

Dpto. de Economía Cuantitativa
Universidad Complutense de Madrid
Introducción a la Econometría

Tema 3 — Normal multivariante

Marcos Bujosa y Gustavo A. Marrero

Material de apoyo para el curso *Introducción a la Econometría* de la licenciatura en Economía de la Universidad Complutense de Madrid.

© 2003–2007 Marcos Bujosa y Gustavo A. Marrero
Actualizado el: 13 de abril de 2007

Versión 4.2

Copyright © 2003–2007 Marcos Bujosa y Gustavo A. Marrero



Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento-CompartirIgual de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/es/deed.es> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Puede encontrar la última versión de este material en:

<http://www.ucm.es/info/ecocuan/mbb/index.html#ietria>

Índice

Índice	1
1. Distribución Normal	3
1.1. Normal univariante	3
1.2. Normal bivariante	4
1.2.1. Algunas propiedades de las normales bivariantes	6
2. Preguntas y problemas	8
3. Bibliografía	10
A. Derivación de la distribución Normal bivariante	10
A.1. Una distribución no Normal con marginales Normales	12
A.2. Normal multivariante	13
A.2.1. Algunas propiedades de las normales multivariantes	13
. Soluciones a los Ejercicios	15

Este es un material de apoyo a las clases. En ningún caso sustituye a los libros de texto que figuran en el programa de la asignatura; textos que el alumno debe estudiar para afrontar el examen final con ciertas garantías de éxito.

El programa se cubre con los siguientes capítulos de libro de texto [Novales \(1997\)](#)¹:

Capítulos 1 a 3: Estos temas han sido cubiertos en asignaturas anteriores, y debido a su bajo nivel de complejidad no se verán en clase (aunque forman parte del programa).

Capítulos 4 a 6: Estos temas han sido cubiertos en las asignaturas [Estadística I](#) y [II](#). Se realizará un breve repaso en clase (una semana o semana y media como máximo), asumiendo que el alumno es capaz de preparar por su cuenta esta parte.

Capítulos 7 y 8: completos

¹Otros excelentes manuales en castellano son [Peña \(2001\)](#), [Peña \(2002\)](#) y [Peña y Romo \(1997\)](#).

Capítulo 9: secciones 9.4 a 9.6

Capítulos 10 y 12: completos

1 semana (4 horas)

Tema 3. Distribución Normal Bivalente e introducción al caso Multivariante.

1. Introducción. Noción de la normal bivalente.
2. La matriz de varianzas y covarianzas.
3. Supuestos de la normal bivalente y derivación de su función de densidad conjunta.
4. Propiedades de la variable aleatoria condicionada y de sus momentos. Aplicaciones.
5. La Normal multivariante. Una Introducción.

Sección 5.8, 7.4 y 7.7 de [Novales \(1997\)](#), también puede consultar [Peña \(2001, Secciones 5.A y 6.8\)](#) [López Cachero \(1992, Sección 19.4 y Capítulo 23\)](#) [Mittelhammer \(1996, Secciones 3.5 y 4.3\)](#) [Spanos \(1986, Capítulo 5\)](#) [Casella y Berger \(2002, Capítulo 4\)](#)

1. Distribución Normal

1.1. Normal univariante

↑
Distribución normal univariante
1

Decimos que X es Normal con esperanza μ y varianza σ^2 ,

$$X \sim N(\mu, \sigma^2);$$

si tiene la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}; \quad \mathbb{R}_X = (-\infty, \infty) \quad (1.1)$$

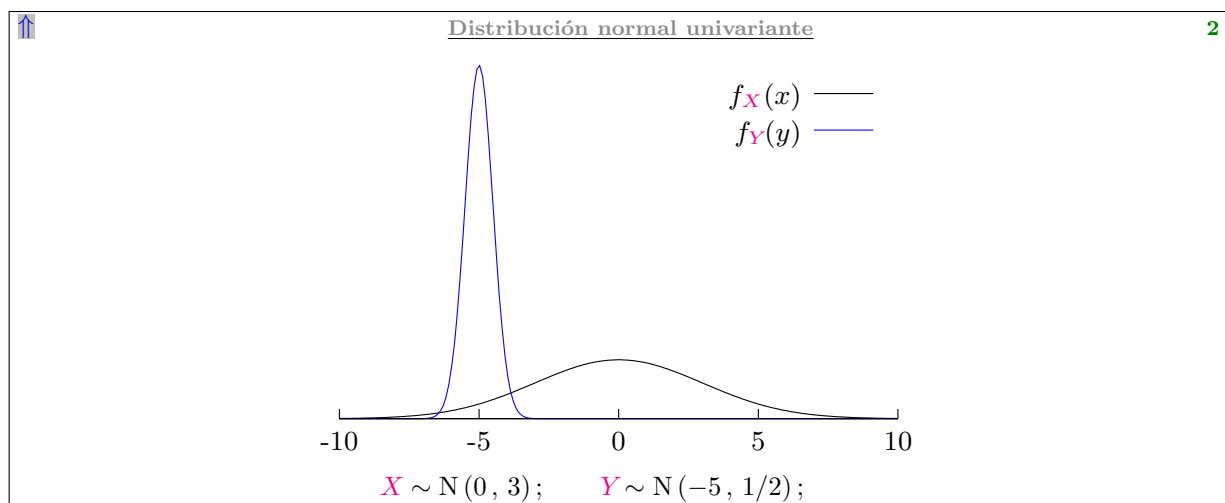
Y función generatriz de momentos

$$M_X(t) = e^{t\mu + \frac{(t\sigma)^2}{2}}. \quad (1.2)$$

Véase ejercicio [c](#) en la página [48](#) del Tema 2.

Función generatriz de la distribución Normal: ([Rao, 2002](#), pp. 103)

$$\begin{aligned}
 M(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\
 &= e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y-t\sigma^2)^2/2\sigma^2} dy \quad \text{sustituyendo } y = x - \mu \\
 &= e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} \quad \text{por ser integral de } f_Y(y), Y \sim N(t\sigma^2, \sigma^2)
 \end{aligned}$$



↑
Distribución normal univariante
3

Es una distribución simétrica unimodal, y por tanto $Me(X) = \mu$. Además:

$$P(X \in [\mu \pm \sigma]) = 0.682$$

$$P(X \in [\mu \pm 2\sigma]) = 0.954$$

$$P(X \in [\mu \pm 3\sigma]) = 0.997$$

EJERCICIO 1. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, y considere la siguiente transformación de X

$$Y = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}$$

(llamamos a dicha transformación “tipificación”) ¿Qué distribución tiene Y ?

↑
Normal tipificada: $N(0, 1)$
4

$$P(Z < 0) = 0.5$$

$$P(Z < 1.645) = 0.95$$

$$P(Z < 1.96) = 0.975$$

Véase Tabla 1

1.2. Normal bivalente

Nota 1. Definimos el vector de esperanzas de un vector columna Y como

$$E(Y) = E\left(\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_N \end{bmatrix}\right) \equiv \begin{bmatrix} E(Y_1) \\ E(Y_2) \end{bmatrix}$$

Definimos la matriz de varianzas y covarianzas de un vector columna Y como

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \text{Var}\left(\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_N \end{bmatrix}\right) \equiv E(YY') - E(Y)E(Y') \\ &= \begin{bmatrix} E(Y_1^2) & E(Y_1Y_2) \\ E(Y_1Y_2) & E(Y_2^2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [E(Y_1)]^2 & E(Y_1)E(Y_2) \\ E(Y_1)E(Y_2) & [E(Y_2)]^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1Y_2} \\ \sigma_{Y_1Y_2} & \sigma_{Y_2}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Función de densidad bivalente 6

Decimos que X e Y tiene distribución conjunta normal bivalente

$$(X, Y) \sim N \left(\begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \right) = N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

si

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \cdot \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho_{XY}^2)} \left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 - 2\rho_{XY} \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right) \right) \right\} \quad (1.3)$$

¿Qué pasa si $\rho_{XY} = 0$?

Normal bivalente: Incorrelación e independencia 6

Si $\rho_{XY} = 0$ entonces

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \right\}$$

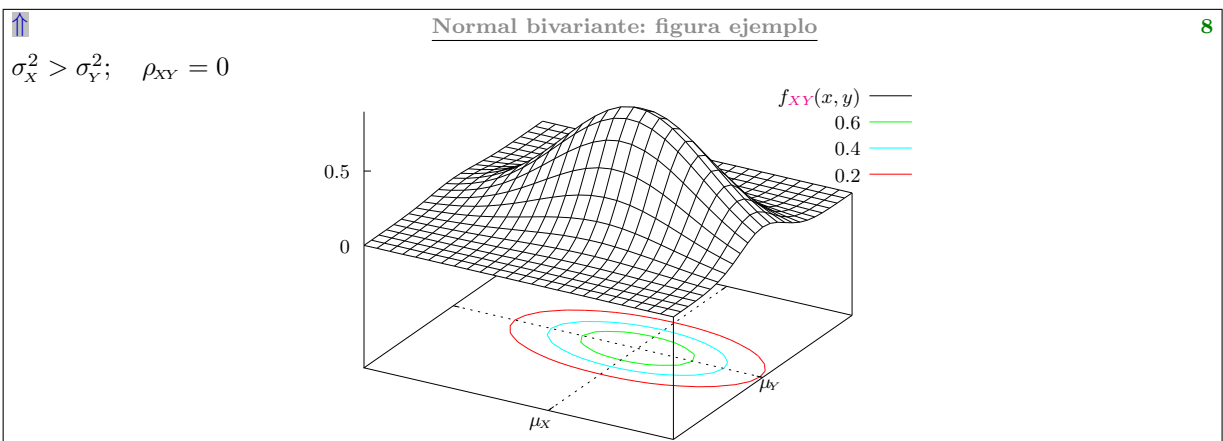
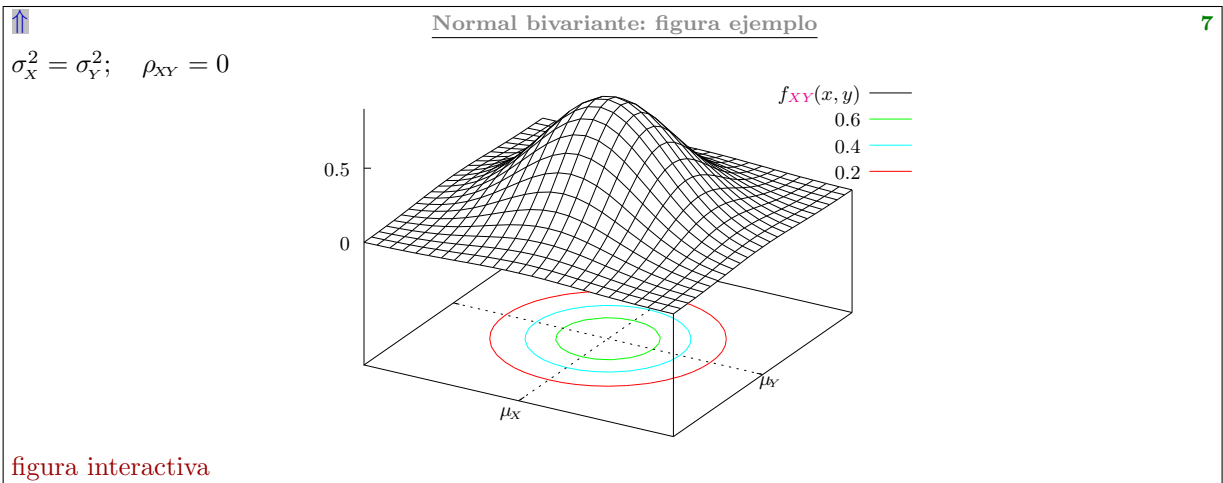
$$= f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

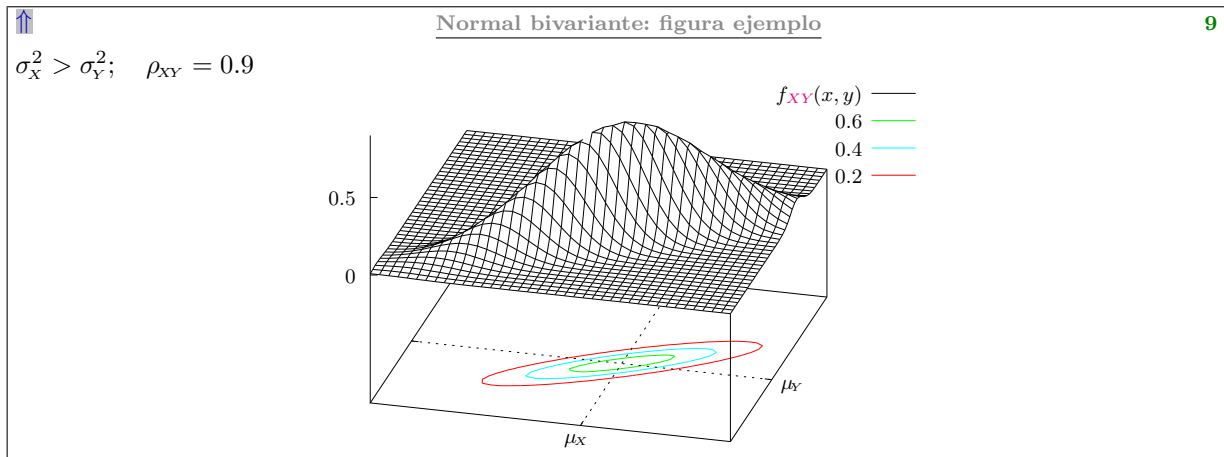
(Véase 1.1)

Si (X, Y) tiene distribución normal bivalente

$$\rho_{XY} = 0 \Rightarrow X, Y \text{ son independientes}$$

entre normales solo caben relaciones lineales





Función generatriz de momentos: normal bivalente 10

Sea $(X, Y) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \equiv N\left(\begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}\right)$;
 Entonces $M_{XY}(t, \tau) = M_{XY}(\mathbf{t})$ es

$$M_{XY}(t, \tau) = e^{t\boldsymbol{\mu} + \frac{t\boldsymbol{\Sigma}t'}{2}}; \quad \text{compárese con (1.2)}$$

$$= \exp\left\{ [t\mu_X + \tau\mu_Y] + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} t & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \tau \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \exp\left\{ t\mu_1 + \tau\mu_2 + \frac{1}{2} (t^2\sigma_X^2 + \tau^2\sigma_Y^2 + 2t\tau\sigma_{XY}) \right\} \quad (1.4)$$

1.2.1. Algunas propiedades de las normales bivalentes

Las tres propiedades que se exponen a continuación se dejan como ejercicio para el alumno.

Sea $(X, Y) \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}\right)$:

A resolver en clase

EJERCICIO 2. [Distribuciones marginales normales] Demuestre empleando la función generatriz de momentos de una distribución normal bivalente que sus distribuciones marginales son normales.

EJERCICIO 3. [Covarianza cero implica independencia] Demuestre empleando la función generatriz de momentos de una distribución normal bivalente que covarianza cero implica independencia

EJERCICIO 4. [Suma de Normales tiene distribución normal] Demuestre empleando la función generatriz de momentos que la suma de variables aleatorias con distribución conjunta normal tiene distribución normal.

Proposición 1.1 (Funciones de densidad condicionadas son normales). *Las funciones de densidad condicionadas son normales, con esperanza condicional lineal y varianza condicional homocedástica.*

Demostración. Lo demostraremos para $f_{Y|X}(Y | x)$ [la demostración para $f_{X|Y}(X | y)$ es idéntica]. De (A.3) sabemos que

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi \begin{vmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{vmatrix}^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - \mu_X & y - \mu_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x - \mu_X \\ y - \mu_Y \end{bmatrix} \right\}$$

calculando el determinante y desarrollando el exponente tenemos

$$= \frac{1}{2\pi (\sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{\left((y - \mu_Y) - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \mu_X) \right)^2}{2\left(\sigma_Y^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2}\right)} - \frac{(x - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2} \right\};$$

y puesto que la función de densidad univariante de X es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}$$

dividiendo $f_{XY}(x, y)$ por la función de densidad univariante de X tenemos:

$$f_{Y|X}(Y|x) \equiv \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma_Y^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2}\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\left(y - \left[\mu_Y - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \mu_X)\right]\right)^2}{2\left(\sigma_Y^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2}\right)}\right\};$$

que es la función de densidad de una normal univariante con esperanza,

$$E_{Y|X}(Y|x) = \mu_Y - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \mu_X) = (\mu_Y - b\mu_X) + b \cdot x \quad (1.5)$$

que es función lineal de x , y donde $b = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$; y con varianza

$$\text{Var}_{Y|X}(Y|x) = \sigma_Y^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2} = \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2), \quad (1.6)$$

que es un valor constante. □

(nótese que si σ_{XY} es cero, $f_{Y|X}(Y|x)$ se reduce a la función de densidad marginal $f_Y(y)$).



Propiedades de la normal multivariante

11

Si $(X, Y) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ entonces

1. Las distribuciones marginales son Normales
2. Correlación cero implica independencia
3. Combinación lineal de Normales es Normal
4. Las distribuciones condicionadas son Normales (ver Proposición 1.1)
 - a) Con esperanzas condicionadas lineales

$$E_{Y|X}(Y|x) = a + bx$$

- b) Con varianzas condicionadas constantes

$$\text{Var}_{Y|X}(Y|x) = \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)$$

A resolver en clase

EJERCICIO 5. Sean las siguientes funciones de ingresos y costos

$$\begin{aligned} \text{Costos: } & X \sim N(7, 1) \\ \text{Ingresos: } & Y \sim N(6, 1) \end{aligned};$$

con $\rho_{XY} = 0$ y sea la función de beneficios $W = Y - X$.

- (a) Deduzca la distribución de los beneficios a partir de la función generatriz de momentos de una diferencia de variables aleatorias independientes.
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener beneficios positivos?
- (c) ¿Y si $Y_2 \sim N(6, \frac{1}{2})$ y $X_2 \sim N(7, \frac{1}{2})$? Deduzca primero la distribución de los beneficios a partir de la función generatriz de momentos conjunta $M_{W_2}(t)$.
- (d) ¿Y si $Y_3 \sim N(6, 1)$, $X_3 \sim N(7, 1)$, y $\sigma_{X_3Y_3} = 1/2$?
- (e) ¿Y si $Y_4 \sim N(6, 1)$, $X_4 \sim N(7, 1)$, y $\sigma_{X_4Y_4} = -1/2$?
- (f) ¿Podría intuir cuál será aproximadamente la probabilidad de obtener beneficios si $Y_2 \sim N(6, 1000)$ y $X_2 \sim N(7, 1000)$ con $\sigma_{XY} = 0$? ¿Y si $Y_2 \sim N(6, 1)$ y $X_2 \sim N(7, 1)$ con $\rho_{XY} = -0.99$? Compruebe analíticamente si su intuición ha funcionado?

A resolver en clase

EJERCICIO 6. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta normal con vector de medias $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y matriz de varianzas-covarianzas $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix}$.

- ¿Cuál es la probabilidad de que $Y > 1$?
- ¿Cómo debería ser la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ para garantizar que $P(Y > 1) = P(Y > 1 | X = 1)$?

A resolver en clase

EJERCICIO 7. Sean X e Y con distribución conjunta normal. Y sea $W=X-Y$. Demuestre, empleando la función generatriz de momentos (FGM), que W y X tienen distribución conjunta Normal.

A resolver en clase

EJERCICIO 8. (Consta de 5 apartados)

Las demandas de dos bienes, X e Y , tienen una distribución conjunta normal con vector de medias $(5 \ 10)'$ y matriz de varianzas covarianzas $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$.

- Calcule el coeficiente de correlación lineal entre las demandas de los dos bienes. Según su resultado, ¿los bienes son complementarios o sustitutivos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda del bien X supere la del bien Y ?
- ¿Cuál es la esperanza de la demanda del bien Y ? Calcule la esperanza de la demanda del bien Y si del bien X se han demandado 8 unidades ($X = 8$)
- Suponga que los consumidores son precio aceptantes, y que los precios (en euros) de estos dos bienes son $p_X = 3$ y $p_Y = 1$. Si la renta es de 30 euros ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que pedir prestado (gasto de más de 30 euros) al consumir una cesta de bienes X e Y ?
- ¿Cómo cambiaría la respuesta del apartado anterior si sabemos que del bien X se han demandado 8 unidades?

2. Preguntas y problemas

EJERCICIO 9. Se desea analizar la rentabilidad de una cartera de acciones compuesta en un 30% (es decir un 0.3) por acciones de la empresa A y el 70% (es decir un 0.7) restante por acciones de la empresa B. Denominamos X e Y a las rentabilidades de las acciones de las empresas A y B respectivamente. Sabemos que ambas rentabilidades se distribuyen conjuntamente de manera Normal, que $X \sim N(1/2, 1/4)$, y que $Y \sim N(1, 2)$. Además $\text{Corr}(X, Y) = -1/4$.

- Calcule $\text{Cov}(X, Y)$ y también la rentabilidad esperada de la cartera de acciones.
- Calcule la probabilidad de que la rentabilidad de la cartera sea superior a 0.75 (es decir, superior al 75%).
- Calcular el valor esperado de Y condicionado a que $X = 1/4$.
- Calcule la probabilidad de que la rentabilidad de la cartera sea superior a 1 (es decir, la probabilidad de doblar el valor (rentabilidad de 100%)), cuando se sabe que la rentabilidad de la empresa A ha sido de $3/4$.

Test. Conteste a las siguientes cuestiones.

- Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ y densidades de probabilidad marginal normales. Señale cual de las siguientes afirmaciones es cierta:
 - $f_{XY}(x, y)$ es necesariamente normal bivalente.
 - La densidad conjunta es una χ^2 .
 - Si además la función de densidad condicional $f_{Y|X}(Y | x)$ es normal con esperanza que varía linealmente con x y varianza constante, entonces $f_{XY}(x, y)$ es normal bivalente.
 - Para conocer la distribución conjunta debemos imponer, además, que X e Y sean independientes.

El siguiente texto es válido para las 2 siguientes preguntas:

Una variable aleatoria bidimensional, (X, Y) , se distribuye normal bivalente con vector de medias $(5, 5)'$ y matriz de varianzas covarianzas $\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 4 \end{pmatrix}$.

- ¿Cuál es la distribución de $W=X+Y$?

(a) $W \sim N(5, 5)$	(b) $W \sim N(10, 6)$
(c) $W \sim N(10, 4)$	(d) $W \sim N(5, 4)$
- ¿Qué probabilidad tiene que $X+Y$ sea mayor que 12.56?

(a) $P(X + Y > 12.56) = 0.15$	(b) $P(X + Y > 12.56) = 0.1$
(c) $P(X + Y > 12.56) = 0.01$	(d) $P(X + Y > 12.56) = 0$

EJERCICIO 10. Comente y/o responda brevemente las siguientes frases:

- Que dos variables aleatorias tengan la misma función generatriz de momentos no implica que tengan la misma función de densidad.
- Una variable aleatoria bidimensional, (X, Y) , se distribuye normal bivalente con vector de medias $(5, 5)'$ y matriz de varianzas covarianzas $\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la probabilidad de que $X+Y$ sea mayor que 12.56?
- Tenemos dos variables X, Y . Su coeficiente de correlación lineal está muy próximo a cero. Así, concluimos que la relación entre las dos variables es prácticamente inexistente.
- Dadas dos variables aleatorias X, Y . Sus momentos de primer y segundo orden existen, están bien definidos y son conocidos. La aproximación lineal a la esperanza condicional $E_{Y|X}(Y|x)$ es $a + b \cdot x$, siendo $a = E(Y) - bE(X)$ y $b = \sigma_{XY}/\sigma_X^2$. Pese a su sencillo cálculo, esta aproximación tiene el inconveniente de que **es siempre una mera aproximación** (es decir, nunca podemos garantizar que coincida con la verdadera esperanza condicional).

EJERCICIO 11. Los volúmenes de venta de dos bienes producidos por la misma empresa, X e Y , suponemos que tienen distribución normal bivalente con vector de medias $(10 \ 15)'$ y matriz de varianzas covarianzas $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

- ¿Calcule la probabilidad de que el volumen de ventas del primer producto supere el volumen de ventas del segundo?
- ¿Cuál es la mejor predicción que puede hacer de las ventas de Y si sabe que las ventas del otro producto han sido $X=12$? ¿Difiere este valor del valor esperado de la Y ? ¿Porqué?

EJERCICIO 12. Sea (X, Y) normal bivalente con vector de medias $(1, 2)$ y matriz de varianzas-covarianzas $\begin{pmatrix} 1 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 2 \end{pmatrix}$. ¿Cuanto vale $P(X - Y > 0)$ si $\sigma_{XY} = 0$? ¿Y si $\sigma_{XY} = 0.5$?

EJERCICIO 13. Sea (X, Y) normal bivalente con vector de medias $(1, 1)'$ y matriz de varianzas-covarianzas $\begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & 2 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la distribución de $W = X+Y$? ¿Cuanto vale $P(W > 2)$ si $\sigma_{12} = 0$? ¿Difiere este resultado si $\sigma_{12} = 0.5$?

Lista de Transparencias

- Distribución normal univariante
- Distribución normal univariante
- Distribución normal univariante
- Normal tipificada: $N(0, 1)$
- Función de densidad bivalente
- Normal bivalente: Incorrelación e independencia
- Normal bivalente: figura ejemplo
- Normal bivalente: figura ejemplo
- Normal bivalente: figura ejemplo
- Función generatriz de momentos: normal bivalente
- Propiedades de la normal multivalente
- Normal bivalente
- Normal bivalente: esperanza condicionada
- Normal bivalente: varianza condicionada
- Normal bivalente
- Normal bivalente: función de densidad
- Ej. de dist. No Normal con marginales Normales
- Función de distribución normal multivalente
- Partes del temario

3. Bibliografía

- Casella, G. y Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*. Duxbury Advanced Series. Duxbury, USA, segunda ed. ISBN 0-534-24312-6. 3
- López Cachero, M. (1992). *Fundamentos y métodos de estadística*. Ediciones Pirámide, Madrid. ISBN 84-368-0425-2. 3
- Mittelhammer, R. C. (1996). *Mathematical Statistics for Economics and Business*. Springer-Verlag, New York, primera ed. ISBN 0-387-94587-3. 3, 13
- Novalés, A. (1997). *Estadística y Econometría*. McGraw-Hill, Madrid, primera ed. ISBN 84-481-0798-5. 1, 3
- Peña, D. (2001). *Fundamentos de Estadística*. Alianza Editorial, Madrid. ISBN 84-206-8696-4. 1, 3
- Peña, D. (2002). *Regresión y diseño de experimentos*. Alianza Editorial, Madrid. ISBN 84-206-8695-6. 1
- Peña, D. y Romo, J. (1997). *Introducción a la Estadística para la Ciencias Sociales*. McGraw-Hill, Madrid. ISBN 84-481-1617-8. 1
- Rao, C. R. (2002). *Linear Statistical Inference and Its Applications*. Wiley series in probability and statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, segunda ed. ISBN 0-471-21875-8. 3
- Spanos, A. (1986). *Statistical foundations of econometric modelling*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-26912-1. 3

A. Derivación de la distribución Normal bivalente

Aquí derivaremos la expresión de la Normal bivalente, partiendo de sus propiedades. Es decir, que las dist. marginales son normales, y las condicionadas son también normales con esperanza $E_{Y|X}(Y|x)$ y varianza condicional homocedástica

↑	Normal bivalente	12
Buscamos una función de densidad de probabilidad		
	$f_{XY}(x, y)$	
tal que		
	$f_X(x) \sim N(\mu_X, \sigma_X^2);$	
y que para cada $X = x; \quad x \in R_X$		
1. $(Y X = x) \sim N(E_{Y X}(Y x), \text{Var}_{Y X}(Y x)).$		
2. $E_{Y X}(Y x)$ es función lineal de x .		
3. $\text{Var}_{Y X}(Y x)$ no depende de x .		
A continuación vamos a calcular la esperanza y la varianza de Y condicionada a $X = x$.		

↑	Normal bivalente: esperanza condicionada	13
De 2. sabemos que $E_{Y X}(Y x)$ es función lineal de x ; por tanto		
	$E_{Y X}(Y x) = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X),$	
que es la mejor aproximación lineal a una esperanza condicionada.		



Normal bivalente: varianza condicionada

14

$$\text{Var}_{Y|X}(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [y - E_{Y|X}(Y|x)]^2 f_{Y|X}(Y|x) dy$$

pre-multiplicando por $f_X(x)$ e integrando respecto a x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \text{Var}_{Y|X}(Y|x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y - E_{Y|X}(Y|x)]^2 f_X(x) f_{Y|X}(Y|x) dy dx,$$

Por una parte, de 3. sabemos que $\text{Var}_{Y|X}(Y|x)$ no depende de x :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \text{Var}_{Y|X}(Y|x) dx = \text{Var}_{Y|X}(Y|x)$$

Por otra, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y - E_{Y|X}(Y|x)]^2 f_X(x) f_{Y|X}(Y|x) dy dx, &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y - E_{Y|X}(Y|x)]^2 f_{XY}(x, y) dy dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y - \mu_Y - \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)]^2 f_{XY}(x, y) dy dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(y - \mu_Y)^2 + \rho_{XY}^2 \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} (x - \mu_X)^2 - 2\rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)(y - \mu_Y)] f_{XY}(x, y) dy dx, \\ &= \sigma_Y^2 + \rho_{XY}^2 \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \sigma_X^2 - 2\rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \sigma_{XY} = \sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2) \end{aligned}$$



Normal bivalente

16

Por tanto

$$\begin{aligned} E_{Y|X}(Y|x) &= \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X) \\ \text{Var}_{Y|X}(Y|x) &= \sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

De 1. deducimos finalmente que

$$(Y|X=x) \sim N\left(\mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X), \sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2)\right) \quad (\text{A.2})$$

Con función de densidad $f_{Y|X}(Y|x)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}_{Y|X}(Y|x)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{[y - E_{Y|X}(Y|x)]^2}{\text{Var}_{Y|X}(Y|x)}\right\}$$

o (sustituyendo)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{[y - \mu_Y - \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)]^2}{\sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2)}\right\}$$

Normal bivalente: función de densidad 17

Bajo el supuesto de que $X \sim N([\mu_X, \sigma_X^2])$ y sabiendo que $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(Y | x)$ tenemos que $f_{XY}(x, y)$ es

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)}} \exp\left\{-\frac{[y-\mu_Y-\rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)]^2}{2\sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right)\right\}$$

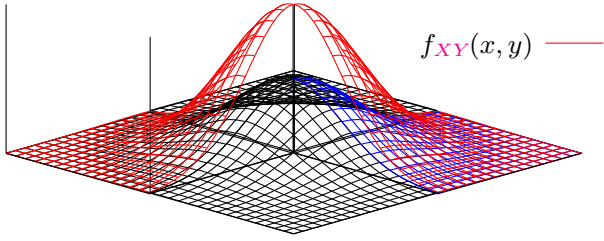
$$(X, Y) \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right) = N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

A.1. Una distribución no Normal con marginales Normales

Aquí veremos una distribución conjunta que no es Normal, pero cuyas distribuciones marginales si lo son.

Ej. de dist. No Normal con marginales Normales 18

Sea

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \exp\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\}; & x \geq 0, y < 0; \\ & x < 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$


Nota: Cálculo de las distribuciones de probabilidad marginales de

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \exp\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\}; & x \geq 0, y < 0; \\ & x < 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Por una parte, para $x \geq 0$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2)} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2)} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2)}$$

Por otra parte, para $x < 0$

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2)} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2)}$$

Por tanto, para todo x ; $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2)}$; es decir, $X \sim N(0, 1)$.

La demostración de $Y \sim N(0, 1)$ es idéntica. *Fin de la nota.*

A.2. Normal multivariante

↑
Función de distribución normal multivariante
19

Decimos que $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiene distribución normal multivariante, $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

si su función de densidad conjunta es:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (\text{A.3})$$

y su función generatriz de momentos es

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp \left\{ \boldsymbol{\mu}' \mathbf{t} + \frac{1}{2} \mathbf{t}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t} \right\} \quad (\text{A.4})$$

A.2.1. Algunas propiedades de las normales multivariantes

Todas las propiedades vistas para las distribución normal bivalente se pueden extender a la distribución normal multivariante.

Cualquier combinación lineal de Normales tiene distribución normal (Teorema 4.9 [Mittelhammer, 1996](#), pp.206).

Sea $\mathbf{X} \sim N \left(\begin{matrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\Sigma} \end{matrix}, \begin{matrix} [n \times 1] \\ [n \times n] \end{matrix} \right)$; sea \mathbf{A} de rango k ; y sea \mathbf{b} . Entonces

$$\mathbf{Y} = \begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{X} & + & \mathbf{b} \\ [k \times n] & [n \times 1] & & [k \times 1] \end{matrix}$$

tiene distribución $N(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}')$

Demostración:

$$M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = E(\exp \{ \mathbf{t}' \mathbf{Y} \}) = E(\exp \{ \mathbf{t}' (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}) \}) = \exp \{ \mathbf{t}' \mathbf{b} \} E(\exp \{ \mathbf{t}' \mathbf{A}\mathbf{X} \});$$

y puesto que si llamamos $\mathbf{t}_* = \mathbf{t}' \mathbf{A}$ tenemos

$$E(\exp \{ \mathbf{t}' \mathbf{A}\mathbf{X} \}) = E(\exp \{ \mathbf{t}_* \mathbf{X} \}) = M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}_*) = \exp \{ \mathbf{t}_* \boldsymbol{\mu} + (1/2) \mathbf{t}_* \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}_* \};$$

entonces

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) &= \exp \{ \mathbf{t}' \mathbf{b} \} \exp \{ \mathbf{t}_* \boldsymbol{\mu} + (1/2) \mathbf{t}_* \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}_* \} \\ &= \exp \{ \mathbf{t}' \mathbf{b} \} \exp \{ \mathbf{t}' \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + (1/2) \mathbf{t}' \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}' \mathbf{t} \} \\ &= \exp \{ \mathbf{t}' (\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) + (1/2) \mathbf{t}' \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}' \mathbf{t} \} \end{aligned}$$

Es decir, la función generatriz de momentos de $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}')$.

Distribuciones marginales normales Las distribuciones marginales son un caso particular donde \mathbf{A} es una matriz diagonal cuya diagonal está compuesta por unos y ceros, y donde \mathbf{b} es un vector de ceros. (Véase [Mittelhammer, 1996](#), página 207)

Covarianza cero implica independencia Para la demostración general de que covarianza cero implica independencia véanse los teoremas 4.12 y 4.13 de la página 212 de [Mittelhammer \(1996\)](#).

Funciones de densidad condicionadas son normales La demostración general de que las funciones de densidad condicionadas son normales, con esperanza condicional lineal y matriz de varianzas y covarianzas constante aparece en la página 209 de [Mittelhammer \(1996\)](#).

z	Probabilidad acumulada desde $-\infty$ hasta z para una normal $N(0, 1)$									
	x.x0	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Cuadro 1: Probabilidad acumulada desde $-\infty$ hasta z para una $N(0, 1)$

Partes del temario

- Tema 1 IntEctr-T01
- Tema 2 IntEctr-T02
- Tema 3 IntEctr-T03
- Tema 4 IntEctr-T04
- Tema 5 IntEctr-T05
- Tema 6 IntEctr-T06
- Tema 7 IntEctr-T07

Soluciones a los Ejercicios**Ejercicio 1.**

$$f_Y(y) = |J| f_X(h^{-1}(y)) = |J| f_X(\sigma y + \mu).$$

donde $|J|$ es el valor absoluto de la derivada de $h^{-1}(y) = \sigma y + \mu$ respecto a y .

Por tanto:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= |\sigma| \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(\sigma y + \mu - \mu)^2}{\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y)^2\right\} \end{aligned}$$

es decir,

$$Y \sim N(0, 1); \quad \text{donde } E(Y) = 0; \quad \text{Var}(Y) = 1.$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= M_{(X,Y)}(t, 0) \\ &= \exp\left\{t\mu_X + 0\mu_Y + \frac{1}{2}(t^2\sigma_X^2 + 0^2\sigma_Y^2 + 2t \cdot 0\sigma_{XY})\right\} \\ &= \exp\left\{t\mu_X + \frac{1}{2}(t^2\sigma_X^2)\right\} \end{aligned} \quad \text{que es análoga a (1.2)}$$

Para $M_Y(\tau)$ la demostración es análoga.

Ejercicio 2

Ejercicio 3.

$$\begin{aligned} M_{(X,Y)}(t, \tau) &= \exp\left\{t\mu_X + \tau\mu_Y + \frac{1}{2}(t^2\sigma_X^2 + \tau^2\sigma_Y^2 + 2t\tau\sigma_{XY})\right\} \\ &= \exp\left\{t\mu_X + \frac{1}{2}(t^2\sigma_X^2)\right\} \cdot \exp\left\{\tau\mu_Y + \frac{1}{2}(\tau^2\sigma_Y^2)\right\} \\ &= M_X(t) \cdot M_Y(\tau) \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Ejercicio 4. Sea $Y = X + Y$; entonces

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E(e^{t(X+Y)}) = M_{XY}(t, t) \\ &= \exp\left\{(t\mu_X + t\mu_Y) + \frac{1}{2}(t^2\sigma_X^2 + t^2\sigma_Y^2 + 2t^2\sigma_{XY})\right\} \quad \text{de (1.4)} \\ &= \exp\left\{t(\mu_X + \mu_Y) + \frac{1}{2}t^2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY})\right\} \\ &= \exp\left\{t\tilde{\mu} + \frac{1}{2}t^2\tilde{\sigma}^2\right\} \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mu} = (\mu_X + \mu_Y)$ y $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}$. Por tanto

$$Y = X + Y \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5(a) Puesto que X e Y son independientes

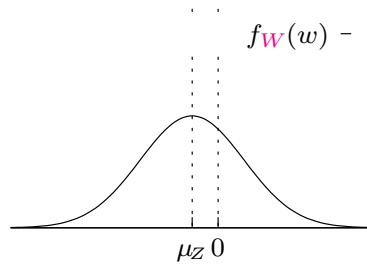
$$\begin{aligned} M_W(t) &= E(e^{tW}) = E(e^{t(Y-X)}) = E(e^{tY+t(-X)}) \\ &= M_{(Y,-X)}(t, t) \quad \text{por def. de FGM conjunta} \\ &= M_Y(t) \cdot M_{-X}(t) \quad \text{por independencia} \\ &= \exp\left\{(t6) + \frac{1}{2}(t^21)\right\} \cdot \exp\left\{(-t7) + \frac{1}{2}(t^21)\right\} \\ &= \exp\left\{t(6-7) + \frac{1}{2}t^2(1+1)\right\} \\ &= \exp\left\{t(-1) + \frac{1}{2}t^2(2)\right\} \end{aligned}$$

Por tanto $W = Y - X \sim N(-1, 2)$

□

Ejercicio 5(b)

$$\begin{aligned}
 P(W > 0) &= P\left(\frac{W+1}{\sqrt{2}} > \frac{0+1}{\sqrt{2}}\right) = \\
 &= 1 - P\left(\frac{W+1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = .2388
 \end{aligned}$$



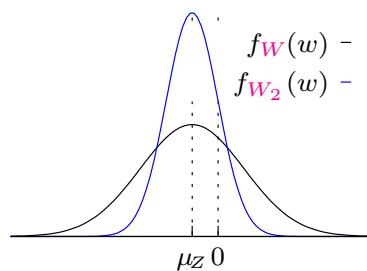
□

Ejercicio 5(c)

$$\begin{aligned}
 M_{W_2}(t) &= \exp\left\{(t \ t) \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (t \ t) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}\right\} \\
 &= \exp\{-t + (t^2)/2\},
 \end{aligned}$$

por tanto $W_2 \sim N(-1, 1)$.

$$P(W_2 > 0) = P(W_2 + 1 > 1) = 1 - P(W_2 + 1 \leq 1) = .1587$$



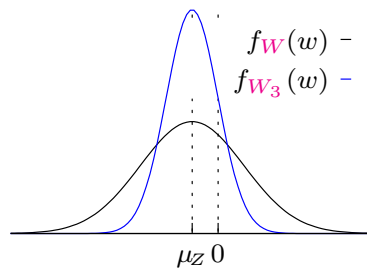
Mayor certidumbre hace menos probables valores lejos de la media.

□

Ejercicio 5(d)

$$W_3 \sim N(\mu_{Y_3} - \mu_{X_3}, \sigma_{X_3}^2 + \sigma_{Y_3}^2 - 2\sigma_{X_3Y_3}) = N(-1, 1) \sim W_2$$

$$P(W_3 > 0) = P(W_3 + 1 > 1) = 1 - P(W_3 + 1 \leq 1) = .1587$$



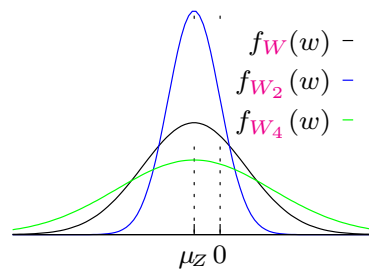
Relación positiva entre costos e ingresos estabiliza el beneficio reduciendo la dispersión. Cuando el coste está por encima de la media, también suele ser alto el ingreso (y viceversa).

□

Ejercicio 5(e)

$$W_4 \sim N(\mu_{Y_4} - \mu_{X_4}, \sigma_{X_4}^2 + \sigma_{Y_4}^2 - 2\sigma_{X_4Y_4}) = N(-1, 3)$$

$$P(W_4 > 0) = 1 - P((W_4 + 1)/\sqrt{3} \leq 1/\sqrt{3}) = .281$$



Cuando $\uparrow y$ en media $\downarrow x$; el beneficio se dispara;
 Cuando $\downarrow y$ en media $\uparrow x$; el beneficio se hunde;
 Aumenta la dispersión.

□

Ejercicio 6.

$$\begin{aligned} P(Y > 1) &= P\left(\frac{Y-0}{\sqrt{2}} > \frac{1-0}{\sqrt{2}}\right) \\ &= P\left(\frac{Y-0}{\sqrt{2}} > \frac{1-0}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 1 - 0.761 = 0.239, \end{aligned}$$

donde hemos considerado que Y es $N(0, 2)$.

Cuando la matriz es diagonal (es decir, cuando las covarianzas son cero) necesariamente ambas probabilidades son iguales (puesto que bajo normalidad conjunta covarianza nula implica independencia).

Ejercicio 6

Ejercicio 7. Ya que $(X, Y) \sim \text{Normal}$, tienen FGM Normal bivalente (evaluada en t y τ)

$$M_{XY}(t, \tau)$$

La FGM de W y X [evaluada en (p, q)]es:

$$\begin{aligned} M_{WX}(p, q) &\equiv E(\exp\{pW + qX\}) = E(\exp\{p(3X + Y) + qX\}) \\ &= E(\exp\{(3p + q)X + pY\}) = M_{XY}(3p + q, p) \end{aligned}$$

que es la FGM Normal bivalente de más arriba, pero evaluada en $(3p + q, p)$.

Resta comprobar que es la de una Normal bivalente particular.

$$M_{XY}(3p + q, p) = \exp\left\{(3p + q - p)\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(3p + q - p)\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3p + q \\ p \end{pmatrix}\right\}$$

y operando

$$M_{XY}(3p + q, p) =$$

$$\exp\left\{p\underbrace{(3\mu_X + \mu_Y)}_{\mu_W} + q\mu_X + \frac{1}{2}\left[\underbrace{(9\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 6\sigma_{XY})}_{\sigma_W^2}p^2 + \sigma_X^2q^2 + 2\underbrace{(3\sigma_X^2 + \sigma_{XY})}_{\sigma_{WX}}pq\right]\right\}$$

Ejercicio 7

Ejercicio 8(a)

$$\text{Corr}(X, Y) = \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Puesto que la relación lineal es positiva, son bienes complementarios.

□

Ejercicio 8(b) Puesto que $P(X > Y) = P(X - Y > 0)$; vamos a definir la variable $W = X - Y$ que por ser combinación lineal de normales tiene distribución normal, por tanto:

$$W \sim N(5 - 10, 4 + 9 - 2 \cdot 1) = N(-5, 11)$$

Así pues $P(X > Y) = P(W > 0)$ y calculando

$$\begin{aligned} P(W > 0) &= P\left(\frac{W - (-5)}{\sqrt{11}} > \frac{0 - (-5)}{\sqrt{11}}\right) = P(Z > 1.51) = \\ &= 1 - P(Z \leq 1.51) = 0.0655 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 8(c)

1. $E(Y) = 10$
- 2.

$$\begin{aligned} E_{w|X}(Y|8) &= E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)} + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \cdot 8 = \\ &= 10 - 5 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 8 = 10.750 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 8(d) La probabilidad de pedir prestado es la probabilidad de que el valor de la cesta de bienes supere la renta de 30 euros; es decir $P(3X + Y > 30)$.

Si definimos la nueva variable

$$W = 3 \cdot X + Y \sim N(3 \cdot 5 + 10, 9 \cdot 4 + 9 + 2 \cdot 3 \cdot 1),$$

es decir $W \sim N(25, 51)$, el cálculo se reduce a

$$\begin{aligned} P(W > 30) &= P\left(\frac{W - 25}{\sqrt{51}} > \frac{30 - 25}{\sqrt{51}}\right) \\ &= P(Z > 0.7) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.7) = 0.242 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 8(e) Primero calculamos cómo es la distribución conjunta de W y X . Puesto que sabemos que ha de ser conjuntamente normal, sólo necesitamos calcular $\text{Cov}(W, X)$

$$\text{Cov}(W, X) = \text{Cov}(3X + Y, X) = 3 \cdot \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(Y, X) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$$

Por tanto

$$\begin{bmatrix} W \\ X \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 51 & 13 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

Y por tanto, W condicionada a X tiene distribución normal

$$[W|X=8] \sim N(E_{w|X}(W|8), \text{Var}_{w|X}(W|8))$$

Calculando $E_{w|X}(W|8)$ y $\text{Var}_{w|X}(W|8)$ ya podemos responder a la pregunta

- Por una parte

$$\begin{aligned} E_{w|X}(W|8) &= E(W) - E(X) \frac{\text{Cov}(W, X)}{\text{Var}(X)} + \frac{\text{Cov}(X, W)}{\text{Var}(X)} \cdot 8 = \\ &= 25 - 5 \frac{13}{4} + \frac{13}{4} \cdot 8 = 34.750 \end{aligned}$$

- Por otra parte (véase Ecuación (1.6) de la Proposición 1.1)

$$\text{Var}_{w|X}(W|8) = \text{Var}(W) (1 - \rho_{wX}^2) \simeq 51 \cdot (1 - 0.91^2) = 8.77$$

$$\text{donde } \rho_{wX} = \frac{\text{Cov}(W, X)}{\sqrt{\text{Var}(W)\text{Var}(X)}} = \frac{13}{\sqrt{51 \cdot 4}} \simeq 0.91$$

Por tanto $[W|X=8] \sim N(34.75, 8.77)$

Realizando los cálculos de manera similar al apartado anterior se calcula la probabilidad solicitada.

$$\begin{aligned} P(W > 30 | X = 8) &= P\left(\frac{W - 34.75}{\sqrt{8.77}} > \frac{30 - 34.75}{\sqrt{8.77}}\right) = \\ &= P(Z > -1.6) = P(Z \leq 1.6) = 0.9452 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 9(a) Por una parte:

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Corr}(X, Y) \cdot \text{Dt}(X) \cdot \text{Dt}(Y) = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{1/4} \cdot \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8} = -0.17678.$$

Por otra, puesto que la rentabilidad de la cartera es $V = 0.3 \cdot X + 0.7 \cdot Y$; entonces:

$E(V) = 0.3 \times 0.5 + 0.7 \times 1 = 0.85$, es decir una rentabilidad del 85%.

□

Ejercicio 9(b) Primero calculamos la varianza de V :

$$\begin{aligned}\text{Var}(V) &= \text{Var}(0.3X + 0.7Y) = 0.3^2 \text{Var}(X) + 0.7^2 \text{Var}(Y) + 2 \times 0.3 \times 0.7 \times \text{Cov}(X, Y) \\ &= 1.0025 - 0.0525\sqrt{2} = 0.928\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}P(V \geq 0.75) &= P\left(\frac{V - 0.85}{\sqrt{0.928}} \geq \frac{0.75 - 0.85}{\sqrt{0.928}}\right) \\ &= P(Z \geq -0.10) = P(Z \leq 0.10) = 0.5398\end{aligned}$$

□

Ejercicio 9(c)

$$\begin{aligned}E_{\text{vx}}(Y | 1/4) &= E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \cdot 1/4 \\ &= 1 - \frac{1 - 0.17678}{2} \frac{-0.17678}{0.25} + \frac{-0.17678}{0.25} \times \frac{1}{4} = 1.1768\end{aligned}$$

es decir, ¡más de un 117%! □

Ejercicio 9(d) Primero necesitamos conocer la distribución de $V | X = 3/4$. Como V y X tienen distribución conjunta Normal; la distribución condicionada es Normal. Así pues, basta con calcular la esperanza y la varianza condicionadas para conocer la distribución completamente.

La covarianza es

$$\text{Cov}(V, X) = \text{Cov}(0.3 \cdot X + 0.7 \cdot Y, X) = 0.3 \cdot \text{Var}(X) + 0.7 \cdot \text{Cov}(Y, X) = -0.0487;$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}E_{\text{vx}}(V | 3/4) &= E(V) - E(X) \frac{\text{Cov}(V, X)}{\text{Var}(X)} + \frac{\text{Cov}(V, X)}{\text{Var}(X)} \cdot \frac{3}{4} \\ &= 0.85 - 0.5 \frac{-0.0487}{0.25} + 0.75 \frac{-0.0487}{0.25} = 0.8013\end{aligned}$$

la varianza condicional es

$$\begin{aligned}\text{Var}_{\text{vx}}(V | 3/4) &= \text{Var}(V) \cdot (1 - \rho_{\text{vx}}^2) \\ &= 0.928 \cdot \left(1 - \left[\frac{-0.0487}{\sqrt{0.928 \times 0.25}}\right]^2\right) = 0.91866\end{aligned}$$

Ahora ya podemos contestar

$$P(V \geq 1 | X = 3/4) = P\left(\frac{V - 0.8013}{\sqrt{0.91866}} \geq \frac{1 - 0.8013}{\sqrt{0.91866}} \mid X = 3/4\right) = P(Z \geq 0.207) = 0.42$$

aproximadamente. □

Ejercicio 10(a) Esta afirmación es falsa. Dos variables aleatorias X e Y con distribuciones cuyos momentos están definidos, tienen la misma distribución de probabilidad si y sólo si tienen idéntica función generatriz de momentos. □

Ejercicio 10(b) $W = X + Y$ se distribuye normal con media $5 + 5 = 10$ y con varianza $1 + 4 + 2(-0.5) = 4$. Por tanto $P(W > 12.56) = 1 - P(W \leq 12.56) = 1 - P\left(\frac{W-10}{2} \leq \frac{12.56-10}{2}\right)$, donde $\frac{W-10}{2} \sim N(0, 1)$; por tanto, $1 - F_Z(1.28) = 1 - 0.9 = 0.1$, donde $F_Z(z)$ es la función de distribución de una $N(0, 1)$. □

Ejercicio 10(c) La conclusión es falsa. La correlación lineal indica el grado de relación **lineal** entre dos variables. Si el coeficiente de correlación lineal está muy próximo a cero, esto quiere decir que relación **lineal** entre las dos variables es prácticamente inexistente. Pero esto no es óbice para que pueda existir una fuerte relación (no lineal) entre las variables. □

Ejercicio 10(d) Cuando la esperanza condicional es una función lineal de x , la aproximación lineal coincide con la verdadera esperanza condicional (esto siempre es así cuando X e Y tienen distribución conjunta normal). □

Ejercicio 11(a) Puesto que $P(X > Y) = P(X - Y > 0)$, basta con calcular la probabilidad de que $W = X - Y$ sea mayor que cero. Ahora bien, puesto que W es combinación lineal de normales, $W \sim N(\mu, \sigma^2)$, donde $\mu = 10 - 15 = -5$; y $\sigma^2 = 9 + 9 - 2 \cdot 2 = 14$. Por tanto

$$P(W > 0) = P\left(\frac{W + 5}{\sqrt{14}} > \frac{0 + 5}{\sqrt{14}}\right) = P(Z > 1.3363) = \\ = 1 - P(Z \leq 1.3363) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

□

Ejercicio 11(b) Puesto que X e Y tienen distribución conjunta normal, la esperanza condicionada (que es el predictor óptimo) es la función lineal:

$$E_{Y|X}(Y|x) = E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)} + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \cdot x = 15 - 10 \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot x$$

que evaluada para $X=12$ es $E_{Y|X}(Y|12) = 15 - 10 \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot 12 = 15.44$; que difiere de $E(Y)$ como era de esperar, ya que covarianza distinta de cero implica *asociación* lineal entre ambas variables. Además, de que en este caso $x = 12 \neq E(X)$. (Piense que siempre que $x = E(X)$, $E_{Y|X}(Y|x)$ es igual a $E(Y)$)

□

Ejercicio 12. Sea $W = X - Y$. Por ser W diferencia de variables normales, tiene distribución normal

$$W \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY})$$

- $W \sim N(1 - 2, 1 + 2 - 2 \cdot 0) \sim N(-1, 3)$
 $P(W > 0) = P\left(\frac{W+1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - P(Z \leq 0.577) = 1 - 0.719 = 0.281$
- $W \sim N(1 - 2, 1 + 2 - 2 \cdot 0.5) \sim N(-1, 2)$
 $P(W > 0) = P\left(\frac{W+1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - P(Z \leq 0.707) = 1 - 0.761 = 0.239$

donde $Z \sim N(0, 1)$.

Ejercicio 12

Ejercicio 13. $W \sim N(2, 3 + 2\sigma_{12})$

Caso I Puesto que X e Y tienen distribución conjunta Normal, su suma también es normal. Además, si la covarianza es cero, en el caso de distribuciones conjuntas normales esto implica independencia entre las variables. Por tanto W tiene distribución Normal con esperanza suma de las esperanzas de X e Y y varianza suma de las varianzas de X e Y ; por tanto:

$$W \sim N(1 + 1, 1 + 2) = N(2, 3).$$

Así pues, $P(W > 2) = 1 - P(W \leq 2)$ y tipificando W tenemos

$$1 - P(W \leq 2) = 1 - P\left(\frac{W - 2}{\sqrt{3}} \leq \frac{2 - 2}{\sqrt{3}}\right) = 1 - P\left(\frac{W - 2}{\sqrt{3}} \leq 0\right) = 0.5$$

es decir, es uno menos la probabilidad de que una v.a. $N(0, 1)$ tome valores menores o iguales a cero (ver [Table~1](#)).

Caso II Si la covarianza no es cero, todo lo anterior es válido, salvo que $\text{Var}(W)$ será la suma de las varianzas de X e Y menos dos veces la covarianza; por tanto

$$W \sim N(1 + 1, 1 + 2 - 2 \cdot 0.5) = N(2, 2).$$

y

$$1 - P(W \leq 2) = 1 - P\left(\frac{W - 2}{\sqrt{2}} \leq \frac{2 - 2}{\sqrt{2}}\right) = 1 - P\left(\frac{W - 2}{\sqrt{2}} \leq 0\right) = 0.5$$

Ejercicio 13