27	1.27
	0.667	1.29	1.35	1.38	1.39	1.40	1.40	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.42	1.42	1.42
	0.750	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.68	1.68	1.67	1.66	1.66	1.65
	0.800	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85	1.83
8	0.500	0.76	0.86	0.91	0.95	0.97	0.99	1.00	1.02	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.09
	0.600	1.03	1.11	1.15	1.17	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25
	0.667	1.26	1.32	1.35	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37	1.37	1.38	1.38	1.38	1.37	1.37
	0.750	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58
	0.800	1.98	1.95	1.92	1.90	1.88	1.87	1.86	1.84	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.74

ν_2	q \ ν_1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
		$F_x(x)$ de una F de Fisher-Snedecor con ν_1, ν_2 grados de libertad													
9	0.500	0.75	0.85	0.91	0.94	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.08
	0.600	1.02	1.10	1.13	1.15	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22
	0.667	1.24	1.30	1.32	1.33	1.34	1.34	1.34	1.34	1.35	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34
	0.750	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53
	0.800	1.93	1.90	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.75	1.73	1.71	1.70	1.67
10	0.500	0.74	0.85	0.90	0.93	0.95	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07
	0.600	1.01	1.08	1.12	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.21
	0.667	1.23	1.28	1.30	1.31	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.31
	0.750	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.48
	0.800	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.62
11	0.500	0.74	0.84	0.89	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
	0.600	1.00	1.07	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19
	0.667	1.22	1.27	1.29	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.29
	0.750	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.45
	0.800	1.87	1.83	1.80	1.77	1.75	1.73	1.72	1.69	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.57
12	0.500	0.73	0.84	0.89	0.92	0.94	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.06
	0.600	0.99	1.07	1.10	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.17	1.17	1.17	1.18	1.18
	0.667	1.21	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27
	0.750	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42
	0.800	1.85	1.80	1.77	1.74	1.72	1.70	1.69	1.66	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.54
13	0.500	0.73	0.83	0.88	0.92	0.94	0.96	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
	0.600	0.98	1.06	1.09	1.11	1.13	1.13	1.14	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17
	0.667	1.20	1.25	1.26	1.27	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.27	1.27	1.27	1.26
	0.750	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40
	0.800	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.54	1.51
14	0.500	0.73	0.83	0.88	0.91	0.94	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05
	0.600	0.98	1.05	1.09	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16
	0.667	1.19	1.24	1.26	1.26	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.26	1.26	1.26	1.25	1.24
	0.750	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38
	0.800	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.53	1.51	1.48
15	0.500	0.73	0.83	0.88	0.91	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05
	0.600	0.97	1.05	1.08	1.10	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.15	1.15
	0.667	1.18	1.23	1.25	1.25	1.26	1.26	1.26	1.26	1.26	1.25	1.25	1.25	1.24	1.23
	0.750	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38	1.36
	0.800	1.80	1.75	1.71	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.54	1.51	1.49	1.46
16	0.500	0.72	0.82	0.88	0.91	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
	0.600	0.97	1.04	1.08	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14
	0.667	1.18	1.22	1.24	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.24	1.24	1.23	1.22
	0.750	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.34
	0.800	1.78	1.74	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.56	1.54	1.52	1.49	1.47	1.43
17	0.500	0.72	0.82	0.87	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04
	0.600	0.97	1.04	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14
	0.667	1.17	1.22	1.23	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.23	1.23	1.22	1.21
	0.750	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.33
	0.800	1.77	1.72	1.68	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.46	1.42

Cuadro 8: Tablas de la F de Fisher-Snedecor

ν_2	q \ ν_1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
		$F_x(x)$ de una F de Fisher-Snedecor con ν_1, ν_2 grados de libertad													
18	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.93	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.02	1.02	1.04
	0.600	0.96	1.04	1.07	1.09	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13
	0.667	1.17	1.21	1.23	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.21
	0.750	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32
	0.800	1.76	1.71	1.67	1.64	1.62	1.60	1.58	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.40
19	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.04
	0.600	0.96	1.03	1.07	1.09	1.10	1.10	1.11	1.12	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.13
	0.667	1.16	1.21	1.22	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.21	1.20
	0.750	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.33	1.30
	0.800	1.75	1.70	1.66	1.63	1.61	1.58	1.57	1.54	1.52	1.50	1.48	1.45	1.43	1.39
20	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.21	1.22	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.22	1.21	1.20	1.19
	0.750	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.32	1.29
	0.800	1.75	1.70	1.65	1.62	1.60	1.58	1.56	1.53	1.51	1.49	1.47	1.44	1.41	1.37
21	0.500	0.72	0.81	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.20	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.20	1.20	1.19
	0.750	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.28
	0.800	1.74	1.69	1.65	1.61	1.59	1.57	1.55	1.52	1.50	1.48	1.46	1.43	1.40	1.36
22	0.500	0.72	0.81	0.87	0.90	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.21	1.21	1.20	1.19	1.18
	0.750	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.32	1.31	1.28
	0.800	1.73	1.68	1.64	1.61	1.58	1.56	1.54	1.51	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.35
23	0.500	0.71	0.81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.06	1.07	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.21	1.21	1.20	1.19	1.19	1.17
	0.750	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.27
	0.800	1.73	1.68	1.63	1.60	1.57	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.41	1.38	1.34
24	0.500	0.71	0.81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.19	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.19	1.18	1.17
	0.750	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	1.26
	0.800	1.72	1.67	1.63	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.46	1.43	1.40	1.38	1.33
25	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.19	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.16
	0.750	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.29	1.25
	0.800	1.72	1.66	1.62	1.59	1.56	1.54	1.52	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.37	1.32
26	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.10
	0.667	1.15	1.19	1.20	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.20	1.19	1.18	1.18	1.16
	0.750	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.28	1.25
	0.800	1.71	1.66	1.62	1.58	1.56	1.53	1.52	1.49	1.47	1.44	1.42	1.39	1.36	1.31

ν_2	q \ ν_1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
		$F_x(x)$ de una F de Fisher-Snedecor con ν_1, ν_2 grados de libertad													
27	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.ga	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.08	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.19	1.20	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.16
	0.750	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.30	1.28	1.24
	0.800	1.71	1.66	1.61	1.58	1.55	1.53	1.51	1.48	1.46	1.44	1.41	1.3a	1.35	1.30
28	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.18	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.15
	0.750	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.33	1.31	1.29	1.27	1.24
	0.800	1.71	1.65	1.61	1.57	1.55	1.52	1.51	1.48	1.46	1.43	1.41	1.37	1.35	1.30
29	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.06	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.18	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.17	1.15
	0.750	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.29	1.27	1.23
	0.800	1.70	1.65	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.47	1.45	1.43	1.40	1.37	1.34	1.29
30	0.500	0.71	0.al	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.94	1.01	1.05	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.09
	0.667	1.14	1.18	1.19	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.19	1.18	1.17	1.16	1.15
	0.750	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.28	1.26	1.23
	0.800	1.70	1.64	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.47	1.45	1.42	1.39	1.36	1.34	1.28
60	0.500	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01
	0.600	0.93	1.00	1.03	1.04	1.05	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.06
	0.667	1.12	1.16	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.12	1.10
	0.750	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.30	1.29	1.27	1.25	1.22	1.20	1.15
	0.800	1.65	1.59	1.55	1.51	1.48	1.46	1.44	1.41	1.38	1.35	1.32	1.29	1.25	1.18
80	0.500	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.91	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01
	0.600	0.93	0.99	1.02	1.04	1.05	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.06	1.06	1.05
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.17	1.17	1.16	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.12	1.11	1.08
	0.750	1.41	1.40	1.38	1.36	1.34	1.32	1.31	1.29	1.27	1.26	1.23	1.21	1.18	1.12
	0.800	1.64	1.58	1.53	1.50	1.47	1.44	1.42	1.39	1.37	1.34	1.31	1.27	1.23	1.16
100	0.500	0.70	0.79	0.84	0.88	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01
	0.600	0.92	0.99	1.02	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.04
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.15	1.15	1.14	1.13	1.12	1.10	1.07
	0.750	1.41	1.39	1.37	1.35	1.33	1.32	1.30	1.28	1.27	1.25	1.23	1.20	1.17	1.11
	0.800	1.64	1.58	1.53	1.49	1.46	1.43	1.41	1.38	1.36	1.33	1.30	1.26	1.22	1.14
120	0.500	0.70	0.79	0.84	0.88	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01
	0.600	0.92	0.99	1.02	1.04	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.05	1.04
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.15	1.15	1.14	1.13	1.13	1.11	1.10	1.06
	0.750	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.24	1.22	1.19	1.16	1.10
	0.800	1.63	1.57	1.52	1.48	1.45	1.43	1.41	1.37	1.35	1.32	1.29	1.25	1.21	1.12
∞	0.500	0.69	0.79	0.84	0.87	0.89	0.91	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00
	0.600	0.92	0.98	1.01	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05	1.04	1.04	1.00
	0.667	1.10	1.13	1.14	1.15	1.14	1.14	1.14	1.13	1.13	1.12	1.11	1.09	1.07	1.00
	0.750	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.25	1.24	1.22	1.19	1.16	1.13	1.00
	0.800	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.40	1.38	1.34	1.32	1.29	1.25	1.21	1.16	1.00

Cuadro 9: Tablas de la F de Fisher-Snedecor

ν_2	ν_1 / q	$F_x(x)$ de una F de Fisher-Snedecor con ν_1, ν_2 grados de libertad 2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
1	0.900	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	59.1	59.7	60.5	61.0	61.5	62.0	62.6	63.0	63.3
	0.950	199.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	242.	244.	246.	248.	250.	252.	254.
	0.975	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	969.	977.	985.	993.			
	0.990														
	0.999														
2	0.900	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.39	9.41	9.43	9.44	9.46	9.47	9.49
	0.950	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
	0.975	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5
	0.990	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.	99.5
	0.999	999.	999.												
3	0.900	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.13
	0.950	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.58	8.53
	0.975	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.0	13.9
	0.990	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.4	26.1
	0.999	149.	141.	137.	135.	133.	132.	131.	129.	128.	127.	126.	125.	125.	123.
4	0.900	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.92	3.90	3.87	3.84	3.82	3.79	3.76
	0.950	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.70	5.63
	0.975	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.84	8.75	8.66	8.56	8.46	8.38	8.26
	0.990	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.5	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.5
	0.999	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.0	47.4	46.8	46.1	45.4	44.9	44.1
5	0.900	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.30	3.27	3.24	3.21	3.17	3.15	3.10
	0.950	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.44	4.36
	0.975	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.62	6.52	6.43	6.33	6.23	6.14	6.02
	0.990	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.24	9.02
	0.999	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	26.9	26.4	25.9	25.4	24.9	24.4	23.8
6	0.900	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.94	2.90	2.87	2.84	2.80	2.77	2.72
	0.950	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.75	3.67
	0.975	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.46	5.37	5.27	5.17	5.07	4.98	4.85
	0.990	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.87	7.72	7.56	7.40	7.23	7.09	6.88
	0.999	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.4	18.0	17.6	17.1	16.7	16.3	15.7
7	0.900	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.70	2.67	2.63	2.59	2.56	2.52	2.47
	0.950	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.32	3.23
	0.975	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.76	4.67	4.57	4.47	4.36	4.28	4.14
	0.990	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.86	5.65
	0.999	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.1	13.7	13.3	12.9	12.5	12.2	11.7
8	0.900	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.54	2.50	2.46	2.42	2.38	2.35	2.29
	0.950	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.02	2.93
	0.975	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.29	4.20	4.10	4.00	3.89	3.81	3.67
	0.990	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.07	4.86
	0.999	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.5	11.2	10.8	10.5	10.1	9.80	9.33

ν_2	ν_1 / q	$F_x(x)$ de una F de Fisher-Snedecor con ν_1, ν_2 grados de libertad 2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
9	0.900	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.22	2.16
	0.950	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.80	2.71
	0.975	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	3.96	3.87	3.77	3.67	3.56	3.47	3.33
	0.990	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.52	4.31
	0.999	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	9.89	9.57	9.24	8.90	8.55	8.26	7.81
10	0.900	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.16	2.12	2.06
	0.950	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.98	2.91	2.84	2.77	2.70	2.64	2.54
	0.975	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.72	3.62	3.52	3.42	3.31	3.22	3.08
	0.990	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.11	3.91
	0.999	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.75	8.45	8.13	7.80	7.47	7.19	6.76
11	0.900	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.25	2.21	2.17	2.12	2.08	2.04	1.97
	0.950	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.85	2.79	2.72	2.65	2.57	2.51	2.40
	0.975	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.53	3.43	3.33	3.23	3.12	3.03	2.88
	0.990	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.54	4.40	4.25	4.10	3.94	3.81	3.60
	0.999	13.8	11.6	10.3	9.58	9.05	8.66	8.35	7.92	7.63	7.32	7.01	6.68	6.42	6.00
12	0.900	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.97	1.90
	0.950	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.40	2.30
	0.975	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.37	3.28	3.18	3.07	2.96	2.87	2.72
	0.990	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.30	4.16	4.01	3.86	3.70	3.57	3.36
	0.999	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.29	7.00	6.71	6.40	6.09	5.83	5.42
13	0.900	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.14	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.85
	0.950	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.67	2.60	2.53	2.46	2.38	2.31	2.21
	0.975	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.25	3.15	3.05	2.95	2.84	2.74	2.60
	0.990	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.10	3.96	3.82	3.66	3.51	3.37	3.17
	0.999	12.3	10.2	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.80	6.52	6.23	5.93	5.63	5.37	4.97
14	0.900	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.10	2.05	2.01	1.96	1.91	1.87	1.80
	0.950	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.60	2.53	2.46	2.39	2.31	2.24	2.13
	0.975	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.64	2.49
	0.990	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.35	3.22	3.00
	0.999	11.8	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.40	6.13	5.85	5.56	5.25	5.00	4.60
15	0.900	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.06	2.02	1.97	1.92	1.87	1.83	1.76
	0.950	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.18	2.07
	0.975	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.06	2.96	2.86	2.76	2.64	2.55	2.40
	0.990	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.80	3.67	3.52	3.37	3.21	3.08	2.87
	0.999	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.08	5.81	5.53	5.25	4.95	4.70	4.31
16	0.900	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.03	1.99	1.94	1.89	1.84	1.79	1.72
	0.950	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.49	2.42	2.35	2.28	2.19	2.12	2.01
	0.975	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	2.99	2.89	2.79	2.68	2.57	2.47	2.32
	0.990	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.69	3.55	3.41	3.26	3.10	2.97	2.75
	0.999	11.0	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.81	5.55	5.27	4.99	4.70	4.45	4.06
17	0.900	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.69
	0.950	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.45	2.38	2.31	2.23	2.15	2.08	1.96
	0.975	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.92	2.82	2.72	2.62	2.50	2.41	2.25
	0.990	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.59	3.46	3.31	3.16	3.00	2.87	2.65
	0.999	10.7	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.58	5.32	5.05	4.77	4.48	4.24	3.85

Cuadro 10: Tablas de la F de Fisher-Snedecor

$F_x(x)$ de una F de Fisher-Snedecor con ν_1, ν_2 grados de libertad

ν_2	ν_1 / q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
18	0.900	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	1.98	1.93	1.89	1.84	1.78	1.74	1.66
	0.950	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.41	2.34	2.27	2.19	2.11	2.04	1.92
	0.975	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.87	2.77	2.67	2.56	2.44	2.35	2.19
	0.990	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.51	3.37	3.23	3.08	2.92	2.78	2.57
	0.999	10.4	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.39	5.13	4.87	4.59	4.30	4.06	3.67
19	0.900	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.71	1.63
	0.950	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.38	2.31	2.23	2.16	2.07	2.00	1.88
	0.975	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.82	2.72	2.62	2.51	2.39	2.30	2.13
	0.990	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.43	3.30	3.15	3.00	2.84	2.71	2.49
	0.999	10.2	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.22	4.97	4.70	4.43	4.14	3.90	3.51
20	0.900	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.94	1.89	1.84	1.79	1.74	1.69	1.61
	0.950	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.97	1.84
	0.975	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.77	2.68	2.57	2.46	2.35	2.25	2.09
	0.990	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.37	3.23	3.09	2.94	2.78	2.64	2.42
	0.999	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.08	4.82	4.56	4.29	4.00	3.76	3.38
21	0.900	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.92	1.87	1.83	1.78	1.72	1.67	1.59
	0.950	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.32	2.25	2.18	2.10	2.01	1.94	1.81
	0.975	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.73	2.64	2.53	2.42	2.31	2.21	2.04
	0.990	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.31	3.17	3.03	2.88	2.72	2.58	2.36
	0.999	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	4.95	4.70	4.44	4.17	3.88	3.64	3.26
22	0.900	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.90	1.86	1.81	1.76	1.70	1.65	1.57
	0.950	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.30	2.23	2.15	2.07	1.98	1.91	1.78
	0.975	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.70	2.60	2.50	2.39	2.27	2.17	2.00
	0.990	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.26	3.12	2.98	2.83	2.67	2.53	2.31
	0.999	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.83	4.58	4.33	4.06	3.78	3.54	3.15
23	0.900	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.69	1.64	1.55
	0.950	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.27	2.20	2.13	2.05	1.96	1.88	1.76
	0.975	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.67	2.57	2.47	2.36	2.24	2.14	1.97
	0.990	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.21	3.07	2.93	2.78	2.62	2.48	2.26
	0.999	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.73	4.48	4.23	3.96	3.68	3.44	3.05
24	0.900	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.88	1.83	1.78	1.73	1.67	1.62	1.53
	0.950	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.25	2.18	2.11	2.03	1.94	1.86	1.73
	0.975	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.64	2.54	2.44	2.33	2.21	2.11	1.94
	0.990	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.17	3.03	2.89	2.74	2.58	2.44	2.21
	0.999	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.64	4.39	4.14	3.87	3.59	3.36	2.97
25	0.900	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.87	1.82	1.77	1.72	1.66	1.61	1.52
	0.950	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.24	2.16	2.09	2.01	1.92	1.84	1.71
	0.975	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.61	2.51	2.41	2.30	2.18	2.08	1.91
	0.990	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.13	2.99	2.85	2.70	2.54	2.40	2.17
	0.999	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.56	4.31	4.06	3.79	3.52	3.28	2.89
26	0.900	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.86	1.81	1.76	1.71	1.65	1.59	1.50
	0.950	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.22	2.15	2.07	1.99	1.90	1.82	1.69
	0.975	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.59	2.49	2.39	2.28	2.16	2.05	1.88
	0.990	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.09	2.96	2.81	2.66	2.50	2.36	2.13
	0.999	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.48	4.24	3.99	3.72	3.44	3.21	2.82

$F_x(x)$ de una F de Fisher-Snedecor con ν_1, ν_2 grados de libertad

ν_2	ν_1 / q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
27	0.900	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.85	1.80	1.75	1.70	1.64	1.58	1.49
	0.950	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.20	2.13	2.06	1.97	1.88	1.81	1.67
	0.975	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.57	2.47	2.36	2.25	2.13	2.03	1.85
	0.990	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.06	2.93	2.78	2.63	2.47	2.33	2.10
	0.999	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.41	4.17	3.92	3.66	3.38	3.14	2.75
28	0.900	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.63	1.57	1.48
	0.950	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.19	2.12	2.04	1.96	1.87	1.79	1.65
	0.975	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.55	2.45	2.34	2.23	2.11	2.01	1.83
	0.990	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.03	2.90	2.75	2.60	2.44	2.30	2.06
	0.999	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.35	4.11	3.86	3.60	3.32	3.09	2.69
29	0.900	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.83	1.78	1.73	1.68	1.62	1.56	1.47
	0.950	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.18	2.10	2.03	1.94	1.85	1.77	1.64
	0.975	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.53	2.43	2.32	2.21	2.09	1.99	1.81
	0.990	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.00	2.87	2.73	2.57	2.41	2.27	2.03
	0.999	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.29	4.05	3.80	3.54	3.27	3.03	2.64
30	0.900	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.82	1.77	1.72	1.67	1.61	1.55	1.46
	0.950	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.16	2.09	2.01	1.93	1.84	1.76	1.62
	0.975	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.51	2.41	2.31	2.20	2.07	1.97	1.79
	0.990	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.98	2.84	2.70	2.55	2.39	2.25	2.01
	0.999	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.24	4.00	3.75	3.49	3.22	2.98	2.59
60	0.900	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.71	1.66	1.60	1.54	1.48	1.41	1.29
	0.950	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.56	1.39
	0.975	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.27	2.17	2.06	1.94	1.82	1.70	1.48
	0.990	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.63	2.50	2.35	2.20	2.03	1.88	1.60
	0.999	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.54	3.32	3.08	2.83	2.55	2.32	1.89
80	0.900	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.44	1.38	1.24
	0.950	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	1.95	1.88	1.79	1.70	1.60	1.51	1.32
	0.975	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.21	2.11	2.00	1.88	1.75	1.63	1.40
	0.990	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.55	2.42	2.27	2.12	1.94	1.79	1.49
	0.999	7.54	5.97	5.12	4.58	4.20	3.92	3.70	3.39	3.16	2.93	2.68	2.41	2.16	1.72
100	0.900	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.66	1.61	1.56	1.49	1.42	1.35	1.21
	0.950	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.93	1.85	1.77	1.68	1.57	1.48	1.28
	0.975	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.18	2.08	1.97	1.85	1.71	1.59	1.35
	0.990	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.50	2.37	2.22	2.07	1.89	1.74	1.43
	0.999	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61	3.30	3.07	2.84	2.59	2.32	2.08	1.62
120	0.900	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.65	1.60	1.54	1.48	1.41	1.34	1.19
	0.950	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.91	1.83	1.75	1.66	1.55	1.46	1.25
	0.975	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.16	2.05	1.94	1.82	1.69	1.56	1.31
	0.990	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.47	2.34	2.19	2.03	1.86	1.70	1.38
	0.999	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.24	3.02	2.78	2.53	2.26	2.02	1.54
∞	0.900	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.60	1.55	1.49	1.42	1.34	1.26	1.00
	0.950	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.35	1.00
	0.975	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.05	1.94	1.83	1.71	1.57	1.43	1.00
	0.990	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.32	2.18	2.04	1.88	1.70	1.52	1.00
	0.999	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	2.96	2.74	2.51	2.27	1.99	1.73	1.00

$F_x(x)$ de una Poisson(λ)

x \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407	0.368
1	0.995	0.982	0.963	0.938	0.910	0.878	0.844	0.809	0.772	0.736
2	1.000	0.999	0.996	0.992	0.986	0.977	0.966	0.953	0.937	0.920
3	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.987	0.981
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

x \ λ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.333	0.301	0.273	0.247	0.223	0.202	0.183	0.165	0.150	0.135
1	0.699	0.663	0.627	0.592	0.558	0.525	0.493	0.463	0.434	0.406
2	0.900	0.879	0.857	0.833	0.809	0.783	0.757	0.731	0.704	0.677
3	0.974	0.966	0.957	0.946	0.934	0.921	0.907	0.891	0.875	0.857
4	0.995	0.992	0.989	0.986	0.981	0.976	0.970	0.964	0.956	0.947
5	0.999	0.998	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992	0.990	0.987	0.983
6	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.997	0.995
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

x \ λ	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0	0.111	0.091	0.074	0.061	0.050	0.041	0.033	0.027	0.022	0.018
1	0.355	0.308	0.267	0.231	0.199	0.171	0.147	0.126	0.107	0.092
2	0.623	0.570	0.518	0.469	0.423	0.380	0.340	0.303	0.269	0.238
3	0.819	0.779	0.736	0.692	0.647	0.603	0.558	0.515	0.473	0.433
4	0.928	0.904	0.877	0.848	0.815	0.781	0.744	0.706	0.668	0.629
5	0.975	0.964	0.951	0.935	0.916	0.895	0.871	0.844	0.816	0.785
6	0.993	0.988	0.983	0.976	0.966	0.955	0.942	0.927	0.909	0.889
7	0.998	0.997	0.995	0.992	0.988	0.983	0.977	0.969	0.960	0.949
8	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996	0.994	0.992	0.988	0.984	0.979
9	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Cuadro 11: Tablas de la Poisson(λ)

$F_x(x)$ de una Poisson(λ)

x \ λ	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
0	0.015	0.012	0.010	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002
1	0.078	0.066	0.056	0.048	0.040	0.034	0.029	0.024	0.021	0.017
2	0.210	0.185	0.163	0.143	0.125	0.109	0.095	0.082	0.072	0.062
3	0.395	0.359	0.326	0.294	0.265	0.238	0.213	0.191	0.170	0.151
4	0.590	0.551	0.513	0.476	0.440	0.406	0.373	0.342	0.313	0.285
5	0.753	0.720	0.686	0.651	0.616	0.581	0.546	0.512	0.478	0.446
6	0.867	0.844	0.818	0.791	0.762	0.732	0.702	0.670	0.638	0.606
7	0.936	0.921	0.905	0.887	0.867	0.845	0.822	0.797	0.771	0.744
8	0.972	0.964	0.955	0.944	0.932	0.918	0.903	0.886	0.867	0.847
9	0.989	0.985	0.980	0.975	0.968	0.960	0.951	0.941	0.929	0.916
10	0.996	0.994	0.992	0.990	0.986	0.982	0.977	0.972	0.965	0.957
11	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.990	0.988	0.984	0.980
12	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.991
13	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

x \ λ	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0
0	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0.043	0.030	0.020	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001
3	0.112	0.082	0.059	0.042	0.030	0.021	0.015	0.010	0.007	0.005
4	0.224	0.173	0.132	0.100	0.074	0.055	0.040	0.029	0.021	0.015
5	0.369	0.301	0.241	0.191	0.150	0.116	0.089	0.067	0.050	0.038
6	0.527	0.450	0.378	0.313	0.256	0.207	0.165	0.130	0.102	0.079
7	0.673	0.599	0.525	0.453	0.386	0.324	0.269	0.220	0.179	0.143
8	0.792	0.729	0.662	0.593	0.523	0.456	0.392	0.333	0.279	0.232
9	0.877	0.830	0.776	0.717	0.653	0.587	0.522	0.458	0.397	0.341
10	0.933	0.901	0.862	0.816	0.763	0.706	0.645	0.583	0.521	0.460
11	0.966	0.947	0.921	0.888	0.849	0.803	0.752	0.697	0.639	0.579
12	0.984	0.973	0.957	0.936	0.909	0.876	0.836	0.792	0.742	0.689
13	0.993	0.987	0.978	0.966	0.949	0.926	0.898	0.864	0.825	0.781
14	0.997	0.994	0.990	0.983	0.973	0.959	0.940	0.917	0.888	0.854
15	0.999	0.998	0.995	0.992	0.986	0.978	0.967	0.951	0.932	0.907
16	1.000	0.999	0.998	0.996	0.993	0.989	0.982	0.973	0.960	0.944
17	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995	0.991	0.986	0.978	0.968
18	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996	0.993	0.988	0.982
19	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Cuadro 12: Tablas de la Poisson(λ)

Partes del temario

- Tema 1 IntEctr-T01
- Tema 2 IntEctr-T02
- Tema 3 IntEctr-T03
- Tema 4 IntEctr-T04
- Tema 5 IntEctr-T05
- Tema 6 IntEctr-T06
- Tema 7 IntEctr-T07

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Falso: El test de hipótesis sólo puede indicar que con los datos observados no rechazamos la hipótesis nula H_0 con una probabilidad β, es decir, asumiendo el riesgo de que, con probabilidad β, no rechacemos H_0 aún siendo falsa (error tipo II).

Ejercicio 1

Ejercicio 2. La probabilidad de cometer el error tipo I es P_{H_0} (rechazar) $=P_{H_0}(X = 1,\ 2,\ 3,\ \text{o } 6)$

$$P_{H_0}(X = 4 \text{ o } 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de cometer el error tipo II es P_{H_1} (no rechazar)

$$P_{H_1}(X = 1,\ 2,\ 3,\ \text{o } 6) = \frac{2}{15} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{19}{30}$$

Ejercicio 2

Ejercicio 4(a) Bajo H_0: $f_X(x) = 1$, entonces

$$\begin{aligned} 0.05 = \alpha = W(1) = &\ P_{H_0}(X \geq k_\alpha) = \textstyle\int_{k_\alpha}^{1} 1dx \\ = &\ x\Big]_{k_\alpha}^{1} = 1 - k_\alpha = 0.05 \Rightarrow \boxed{k_\alpha = 0.95} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 4(b) Bajo H_1: $f_X(x) = \frac{1}{a}$, entonces

$$W(a) = P(X \geq 0.95) = \int_{0.95}^{a} \frac{1}{a} dx = \left[\frac{1}{a} x\right]_{0.95}^{a} = 1 - \frac{1}{a} 0.95$$

Que tiende a uno cuando a tiende a infinito.

□

Ejercicio 6.

$$\textbf{Test 1:} P_{H_0}(\text{rechazar}) = \int_{0.987}^{1} 2x\, dx = 0.0258$$

$$\textbf{Test 2:} P_{H_0}(\text{rechazar}) = \int_{0}^{0.158} 2x\, dx = 0.0249$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7.

$$\textbf{Test 1:}\ W(a) = P(\text{rechazar}) = \frac{1}{a^2} \int_{0.987}^{a} 2x\, dx = 1 - \left(\frac{0.987}{a}\right)^2$$

$$\textbf{Test 2:}\ W(a) = P(\text{rechazar}) = \frac{1}{a^2} \int_{0}^{0.158} 2x\, dx = \frac{0.158^2}{a^2}$$

Ejercicio 7

Ejercicio 8(a)

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{H_0}(g(\boldsymbol{X}) > k_\alpha) = 1 - P_{H_0}(g(\boldsymbol{X}) \leq k_\alpha) \\ &= 1 - F_{g(\boldsymbol{X})}(k_\alpha)\big|_{\lambda=1} = 1 - F_{\mathcal{P}(n\lambda)}(k_\alpha)\big|_{\lambda=1} = 1 - F_{\mathcal{P}(n)}(k_\alpha) \end{aligned}$$

Por tanto k_α debe ser aquel valor tal que $F_{\mathcal{P}(n)}(k_\alpha) = 1 - \alpha$.

□

Ejercicio 8(b)

$$W(2) = P_{H_1}\left(\sum X_i > k_\alpha\right) = 1 - F_{\mathcal{P}(2n)}(k_\alpha)$$

□

Ejercicio 9(a)

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{H_0}\left(\textstyle\sum X_i \geq 5\right) \\ &= 1 - P_{H_0}(g(\boldsymbol{X}) \leq 4) \\ &= 1 - F_{\mathcal{P}(8)}(4) = 1 - 0.0996 = 0.9004 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 9(b) $\alpha \leq 0.05$?

$$0.05 = 1 - P_{H_0}\left(g(\boldsymbol{X}) \leq 4\right)$$

es decir, buscamos un valor de n tal que $F_{\mathcal{P}(n)}(4) = 0.95$. Dicho valor es $n = 2$

□

Ejercicio 9(c)

$$W(\lambda) = P\left(\sum X_i \geq 5\right) = 1 - F_{\mathcal{P}(8\lambda)}(4)$$

- Si $\lambda = 1$ (ya lo hemos calculado antes) $W(1) = 0.9004$
- Si $\lambda = 2$

$$W(2) = 1 - F_{\mathcal{P}(16)}(4) = 0.992$$

- Si $\lambda = 5$, entonces $\sum X_i \sim \mathcal{P}(40)$ que no aparece en las tablas, pero ... (TCL)

$$\frac{(\sum X_i)/n - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

y por tanto

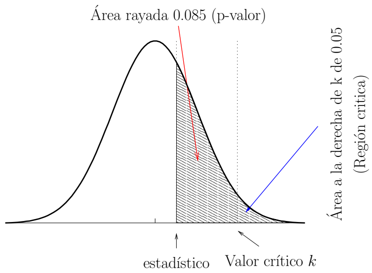
$$\begin{aligned} W(5) &= 1 - P\left(\frac{(\sum X_i)/8 - 5}{\sqrt{5/8}} \leq \frac{4/8-5}{\sqrt{5/8}}\right) \\ &\simeq 1 - P\left(Z \leq -5.692\right) = 0.9999 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 10. Verdadero: la región crítica asociada al nivel de significación del 10 % contiene a la del 5 %; por lo tanto si se ha "caído" en la región del 5 %, entonces también se ha "caído" en la del 10 %.

Ejercicio 10

Ejercicio 11. La afirmación es falsa. Un p-valor igual a 0.085 significa que la probabilidad, calculada bajo H_0, de obtener un valor numérico que aporte más evidencia en contra de H_0, que la aportada por el estadístico que hemos obtenido es del 8.5 %; es decir, el area que queda a la derecha del estadístico es de 0.085 (mayor por tanto al área de la región critica, de solo 0.05). Por tanto, el estadístico empleado fuera de la región crítica (a la izquierda de k en el dibujo).



Ejercicio 11

Ejercicio 13. NO. Que ambos contrastes posean idénticos niveles de significación significa que en ambos existe la misma probabilidad de cometer el error tipo I (rechazar H_0 siendo cierta). Pero la probabilidad de cometer el error tipo II puede diferir. De entre ambos, preferiremos el contraste más potente (el que tenga mayor probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa).

Ejercicio 13

Ejercicio 14(a) RC:

$$\begin{aligned} 0.05 = \alpha = \quad & P_{H_0}\left(X \leq k_\alpha\right) = \int_0^{k_\alpha} \tfrac{1}{a} dx \\ = \quad & x\Big]_0^{k_\alpha} = k_\alpha = 0.05 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 14(b)

$$W(a) = P\left(X \leq 0.05\right) = \int_0^{0.05} \frac{1}{a} dx = \left[\frac{1}{a}x\right]_0^{0.05} = \frac{0.05}{a}$$

Que tiende a cero cuando a tiende a infinito.

□

Ejercicio 15(a) H_0: $\mu = 30$; $\qquad H_1$: $\mu = 40$; $\qquad RC = \{\boldsymbol{x}$ tales que: $\overline{x} \geq 35\}$

□

Ejercicio 15(b) Por definición $\alpha = P_{H_0}(\overline{x} \geq 35)$ bajo H_0 ($\mu = 30$); y puesto que $X \sim \mathrm{N}(\mu, 100)$, su media muestral también se distribuye $\mathrm{N}(\,,\,)$ con esperanza μ y varianza 100/25; así pues, bajo H_0

$$\alpha = P_{H_0}(\overline{x} \geq 35) = P\left(\frac{\overline{x} - 30}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{35 - 30}{\sqrt{100/25}}\right) = P(Z \geq 2.5) = \boxed{0.0062}$$

□

Ejercicio 15(c) La potencia es $W(40) = P_{H_1}(\overline{x} \geq 35)$ bajo H_1 ($\mu = 40$);

$$W(40) = P_{H_1}(\overline{x} \geq 35) = P\left(\frac{\overline{x} - 40}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{35 - 40}{\sqrt{100/25}}\right) = P(Z \geq -2.5) = \boxed{0.9938}$$

□

Ejercicio 15(d) Ahora buscamos un k tal que $P_{H_0}(\overline{x} \geq k) = 0.01$ bajo H_0 ($\mu = 30$); por tanto

$$P_{H_0}(\overline{x} \geq k) = P\left(\frac{\overline{x} - 30}{\sqrt{100/25}} \geq \frac{k - 30}{\sqrt{100/25}}\right) = P\left(Z \geq \frac{k - 30}{\sqrt{100/25}}\right)$$

pero dicha probabilidad debe ser igual a 0.01, así que $\frac{k-30}{\sqrt{100/25}} = 2.32$, es decir $k = 34.64$, y la región crítica buscada es

$$RC = \{\boldsymbol{x} \text{ tales que } \overline{x} \geq 34.64\}$$

□

Ejercicio 15(e) Puesto que la media es mayor que 34.64, la muestra pertenece a la región crítica RC y, por tanto, se rechaza H_0 con un nivel de significación del 1 %.

□

Ejercicio 16. La I) con la B); la II) con la A); la III) con la C).

Ejercicio 16

Ejercicio 17(a) Primero necesito conocer la distribución de los estadísticos:

El primero es la media muestral, de la que sabemos que

$$\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

donde $\sigma = \sqrt{2}$, y $n = 20$.

El segundo también es una media; la única diferencia es que $n = 2$.

Por tanto, buscamos por una parte k_1 tal que

$$P_{H_0}\left(\frac{\widehat{\overline{x}} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} > \frac{k_1 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}}\right) = 0.05.$$

Es decir, $P\left(Z > \frac{k_1}{0.316}\right) = 0.05$, donde $Z \sim N(0, 1)$ por lo que $\frac{k_1}{0.3162} = 1.64$ y $k_1 = 0.5186$

Por otra parte buscamos k_2 tal que

$$P_{H_0}\left(\frac{\widehat{\widehat{\overline{x}}} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}} > \frac{k_2 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}}\right) = 0.05$$

ya que por H_0 $\mu = 0$. Es decir, $P\left(Z > \frac{k_2}{1}\right) = 0.05$ ó $k_2 = 1.64$

Estos valores para k_1 y k_2 garantizan que ambos contrastes tienen una probabilidad del 5 % de cometer el error tipo I (rechazar H_0 cuando ésta es cierta). Pero no sabemos cual es la probabilidad de cometer el error tipo II. Por lo que no podemos saber todavía que contraste es más adecuado.

□

Ejercicio 17(b) Buscamos la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_1 es cierta, es decir

$$P_{H_1}\left(\frac{\widehat{\overline{x}} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} > \frac{0.5186 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}}\right).$$

Es decir, $P\left(Z > \frac{0.5186 - 0.5}{0.316}\right) = P(Z > 0.05886)$ que es igual a $1 - P(Z < 0.05886) = 1 - 0.5199 = 0.48$

Por otra parte, la potencia del segundo contraste es

$$P_{H_1}\left(\frac{\widehat{\overline{x}}-\mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}} > \frac{1.64-\mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}}\right)$$

Es decir, $P\left(Z > \frac{1.64-.5}{1}\right) = P(Z > 1.14)$ que es igual a $1 - P(Z < 1.14) = 1 - 0.8729 = 0.1271$

El primer contraste es mucho mejor que el segundo, ya que teniendo ambos el mismo nivel crítico, el primer contraste es más potente (menor probabilidad de cometer el error tipo II).

□

Ejercicio 17(c) Al incrementar el tamaño muestral, el segundo contraste no se ve afectado; veamos que pasa con el primero.

Necesitamos encontrar un k_1 tal que

$$P_{H_0}\left(\frac{\widehat{\overline{x}}-\mu}{\sqrt{2/n}} > \frac{k_1-\mu}{\sqrt{2/n}}\right) = 0.05.$$

Es decir, $\frac{k_1}{\sqrt{2/n}} = 1.64$, o bien $k_1 = 1.64 \cdot \sqrt{2/n}$.

Entonces

$$\begin{aligned} P\left(Z > \frac{k_1-0.5}{\sqrt{2/n}}\right) =& P\left(Z > \frac{1.64\sqrt{2/n}-0.5}{\sqrt{2/n}}\right) \\ =& P\left(Z > 1.64 - \frac{0.5}{\sqrt{2/n}}\right) = P\left(Z > 1.64 - \frac{0.5\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

probabilidad que crece con el temaño muestral y tiende a 1 cuando el tamaño muestral tiende a infinito. Así pues, a mayor muestra mayor potencia del primer contraste, sin que varíe la potencia del segundo.

□

Ejercicio 18. La región crítica propuesta es: $RC = \{\overline{\boldsymbol{x}} > k\}$, por lo que el p-valor es igual a $P_{H_0}(\overline{\boldsymbol{x}} > 5.5) = P\left(\frac{\overline{\boldsymbol{x}}-5}{\sqrt{1/16}} > \frac{5.5-5}{\sqrt{1/16}}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.023$, donde $Z \sim \mathrm{N}(0\,,\,1)$.

Ejercicio 18

Ejercicio 19. La región crítica óptima es: el conjunto de muestras tales que $\mathfrak{s}^2 < \lambda$, donde λ satisface $P_{H_0}\left(\widehat{\mathfrak{s}^2} < \lambda\right) = \alpha$, es decir $P_{H_0}\left(\frac{30\widehat{\mathfrak{s}^2}}{100} < \frac{30\lambda}{100}\right) = \alpha$, donde $\frac{30\widehat{\mathfrak{s}^2}}{100}$ se distribuye χ^2_{30}.

1. *Si se dispone de las tablas de una Chi cuadrado:* Para $\alpha = 0.05$ ha de ser $\frac{30\lambda}{100} = 18.49$, o bien $\lambda = 61.633$, y por tanto para dicho α no se rechaza H_0. Así pues, tampoco se rechaza para $\alpha = 0.01$.
2. *Si NO se dispone de las tablas de una Chi cuadrado:* entonces empleamos la aproximación a una distribución normal. $\frac{30\widehat{\mathfrak{s}^2}}{100}$ se distribuye χ^2_{30}, cuyo valor esperado es 30 y cuya varianza es 60; por tanto, lo podemos aproximar por una $\mathrm{N}(30\,,\,60)$. Así pues, $P_{H_0}\left(30\widehat{\mathfrak{s}^2}/100 < 30\lambda/100\right) = \alpha$ ó bien $P_{H_0}\left(\frac{30\widehat{\mathfrak{s}^2}/100-30}{\sqrt{60}} < \frac{30\lambda/100-30}{\sqrt{60}}\right) = P_{H_0}\left(Z < \frac{30\lambda/100-30}{\sqrt{60}}\right) = \alpha$, donde aproximadamente $Z \sim \mathrm{N}(0\,,\,1)$. Para $\alpha = 0.05$ ha de ser $\frac{30\lambda/100-30}{\sqrt{60}} = -1.64$ o bien $\lambda = 57.65$, y por tanto para dicho α no se rechaza H_0. Así pues, tampoco se rechaza para $\alpha = 0.01$.

Ejercicio 19

Ejercicio 20. $H_0\ :\ \beta = 0$, frente a $H_1\ :\ \beta > 0$. Nótese que, por tª económica, lo más razonable es proponer un contraste de cola superior. La región crítica más conveniente es por tanto: $RC = \left\{\hat{\beta} > k\right\} = \left\{\frac{\hat{\beta}-\beta}{dt(\hat{\beta})} > t_{1-\alpha}\right\}$, donde $\hat{\beta}$ es el estimador MCO y $t_{1-\alpha}$ es el valor tabulado de una t-Student con 33 grados de libertad que deja a la izquierda un área de $1-\alpha$.

Ejercicio 20

Ejercicio 21(a) El modelo es $Y_n = a + x_n \cdot b + U_n$

Las estimaciones MCO de a y b son:

$$\widehat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{0.01}{0.15^2} = 0.44; \qquad \widehat{a} = \overline{y} - \overline{x}\cdot\frac{s_{xy}}{s_x^2} = 0.04 - 0.03\cdot 0.44 = 0.027;$$

Las estimación MCO de cada y_n es: $\widehat{y_n} = 0.027 + 0.44 \cdot x_n$

□

Ejercicio 21(b) El residuo n-ésimo es: $\widehat{e_n} = y_n - \widehat{y_n} = y_n - \mathrm{E}_{Y_n|X_N}(Y_n \mid x_n)$ es decir, es la diferencia entre la creación de empleo observada en la comunidad n-ésima y la creación de empleo *esperada* dado el dato de crecimiento de la actividad de dicha comunidad.

Por tanto, residuos positivos indican mayor creación de empleo de lo esperado (dado el crecimiento de la actividad), y residuos negativos indican menor creación de empleo de lo esperado (dado el crecimiento de la actividad).

Por tanto, la comunidad que parece haber tenido un comportamiento mejor (dada la información disponible) es la comunidad número 11, y la que peor lo ha tenido es la número 17.

□

Ejercicio 21(c) No cabe esperar que crecimientos positivos del nivel de actividad perjudiquen la creación de empleo; por lo tanto el contraste debe ser de una sóla cola. Así pues:

$$H_0 : b = 0; \quad H_1 : b > 0; \quad \text{estadístico: } \frac{(\widehat{b} - b)}{\sqrt{\frac{\widehat{\mathfrak{s}^2}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}}} \sim t_{15};$$

$$RC = \left\{ \boldsymbol{x} \text{ tales que: } \frac{\widehat{b}}{\sqrt{\frac{\widehat{\mathfrak{s}^2}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}}} > k \right\}$$

□

Ejercicio 22(a) Puesto que $\widehat{\ln Y_i} = 0.89 + 0.28 \ln(X_i)$ entonces

$$Y_i = e^{0.89+0.28 \ln(X_i)}$$

En el caso del país j-ésimo: $Y_j = e^{0.89+0.28 \cdot \ln(10)} = 4.64$

□

Ejercicio 22(b) Puesto que se pide un contraste de significación:

- H_0: $\beta = 0$

En cuanto a H_1, en principio no es verosímil que el efecto de la educación sobre la renta sea negativo (es decir, a mayor educación menor renta); por tanto, para garantizar una mayor potencia del contraste, éste debe ser de una sóla cola (la derecha en este caso)

- H_1: $\beta > 0$

$$RC = \left\{ \text{el conjunto de muestras } \boldsymbol{x} \text{ tales que } \frac{\widehat{\beta} - 0}{\sqrt{\frac{\widehat{\mathfrak{s}^2}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}}} > t_{T-2,\ 1-\alpha} \right\}$$

donde T es el tamaño de la muestra.

□

Ejercicio 23. Para familias con una renta $x = 1$ su consumo esperado es $\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid 1) = 2.75$; y cada unidad adicional de renta supone un incremento del consumo de 0.75 unidades.

Ejercicio 23

Ejercicio 24. $H_0 :\ b = 1/2; \quad H_1 :\ b > 1/2.$ La región critica de una sola cola es

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \frac{\widehat{\beta} - 1/2}{\sqrt{\widehat{\mathfrak{s}^2_{e}}/T s_x^2}} > k \right\}, \quad \text{por tanto el estadístico vale } \frac{3/4 - 1/2}{\sqrt{\frac{8}{128\times 4}}} = 2$$

y donde k es el valor de la tablas para una t de Student de 126 grados de libertad. Puesto que el número de grados de libertad es elevado, podemos emplear la tabla de la distribución $\mathrm{N}(0\,,\,1)$. Así, k es 1.96, por lo que rechazamos H_0.

Ejercicio 24

Ejercicio 25(a) Puesto que $\frac{\widehat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\,(0\,,\,1)\,;$

$$\alpha_1 = P_{H_0}\,(X > 9) = P_{H_0}\left(\frac{X/16 - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{16}}} > \frac{9/16 - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{16}}}\right) = P\,(Z > 0.5) = 0.3085$$

$$\alpha_2 = P_{H_0}\,(X > 10) = P_{H_0}\left(\frac{X/16 - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{16}}} > \frac{10/16 - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{16}}}\right) = P\,(Z > 1) = 0.1587$$

□

Ejercicio 25(b)

$$W_1(0.8) = P_{H_1}\,(X > 9) = P_{H_1}\left(\frac{X/16 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{16}}} > \frac{9/16 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{16}}}\right) = P\,(Z > -2.375) = 0.9911$$

$$W_2(0.8) = P_{H_1}\,(X > 10) = P_{H_1}\left(\frac{X/16 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{16}}} > \frac{10/16 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{16}}}\right) = P\,(Z > -1.75) = 0.9599$$

□

Ejercicio 25(c) No son comparables. El primero es más potente, pero tiene un mayor nivel de significación, es decir, una probabilidad mayor de cometer el error tipo I (rechazar H_0 cuando ésta es cierta).

Por el contrario, el segundo contraste es menos potente, pero tiene un nivel de significación mejor (más pequeño).

□

Ejercicio 25(d) Buscamos lo siguiente

$$0.05 = \alpha_1 = P_{H_0}\,(X > 9) = P_{H_0}\left(\frac{X/n - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}} > \frac{9/n - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}}\right)$$

Así pues, $\frac{9/n-1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}} = 1.64$; y despejando n tenemos $n = 12.258$, podemos afirmar que con una muestra de 12 consumidores, la significación será menor al 5 %.

Por otra parte, para el segundo contraste:

$$0.05 = \alpha_2 = P_{H_0}\,(X > 10) = P_{H_0}\left(\frac{X/n - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}} > \frac{10/n - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}}\right)$$

y por lo tanto, $\frac{9/n-1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}} = 1.64$; despejando n tenemos $n = 13.888$, Puesto que región crítica esta situada en la cola adecuada, podemos afirmar que con una muestra de 13 consumidores, la significación será menor al 5 %.

□

Ejercicio 26. Sabemos por el T.C.L. que si n muy grande (Novales, 1997, Sección 9.6)

$$\frac{\frac{\sum X_i}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

La región crítica es

$$RC = \left\{\mathbf{x} \;\text{ tales que: } \frac{x}{n} < k_\alpha\right\} = \left\{\mathbf{x} \;\text{ tales que: } \frac{\frac{x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < z_\alpha\right\};$$

donde

$$z_\alpha = \frac{k_\alpha - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{k_\alpha - 0.2}{\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{2200}}}.$$

Puesto que $x/n = 415/2200 = 0.1886$, entonces,

$$\begin{array}{lll} \text{Para } \alpha = 2.5\,\% & z_\alpha = -1.96 \Rightarrow k_\alpha = 0.1833 & \text{No rechazamos } H_0 \\ \text{Para } \alpha = 10\,\% & z_\alpha = -1.28 \Rightarrow k_\alpha = 0.1891 & \text{Rechazamos } H_0 \end{array}$$

Ejercicio 26

Ejercicio 27. Las hipótesis son $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ y $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$

El estadístico de contraste es $\frac{\mathbf{s}_x^2/\sigma_X^2}{\mathbf{s}_y^2/\sigma_Y^2} \sim F_{n-1,m-1}$

La región crítica es $RC = \left\{\boldsymbol{x} \text{ tales que: } \frac{\widehat{\mathbf{s}_x^2}}{\widehat{\mathbf{s}_y^2}} > k_\alpha\right\}$,

Ejercicio 27

Ejercicio 28. Lamentablemente, y dada la experiencia, no cabe esperar que los salarios de la mujeres seán superiores; por tanto el contraste debe ser de una sóla cola. Así pues:

1. $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$; $\quad H_1; \mu_X - \mu_Y > 0$;
2. estadístico: $\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x}+\frac{\sigma_Y^2}{n_y}}} \sim N(0,1)$; $\quad RC = \left\{\boldsymbol{x} \text{ tales que: } \frac{(\overline{x}-\overline{y})}{\sqrt{\frac{4}{n_x}+\frac{9}{n_y}}} > z_{1-\alpha}\right\}$

Ejercicio 28

Ejercicio 29. $RC_1 = \left\{\frac{s_X^2}{s_Y^2} < k_1 \text{ o } \frac{s_X^2}{s_Y^2} > k_2\right\}$, con $k_1 = F_{n,n,\alpha/2}$ y $k_2 = F_{n,n,1-\alpha/2}$. En el segundo caso, $RC_2 = \left\{\frac{s_X^2}{s_Y^2} > F_{n,n,1-\alpha}\right\}$, ya que si usáramos la región de dos colas el contraste perdería potencia.

Ejercicio 29

Ejercicio 30(a)

1. Por una parte:

$$\widehat{b} = \frac{\widehat{\sigma_{XY}}}{\widehat{\sigma_X^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{86}{17.2} = 5$$

por otra, las medias muestrales son

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{5} = \frac{130}{5} = 26; \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{5} = \frac{23}{5} = 4.6;$$

por lo que

$$\widehat{a} = \overline{y} - \widehat{b}\cdot\overline{x} = 26 - 4.6\cdot 5 = 3$$

El valor esperado del ingreso fijo es de 3000 euros. Y el incremento esperado del ingreso al hacer crecer la terraza en un metro adicional es de 5000 euros.

□

Ejercicio 30(b) El estimador MCO se distribuye Normal con esperanza igual al verdadero valor de los parámetros estimados, y varianza desconocida.

- **(Parámetro** b**)** buscamos los valores A y B tales que

$$P\left(A \leq \frac{\left(\widehat{b}-b\right)}{\sqrt{\frac{\widehat{s^2}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}}} \leq B\right) = (1-\alpha)$$

Donde $\frac{\left(\widehat{b}-b\right)}{\sqrt{\frac{\widehat{s^2}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}}}$ se distribuye como una t de Student con T-2 grados de libertad; por tanto

$$\left[-3.182 \leq \frac{(5-b)}{\sqrt{\frac{16.6}{17.2}}} \leq 3.182\right]$$
$$[-3.182 \times 0.98 \leq (5-b) \leq 3.182 \times 0.98]$$
$$[5 + 3.1323 \geq b \geq 5 - 3.1323]$$

es decir, el intervalo de confianza al 0.95 es

$$b \in [1.87,\ 8.13]$$

□

Ejercicio 30(c) Las hipótesis son:

$$H_0: \; b = 6$$
$$H_1: \; b < 6$$

La región critica de una sola cola es

$$RC = \left\{ \boldsymbol{x} \text{ tales que } \frac{\widehat{b} - 6}{\sqrt{\frac{\widehat{s^2}}{\sum(x_i - \overline{x})^2}}} < k \right\},$$

donde k es el valor de la tablas para una t de Student de tres grados de libertad, ya que el estadístico de la parte izquierda de la desigualdad tiene dicha distribución. Para $\alpha = 0.1$, tenemos que $k = t_{3,0.1} = -1.638$ sustituyendo tenemos que

$$\frac{5-6}{0.98} = -1.02$$

por lo que no rechazamos H_0 con un 10 % de significación.

El p-valor es la probabilidad de

$$P_{H_0}\left(\widehat{b} \leq 5\right) = P_{H_0}\left(\frac{\widehat{b} - b}{\sqrt{\frac{\widehat{s^2}}{\sum(x_i - \overline{x})^2}}} \leq \frac{5 - b}{\sqrt{\frac{\widehat{s^2}}{\sum(x_i - \overline{x})^2}}}\right)$$
$$= P\left(W \leq \frac{5-6}{0.98} = -1.02\right) = 0.19,$$

donde W se distribuye como una t de Student con tres grados de libertad.

□

Ejercicio 30(d) El establecimiento B ha ingresado 5000 euros por encima de su ingreso esperado.

El establecimiento D ha ingresado 4000 euros por debajo de lo esperado.

□

Ejercicio 30(e) La estimación del ingreso esperado para un establecimiento de 4 metros es:

$$\widehat{Y} = 3 + 5 \times 4 = 23$$

□

Ejercicio 31(a)

1. Por una parte:

$$\widehat{b} = \frac{\widehat{\sigma_{XY}}}{\widehat{\sigma_X^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{70}{124} = 0.56$$

   por otra, las medias muestrales son

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{5} = \frac{20}{5} = 4; \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{5} = \frac{40}{5} = 8;$$

   por lo que

$$\widehat{a} = \overline{y} - \widehat{b} \cdot \overline{x} = 4 - 0.56 \cdot 8 = -0.516.$$

□

Ejercicio 31(b) El estimador MCO se distribuye Normal con esperanza igual al verdadero valor de los parámetros estimados, y varianza desconocida.

- **(Parámetro a)** Buscamos los valores A y B tales que

$$P\left(A \leq \frac{\left(\widehat{a} - a\right)}{\sqrt{\frac{\widehat{s^2} \sum x_i^2}{T \sum(x_i - \overline{x})^2}}} \leq B\right) = (1 - \alpha)$$

  Donde $\frac{\left(\widehat{a} - a\right)}{\sqrt{\frac{\widehat{s^2} \sum x_i^2}{T \sum(x_i - \overline{x})^2}}}$ se distribuye como una t de Student con T-2 grados de libertad, y $\widehat{s^2}$ es el estimador de la cuasi-varianza muestral. Por tanto A y B son los valores que aparecen en las tablas, y que determinan un intervalo centrado en cero con una probabilidad asociada del 95 %; es decir, $A = -3.182$, y $B = 3.182$, y $\widehat{\mathfrak{s}^2} = 0.48/(T-2) = 0.16$. Así pues,

$$P\left(-3.182 \leq \frac{\left(-0.52-a\right)}{\sqrt{\frac{0.16\cdot 120}{5\cdot 124}}} \leq 3.182\right) = 0.95$$
$$P\left(-3.182\cdot\sqrt{0.03} \leq \left(-0.52-a\right) \leq 3.182\cdot\sqrt{0.03}\right) = 0.95$$
$$P\left(-0.52+3.182\cdot\sqrt{0.03} \geq a \geq -0.52-3.182\cdot\sqrt{0.03}\right) = 0.95,$$

es decir,

$$a \in [-1.078,\ 0.046]$$

con probabilidad 0.95

- **(Parámetro b)** Del mismo modo, buscamos los valores A y B tales que

$$P\left(A \leq \frac{\left(\widehat{b}-b\right)}{\sqrt{\frac{\widehat{\mathfrak{s}^2}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}}} \leq B\right) = (1-\alpha)$$

Donde $\frac{\left(\widehat{b}-b\right)}{\sqrt{\frac{\widehat{\mathfrak{s}^2}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}}}$ se distribuye como una t de Student con T-2 grados de libertad; por tanto

$$P\left(-3.182 \leq \frac{\left(0.56-b\right)}{\sqrt{\frac{0.16}{124}}} \leq 3.182\right) = 0.95$$
$$P\left(-3.182\cdot\sqrt{0.0013} \leq \left(0.56-b\right) \leq 3.182\cdot\sqrt{0.0013}\right) = 0.95$$
$$P\left(0.56+3.182\cdot\sqrt{0.0013} \geq b \geq 0.56-3.182\cdot\sqrt{0.0013}\right) = 0.95,$$

es decir,

$$b \in [0.449,\ 0.679]$$

con probabilidad 0.95

□

Ejercicio 31(c) Las hipótesis son:

$$H_0:\ b = 1$$
$$H_1:\ b < 1$$

La región critica de una sola cola es

$$RC = \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \frac{\widehat{b}-1}{\sqrt{\frac{\widehat{\mathfrak{s}^2}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}}} < k \right\},$$

donde k es el valor de la tablas para una t de Student de tres grados de libertad, ya que el estadístico de la parte izquierda de la desigualdad tiene dicha distribución. Para $\alpha = 0.1$, tenemos que $k = t_{3,0.1} = -1.638$ sustituyendo tenemos que

$$\frac{0.56-1}{\sqrt{0.0013}} = -338 < k = t_{3,0.1} = -1.638$$

por lo que rechazamos H_0.

El p-valor es la probabilidad de

$$P\left(\widehat{b} \leq 0.56 \;\middle|\; H_0\right) = P\left(\frac{\widehat{b}-b}{\sqrt{\frac{\widehat{\mathfrak{s}^2}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}}} \leq \frac{0.56-b}{\sqrt{\frac{\widehat{\mathfrak{s}^2}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}}} \;\middle|\; H_0\right)$$
$$= P\left(W \leq \frac{0.56-1}{\sqrt{0.0013}} = -338\right) \simeq 0,$$

donde W se distribuye como una t de Student con tres grados de libertad.

□

Ejercicio 31(d) La familia D es la que más ha gastado (5) respecto al nivel esperado (4.56)

La familia B es la que menos ha gastado (3) respecto al nivel esperado (3.44)

□

Ejercicio 31(e) Según el modelo estimado, una familia con ingresos de 2 debería gastar

$$\widehat{Y} = -0.52 + 0.56 \cdot 2 = 0.6$$

□

Soluciones a los Tests

Solución al Test: La región crítica óptima es: rechazar si $\mathfrak{s}^2 < \lambda$, donde λ satisface $P\left(\widehat{\mathfrak{s}^2} < \lambda | H_0\right) = \alpha$, o bien $P\left(\frac{30\widehat{\mathfrak{s}^2}}{100} < \frac{30\lambda}{100} \middle| \sigma^2 = 100\right) = \alpha$, donde $\frac{30\widehat{\mathfrak{s}^2}}{100}$ se distribuye χ^2_{30}. Para $\alpha = 0.05$ ha de ser $\frac{30\lambda}{100} = 43.8$, o bien $\lambda = 146$, y por tanto para dicho α no se rechaza H_0 en favor de H_1 como señala la opción (5a). Además, para $\alpha = 0.01$ ha de ser $\frac{30\lambda}{100} = 50.9$, o bien $\lambda = 169.67$, y por tanto para dicho α tampoco se rechaza H_0 en favor de H_1, contrariamente a lo indicado en (5b). Debe notarse que opción (5b) puede descartarse a partir de la (5a) sin conocer el valor crítico al 99 %, ya que dicho valor debe ser mayor que el valor crítico al 95 %. La opción (5c) sólo sería cierta para H_1: $\sigma^2 \neq 100$ (pero es cláramente falso para H_1: $\sigma^2 < 100$).

Fin 5

Solución al Test: La región crítica es

$$RC = \left\{\mathbf{x} \mid \overline{x} > 1.82\right\} = \left\{\mathbf{x} \;\middle|\; \frac{\overline{x}-1}{\sqrt{16/64}} > \frac{1.82-1}{\sqrt{16/64}}\right\}$$

por tanto

$$\alpha = P\left(\frac{\widehat{\overline{x}}-1}{1/2} > 1.64\right) = P\left(Z > 1.64\right) = 0.05$$

Por ser $Z = \frac{\widehat{\overline{x}}-1}{1/2}$ una *v.a.* $N(0,1)$. La función potencia es

$$\begin{aligned} W(z) = & \; P\left(\tfrac{\widehat{\overline{x}}-z}{1/2} > \tfrac{1.82-z}{1/2}\right) = 1 - P\left(Z \leq 2(1.82-z)\right) \\ = & \; \phi(2 \cdot (1.82 - z)). \end{aligned}$$

que es una función decreciente!

Fin 13

Solución al Test:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) = & \; P\left(\overline{x}_{\geq} 0.92 \mid H_0\right) \\ = & \; P\left(\tfrac{\overline{x}-1}{\sqrt{16/64}} \geq \tfrac{0.92-1}{\sqrt{16/64}}\right) = 1 - P\left(Z \leq -0.16\right) \\ = & \; 1 - \phi(-0.16) \end{aligned}$$

Fin 14

Solución al Test: Puesto que $\frac{\widehat{\overline{x}}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$ Entonces

$$P\left(z_{\alpha/2} \leq \frac{\widehat{\overline{x}}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 95\,\%$$

donde $z_{\alpha/2} = -1.96$ y $z_{1-\alpha/2} = 1.96$. Por lo tanto,

$$P\left(\widehat{\overline{x}} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{16}{64}} \leq \mu \leq \widehat{\overline{x}} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{16}{64}}\right) = 95\,\%$$

es decir, el intervalo de confianza es $(-0.06, 1.9)$.

Fin 15

Solución al Test: La región crítica es

$$RC = \left\{\mathbf{x} \mid \widehat{\mathfrak{s}^2} < k_\alpha\right\} = \left\{\mathbf{x} \;\middle|\; \frac{(n-1)\widehat{\mathfrak{s}^2}}{\sigma^2} < \chi^2_{(n-1,\alpha)}\right\}$$

Por otra parte, $\chi^2_{(20,5\,\%)} = 10.9$ y $\chi^2_{(20,1\,\%)} = 9.59$. Así pues,

$$0.05 = P\left(\frac{20\widehat{\mathfrak{s}^2}}{100} < 10.9\right) = P\left(\widehat{\mathfrak{s}^2} < 54.5\right)$$

y

$$0.01 = P\left(\frac{20\widehat{\mathfrak{s}^2}}{100} < 9.59\right) = P\left(\widehat{\mathfrak{s}^2} < 47.95\right);$$

es decir no se rechaza no al 5 % ni al 10 %.

Fin 16

Solución al Test: Si la varianza es conocida, el estadístico utilizado es:

$$\frac{\widehat{\overline{x}} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

Por el contrario, Si la varianza es desconocida, el estadístico utilizado es:

$$\frac{\widehat{\overline{x}} - \mu}{\sqrt{\widehat{\mathfrak{s}^2}/n}} \sim t_{n-1}.$$

Por otra parte el TCL no es necesario, pues

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

y por tanto la distribución de los estadísticos es conocida ara cualquier tamaño muestral. Además, μ y σ^2 son constantes.

Fin 17