Dpto. de Economía Cuantitativa
Universidad Complutense de Madrid

Introducción a la Econometría

Tema 2 — Probabilidad multivariante

Marcos Bujosa y
Gustavo A. Marrero

Material de apoyo para el curso *Introducción a la Econometría* de la licenciatura en Economía de la Universidad Complutense de Madrid.

Actualizado el: 1 de junio de 2007

Versión 4.1

Puede encontrar la última versión de este material en:

http://www.ucm.es/info/ecocuan/mbb/index.html#ietria

Índice

Este es un material de apoyo a las clases. En ningún caso sustituye a los libros de texto que figuran en el programa de la asignatura; textos que el alumno debe estudiar para afrontar el examen final con ciertas garantías de éxito.

El programa se cubre con los siguientes capítulos de libro de texto Novales (1997)[1]:

Capítulos 1 a 3: Estos temas han sido cubiertos en asignaturas anteriores, y debido a su bajo nivel de complejidad no se verán en clase (aunque forman parte del programa).

Capítulos 4 a 6: Estos temas han sido cubiertos en las asignaturas Estadística I y II. Se realizará un breve repaso en clase (una semana o semana y media como máximo), asumiendo que el alumno es capaz de preparar por su cuenta esta parte.

Capítulos 7 y 8: completos

Capítulo 9: secciones 9.4 a 9.6

Capítulos 10 y 12: completos

[1] Otros excelentes manuales en castellano son Peña (2001), Peña (2002) y Peña y Romo (1997).

Probabilidad multivariante

1. Introducción

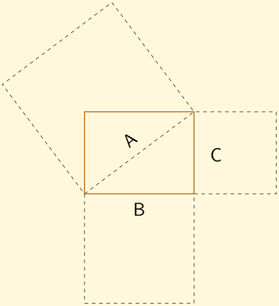
Una buena introducción aparece en (Spanos, 1999, Cap. 1).

¿Cuanto mide una linea pintada sobre la diagonal de una pared? (mundo real)

A.- Teoría matemática (Geometría Euclídea⇒Teorema de Pitágoras)

B.- Modelo teórico (representación abstracta de la pared)

Del modelo podemos inferir una respuesta tentativa midiendo los lados



$$A^2 = B^2 + C^2$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

Azar: incertidumbre sobre cada resultado particular de un fenómeno

Regularidad: persistente regularidad en comportamiento de resultados

Regularidad en el azar[a]

1. Distribución
2. Dependencia (o Independencia)
3. Heterogeneidad (u Homogeneidad[b])

Lanzamiento de un dado ¿plástico o plastilina? octave

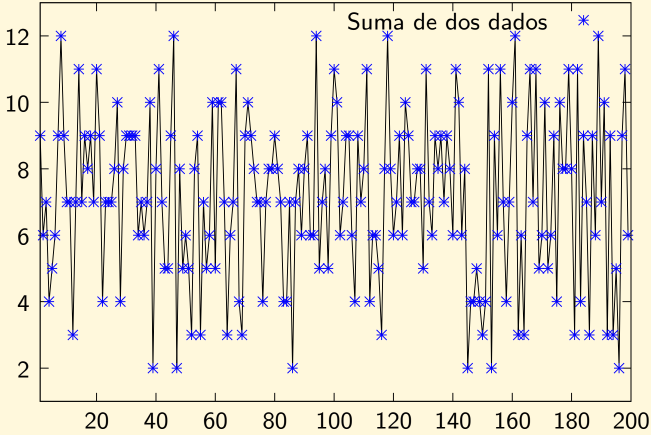
[a](véase Spanos, 1999, Capitulo 1)

[b]Idéntica distribución (ID)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

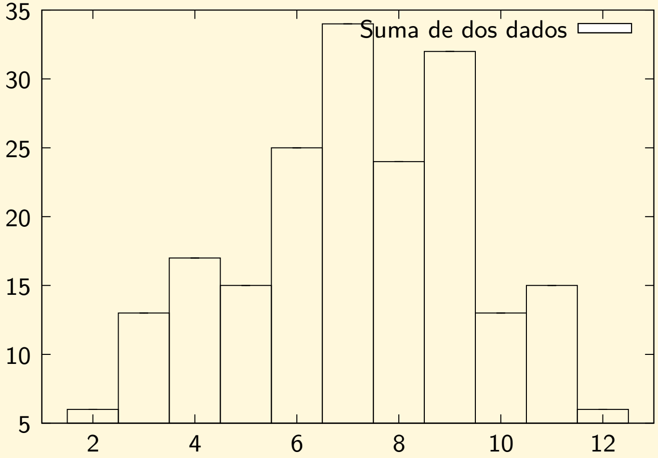
Cuadro 1: resultados elementales en el lanzamiento de dos dados

Distribución, Independencia, Homogeneidad



octave

Distribución triangular



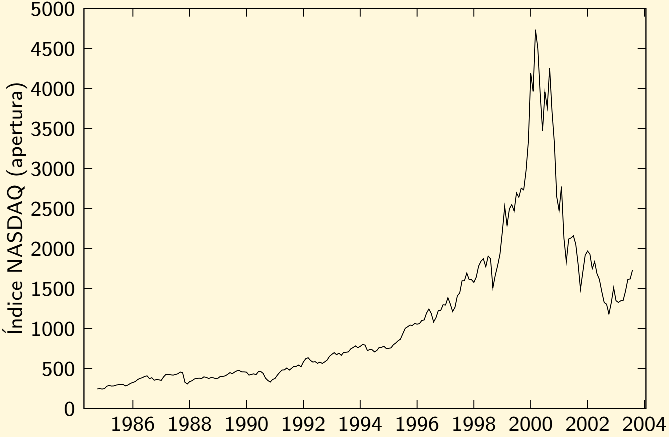
octave

- Lanzamiento 2 dados:
  - Distribución (triangular)
  - Independencia, Homogeneidad (I.I.D.)

- ¿Regularidad en *fenómenos económicos*?
  - No podemos derivar una dist. *a priori*
    (ej.: mediante argumentos de simetría)
  - Con frecuencia resultados dependientes; y condiciones cambian con el tiempo (Heteregoneidad).

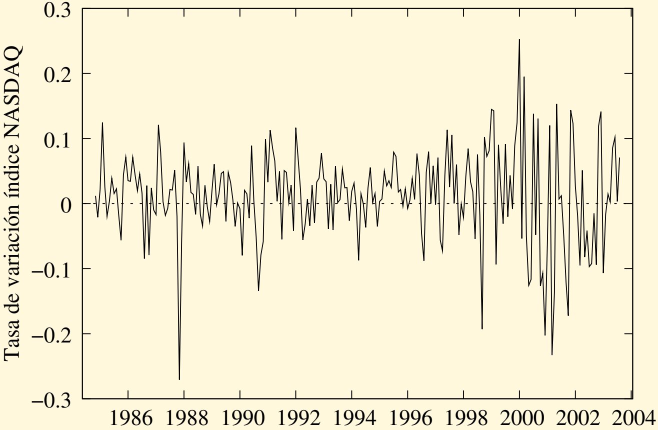
- Índice de cotizaciones NASDAQ:
  Distribución (campaniforme para la tasa de variación), Dependencia, Heterogeneidad

Dependencia



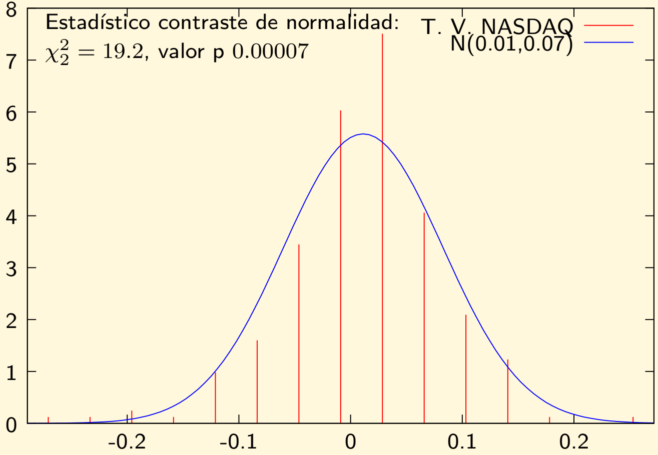
media, banda de variación

Heterogeneidad, Dependencia



media, banda de variación, clusters

Distribución (Campaniforme)



Objetivo: identificar patrones de regularidad en datos. 0.1

A.- Teoría matemática: **Probabilidad.** Formaliza conceptos de *distribución* (D), *independencia* (I) y *homogeneidad* (H). Temas 1 a 3

B.- Modelo estadístico

- frecuencias relativas ↔ distribución (N,U,χ^2,. . .) (D)
- impredicibilidad ↔ independencia (I) o dependencia (I)
- semejanza en pautas ↔ homogeneidad (ID) o heterogeneidad (H)

Descripción de la dependencia y la heterogeneidad
(variables – econometría o bien pasado reciente – series temporales)

Inferencia estadística con Modelo estadístico y los datos. Temas 4 a 7

2. Espacio de probabilidad

Una buena introducción aparece en (Spanos, 1999, Cap. 4).

Además de los capítulos 4 a 7 de Novales (1997), también puede consultar Peña (2001, Capitulos 4 y 6) López Cachero (1992, Capitulos 17 a 20) Mittelhammer (1996, Capitulos 1 a 3)

Supongamos el siguiente experimento aleatorio (véase. . .)

Ejemplo 1. $\mathcal{E}$: Lanzamiento de una moneda dos veces.

Sucesos de interés: cualquier resultado:

$$\Big\{(\smiley,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\maltese)\Big\},\ \Big\{(\maltese,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\maltese,\maltese)\Big\}$$

Espacio de sucesos (y, o, y no):

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}=\Bigg\{&\Big\{(\smiley,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\maltese)\Big\},\ \Big\{(\maltese,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\maltese,\maltese)\Big\},\\ &\Big\{(\smiley,\smiley),(\smiley,\maltese)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\smiley),(\maltese,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\smiley),(\maltese,\maltese)\Big\},\\ &\Big\{(\smiley,\maltese),(\maltese,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\maltese),(\maltese,\maltese)\Big\},\ \Big\{(\maltese,\maltese),(\maltese,\smiley)\Big\},\\ &\Big\{(\smiley,\smiley),(\smiley,\maltese),(\maltese,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\smiley),(\smiley,\maltese),(\maltese,\maltese)\Big\},\\ &\Big\{(\smiley,\smiley),(\maltese,\smiley),(\maltese,\maltese)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\maltese),(\maltese,\smiley),(\maltese,\maltese)\Big\},\\ &S \text{ (que ocurra cualquier cosa — suceso seguro)}\\ &\emptyset \text{ (que no ocurra nada — suceso imposible)}\Bigg\}\end{aligned}$$

Llamamos *ley (o función) de probabilidad* $P(\cdot)$ a la función:

$$P(\cdot) : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$$

que verifica

[Axioma 1] $P(S) = 1$

[Axioma 2] $P(A) \geq 0$, para cualquier suceso $A \in \mathfrak{B}$

[Axioma 3] *Aditividad contable.* Para cualquier sucesión numerable de sucesos $A_i \in \mathfrak{B},\ i = 1, 2, \ldots$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Ejemplo 2. [**Lanzamiento de dos monedas:** (continuación del Ejemplo 1 en la página~22)]

Experimento aleatorio, $\mathcal{E}$: Lanzamiento de una moneda dos veces.

Sucesos de interés: cualquier resultado.

Ley de probabilidad (si la moneda no está trucada, ie. $P(\smiley) = 1/2$):

$$P(\cdot) = \begin{cases} \text{para } \emptyset & 0 \\ \text{para } S & 1 \\ \text{para } \Big\{(\smiley,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\maltese)\Big\},\ \Big\{(\maltese,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\maltese,\maltese)\Big\}, & 1/4 \\ \text{para } \Big\{(\smiley,\smiley),(\smiley,\maltese)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\smiley),(\maltese,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\smiley),(\maltese,\maltese)\Big\}, & 1/2 \\ \text{para } \Big\{(\smiley,\maltese),(\maltese,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\maltese),(\maltese,\maltese)\Big\},\ \Big\{(\maltese,\maltese),(\maltese,\smiley)\Big\}, & 1/2 \\ \text{para } \Big\{(\smiley,\smiley),(\smiley,\maltese),(\maltese,\smiley)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\smiley),(\smiley,\maltese),(\maltese,\maltese)\Big\}, & 3/4 \\ \text{para } \Big\{(\smiley,\smiley),(\maltese,\smiley),(\maltese,\maltese)\Big\},\ \Big\{(\smiley,\maltese),(\maltese,\smiley),(\maltese,\maltese)\Big\} & 3/4 \end{cases} \tag{2.1}$$

Llamamos *espacio de probabilidad* a la terna

$$(S, \mathfrak{B}, P(\cdot))$$

es decir

espacio muestral: contiene *resultados elementales* del experimento aleatorio $\mathcal{E}$.

espacio de sucesos: contiene *sucesos* "de interés" y sus combinaciones (y, o, y no).

ley de probabilidad: indica *cuan probable es cada* suceso contenido en $\mathfrak{B}$.

2.1. Probabilidad condicionada

¿Cómo varía el espacio de probabilidad, $(S, \mathfrak{B}, P(\cdot))$, cuando disponemos de información adicional?

Información adicional: $A =$ "el primer lanzamiento ha sido cara"

1. el nuevo espacio muestral es: $S_A = \left\{(☺, ☺), (☺, ✠)\right\}$
2. el nuevo espacio de sucesos es:

$$\mathfrak{B}_A = \left\{S_A,\ \emptyset,\ (☺, ☺),\ (☺, ✠)\right\}$$

3. la nueva ley de probabilidad *condicionada*

$$P_A(\cdot) = \begin{cases} 1 & \text{para } S_A \\ 0 & \text{para } \emptyset \\ 1/2 & \text{para } B = \left\{(☺, ☺)\right\} \\ 1/2 & \text{para } C = \left\{(☺, ✠)\right\} \end{cases}$$

El nuevo espacio de probabilidad es

$$(S_A, \mathfrak{B}_A, P_A(\cdot))$$

¿Podemos derivar la nueva ley de probabilidad condicionada a partir de $(S, \mathfrak{B}, P(\cdot))$?

$$P_A(B) \equiv P(B \mid A) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2.2}$$

para $P(A) > 0$; donde $P(\cdot)$ es la ley de probabilidad original.

De (2.1) tenemos que

$$P_A\left(\left\{(\smiley, \smiley)\right\}\right) = P\,(\,B \mid A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P\,(A)} = \frac{P\left(\left\{(\smiley, \smiley)\right\}\right)}{P\left(\left\{(\smiley, \smiley), (\smiley, \maltese)\right\}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

tal como aparece más arriba.

Cuando el conocimiento del suceso A no afecta a las probabilidades del suceso B decimos que A y B son independientes.

Decimos que los sucesos A y B son independientes si:

$$P\left(A \mid B\right) = P\left(A\right) \tag{2.3}$$

Usando (2.2) podemos deducir que A y B son independientes si:

$$P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right). \tag{2.4}$$

Lanzamiento de dos monedas

- Espacio Muestral producto

$$\boldsymbol{S}_{(2)} = \{(☺, ☺), (☺, ✠), (✠, ☺), (✠, ✠)\}$$

- Leyes de probabilidad marginales

1ª moneda	☺	✠
$P(\cdot)$	$1/2$	$1/2$

2ª moneda	☺	✠
$P(\cdot)$	$2/3$	$1/3$

- Ley de probabilidad conjunta

(1ª moneda, 2ª moneda)	(☺,☺)	(☺,✠)	(✠,☺)	(✠,✠)
$\boldsymbol{P}_{(2)}(\cdot,\cdot)$	$2/6$	$1/6$	$2/6$	$1/6$

$\boldsymbol{P}_{(2)}(\cdot,\cdot)$		2ª moneda		
		☺	✠	$P_1(\cdot)$
1º moneda	☺	$2/6$	$1/6$	$1/2$
	✠	$2/6$	$1/6$	$1/2$
	$P_2(\cdot)$	$2/3$	$1/3$	1

¿Son independientes?

renta \ edad	$(18-35)$	$(36-55)$	$(56-70)$	$P_1(\cdot)$
pobre	0.20	0.10	0.15	
mediana	0.10	0.25	0.05	
rico	0.01	0.06	0.08	
$P_2(\cdot)$				1

1. ¿Quien soy?
2. ¿Que edad tengo?
3. ¿Que renta tengo?

3. Variables aleatorias

$\boxed{0.6}$

Variable aleatoria: función que asigna números a elementos del espacio muestral S, de manera tal que preserva la estructura de $\mathfrak{B}$ (y, o, y no).

$$\begin{aligned} X(\cdot): \qquad S &\longrightarrow \mathbb{R}_X \\ X(s) &\longrightarrow x; \quad \text{tal que } A_x \equiv \{s: \text{ tales que } X(s) \leq x\} \in \mathfrak{B} \end{aligned}$$

$\mathbb{R}_X$ es el *soporte* de X.

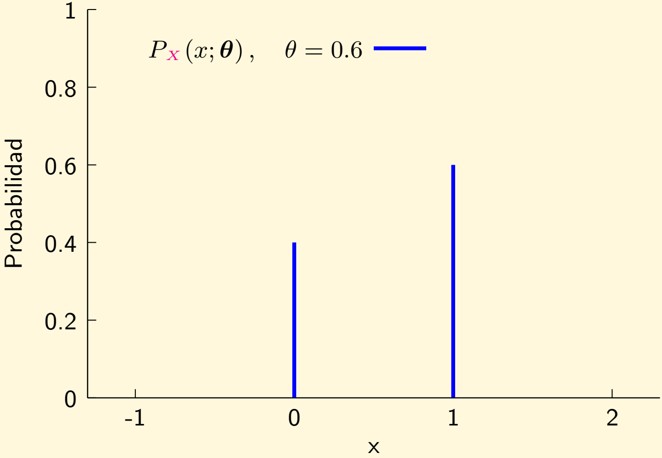
3.1. Variables aleatorias discretas

Función de cuantía:

$$P_X(x) = P(s:\ X(s) = x)$$

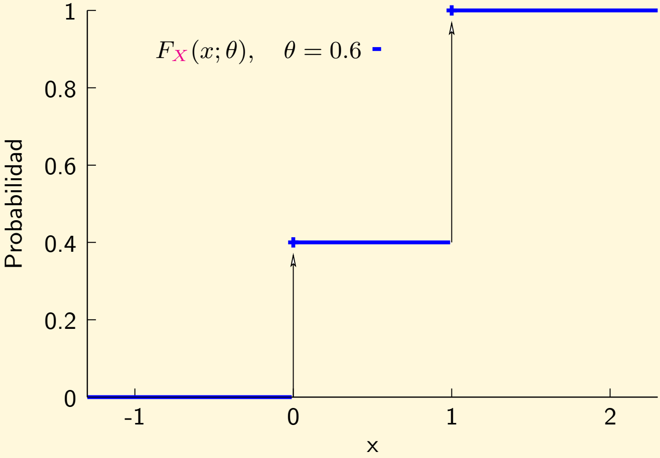
Función de distribución:

$$F_X(b) \equiv P(X \leq b) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{R}_X \\ x \leq b}} P_X(x) \tag{3.1}$$


$P_X(x;\boldsymbol{\theta})$, $\theta = 0.6$
Probabilidad
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-1
0
1
2
x

0.18

octave



$F_X(x;\theta)$, $\theta = 0.6$
Probabilidad
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-1
0
1
2

3.2. Variables aleatorias continuas

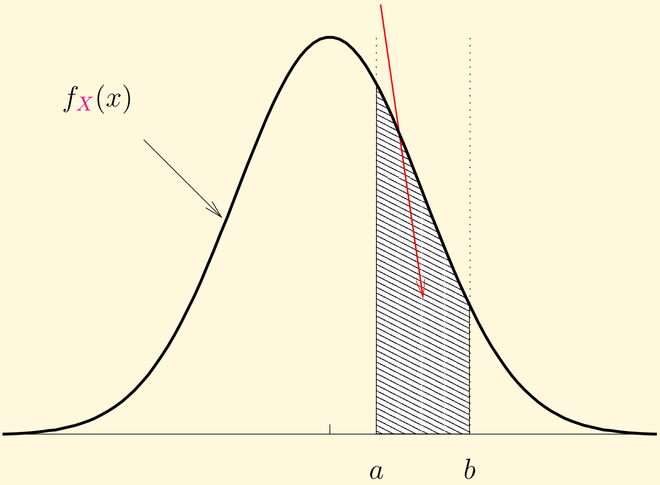
Función de distribución: $F_X(b) = P(X \leq b)$

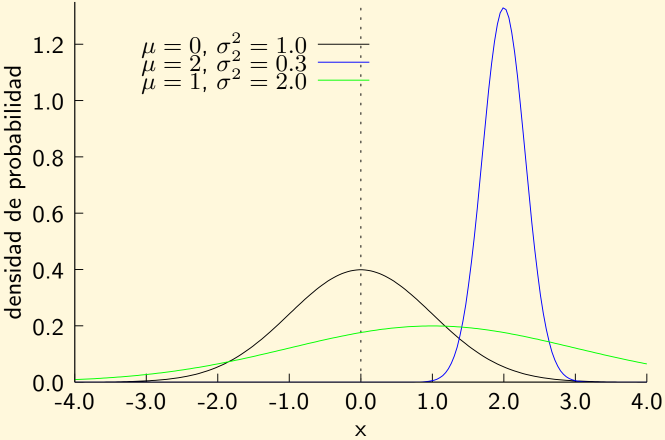
Función de densidad: $f_X(x)$, es una función continua y positiva que verifica

$$P(X \leq b) \equiv F_X(b) = \int_{\substack{x \in \mathbb{R}_X \\ x \leq b}} f_X(x)\, dx \quad \text{para todo } b \in \mathbb{R}_X.$$

Ya que $f_X(x)$ continua, tenemos: $\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$

$$P\,(a < x \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$





$\mu = 0,\ \sigma^2 = 1.0$
$\mu = 2,\ \sigma^2 = 0.3$
$\mu = 1,\ \sigma^2 = 2.0$
densidad de probabilidad
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-4.0 -3.0 -2.0 -1.0 0.0 1.0 2.0 3.0 4.0
x

EJERCICIO 1. **[Novales (1997, pp 159)]** Sea $f_X(x) = \frac{1}{72}x^2, \quad 0 < x < 6$

(a) verifique que $f_X(x)$ es una función de densidad

Solución:

$$\int_0^6 f_X(x)\,dx = \int_0^6 \frac{1}{72}x^2 dx = \frac{1}{72}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^6 = \frac{1}{72}\frac{216}{3} = 1$$

Ejercicio 1

(b) Calcule $P(X > 3)$

Solución:

$$P(X > 3) = \int_3^6 f_X(x)\,dx = \int_3^6 \frac{1}{72}x^2 dx = \frac{1}{72}\left.\frac{x^3}{3}\right|_3^6 = \frac{7}{8}$$

Ejercicio 1

(c) Calcule $P(X > 5)$

Solución:

$$P(X > 5) = \int_5^6 f_X(x)\,dx = \int_5^6 \frac{1}{72}x^2 dx = \frac{1}{72}\left.\frac{x^3}{3}\right|_5^6 = \frac{91}{216} = 0.421$$

Ejercicio 1

(d) Si A es el suceso $X > 5$ y B es el suceso $X > 3$ calcule $P(A \mid B)$. Compare con la probabilidad anterior.

Solución:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{91/216}{7/8} = \frac{13}{27} = 0.481$$

Por tanto, saber que X es mayor que 3 aumenta la probabilidad (condicionada a este hecho) de que $X > 5$.

Ejercicio 1

Ejercicio 2. **[Novales (1997, pp 167)]** Tomado el ejercicio anterior, calcule la función de distrubución.

Solución: La función de distribución es

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 \quad \text{para } a < 0 \\ \\ \int_0^a f_X(x)\,dx = \frac{1}{72}\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{72}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{216} \quad \text{para } 0 \leq a \leq 6 \\ \\ 1 \quad \text{para } a > 6 \end{cases}$$

Ejercicio 2

Con las variables aleatorias hemos logrado una enorme simplificación

$$(S, \mathfrak{B}, P(\cdot)) \xrightarrow{\ X(\cdot):S\to\mathbb{R}_X\ } (\mathbb{R}_X,\ F_X(x))$$

o mejor...

$$(S, \mathfrak{B}, P(\cdot)) \xrightarrow{\ X(\cdot):S\to\mathbb{R}_X\ } (\mathbb{R}_X,\ f_X(x))$$

Ejemplo: (Tasa variación índ. NASDAQ) Pasamos de modelo tipo $(S, \mathfrak{B}, P(\cdot))$

- S(result 1: a compraría n acciones A a precio...cuando ayer...),
- $\mathfrak{B}$(que ocurra resultado 1 y 2 pero no 3, etc.)
- $P(\cdot)$ (la probabilidad de que ocurra 1 y 2 pero no 3 es ...)

(a través mercado de valores) a otro más sencillo: Tasa de Variación NASDAQ se distribuye Normal[a].

$$(S, \mathfrak{B}, P(\cdot)) \xrightarrow{X(\cdot):S \to \mathbb{R}_X} (\mathbb{R}_X,\ f_X(x; \boldsymbol{\theta})),$$

donde $\mathbb{R}_X = (-\infty,\ \infty)$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu,\ \sigma^2)$ y

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

[a] en realidad su distribución es más parecida a una t-Student

$$\begin{aligned} S \rightarrow & \quad \mathbb{R}_X \\ (\mathfrak{B},\ P(\cdot)) \rightarrow & \quad \{f_X(x;\boldsymbol{\theta}),\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\} \end{aligned}$$

Llamamos Soporte al conjunto $\mathbb{R}_X$ de posibles valores de la v.a.

Llamamos Modelo de Probabilidad a la familia o colección de funciones de densidad

$$\Phi = \{f_X(x;\boldsymbol{\theta}),\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta},\ x \in \mathbb{R}_X\}$$

Llamamos Espacio Paramétrico al conjunto $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ de posibles valores de los parámetros de las funciones de densidad.

1. Postulamos a priori una familia de densidades como mecanismo estocástico subyacente.
   a) debemos elegir aquella familia más adecuada a los datos
      - histograma sugiere funcs. dens. $f_X(x; \boldsymbol{\theta})$ 0.8
      - datos pueden restringir
         - espacio paramétrico, $\boldsymbol{\Theta}$
         - el soporte, $\mathbb{R}_X$ $\mathbb{R}_X$ (si porcentaje, soporte $[0,\ 1]$)

2. Elegimos una familia, no una función en particular

$$\Phi = \{f_X(x; \boldsymbol{\theta}),\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta},\ x \in \mathbb{R}_X\}$$

   los parámetros son desconocidos.

3. Inferencia estadística ⇒ valores de los parámetros Tema 4 y siguientes.

4. Variables aleatorias bivariantes

Sean X e Y definidas sobre $(S_1, \mathfrak{B}_1, P_1(\cdot))$ y $(S_2, \mathfrak{B}_2, P_2(\cdot))$

Entonces, si definimos el conjunto de pares de sucesos:

$$(s, z) \in \mathfrak{B}_{(2)} \equiv \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2;$$

la función

$$Z(\cdot, \cdot): \quad \mathfrak{B}_{(2)} \to \mathbb{R}^2,$$

$$(s, z) \to (X(s), Y(z))$$

es un vector aleatorio (una v.a respecto a $\mathfrak{B}_{(2)}$); con soporte conjunto: $\mathbb{R}^2_{XY} \equiv \mathbb{R}_X \times \mathbb{R}_Y$.

El vector aleatorio (v.a. bivariante)

$$Z(\cdot,\cdot) = \big(X(\cdot), Y(\cdot)\big)$$

tiene función de distribución[a]:

$$F_{XY}(\cdot,\cdot) : \qquad \mathbb{R}^2_{XY} \longrightarrow [0,\ 1]$$
$$F_{XY}(x,y) \longrightarrow \mathbf{P}_{(2)}\big((s,z) : \text{ donde } X(s) \leq x \text{ y } Y(z) \leq y\big)$$

[a] *función de distribución conjunta* de X e Y

En el caso univariante: $P_X(x) \equiv P\,(s;\ \text{tales que } X(s) = x)$

En el caso bivariante:

$$P_{XY}(x,y) \equiv \mathbf{P}_{(2)}\big((s,z);\ \text{tales que } X(s) = x,\ Y(z) = y\big)$$

Lanzamiento de dos monedas:

$$\left.\begin{array}{ll} S_1 = & \{\maltese, \smiley\} \\ S_2 = & \{\maltese, \smiley\} \end{array}\right\} \quad \text{y con} \quad P(\maltese) = P(\smiley) = 1/2$$

Definamos las v.a.: *"sale cara"*, *"sale cruz"*:

$$\begin{array}{ll} X(\smiley,\smiley) = X(\smiley,\maltese) = X(\maltese,\smiley) = 1 & X(\maltese,\maltese) = 0 \\ Y(\maltese,\maltese) = Y(\smiley,\maltese) = Y(\maltese,\smiley) = 1 & Y(\smiley,\smiley) = 0 \end{array}$$

Las funciones de cuantía univariantes son:

x	0	1
$P_X(x)$	0.25	0.75

y	0	1
$P_Y(y)$	0.25	0.75

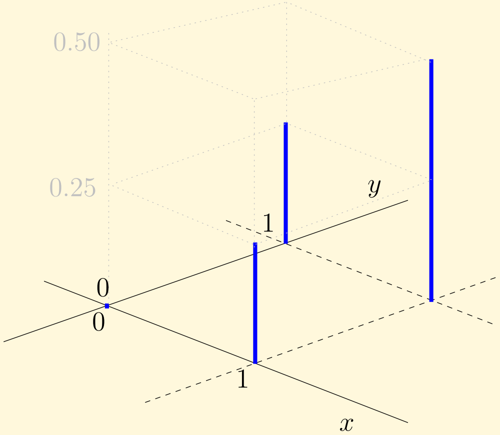
Sucesos que verifican: $(X = x,\ Y = y)$;
donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2_{XY} \ \equiv \ \mathbb{R}_X \times \mathbb{R}_Y$

$$
\begin{array}{lll}
(X = 0,\ Y = 0) \rightarrow \emptyset & \Rightarrow & P_{XY}(0,0) = 0, \\
(X = 0,\ Y = 1) \rightarrow \{(\maltese, \maltese)\} & \Rightarrow & P_{XY}(0,1) = 0.25, \\
(X = 1,\ Y = 0) \rightarrow \{(\smiley, \smiley)\} & \Rightarrow & P_{XY}(1,0) = 0.25, \\
(X = 1,\ Y = 1) \rightarrow \{(\smiley, \maltese), (\maltese, \smiley)\} & \Rightarrow & P_{XY}(1,1) = 0.50
\end{array}
$$

Es decir, función de cuantía conjunta:

$y \backslash x$	0	1
0	0	0.25
1	0.25	0.50

Función de cuantía conjunta refleja la dependencia (o independencia) entre las v.a.



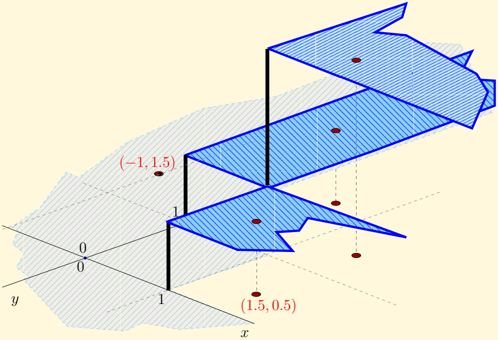
$\boxed{0.17}$

$P_{XY}(x,y)$	Y=0	Y=1
X= 0	0/4	1/4
X= 1	1/4	2/4

$$F_{XY}(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b)$$

$$\begin{aligned} F_{XY}(1.5,0.5) = & \quad P(X \leq 1.5, Y \leq 0.5) \\ = & \quad P_{XY}(0,0) + P_{XY}(1,0) \\ = & \quad 0 + 1/4 = 1/4 \end{aligned}$$

calcular otros puntos (por ejemplo (0,0), (1,1), (-1,1.5),. . .)



$\boxed{0.18}$

EJERCICIO 3. Sean X e Y variables aleatorias discretas con función de cuantía conjunta

$$P_{XY}(x, y) = c(2x + y)$$

donde $\mathbb{R}_X = \{0, 1, 2\}$ e $\mathbb{R}_Y = \{0, 1, 2, 3\}$

(a) Encuentre el valor de la constante c

Solución:

$y\backslash x$	0	1	2
0	$c \times 0$	$c \times 2$	$c \times 4$
1	$c \times 1$	$c \times 3$	$c \times 5$
2	$c \times 2$	$c \times 4$	$c \times 6$
3	$c \times 3$	$c \times 5$	$c \times 7$

la suma de las probabilidades de todas las casilla debe ser 1; por tanto $42c = 1$; es decir $c = \frac{1}{42}$. Así pues, la función de cuantía conjunta es:

$y\backslash x$	0	1	2
0	$0/42$	$2/42$	$4/42$
1	$1/42$	$3/42$	$5/42$
2	$2/42$	$4/42$	$6/42$
3	$3/42$	$5/42$	$7/42$

(b) Calcule $P_{XY}(2,1)$

Solución: Corresponde a la casilla última de la segunda fila, es decir, $5/42$.

Ejercicio 3

(c) Calcule $P(X \geq 1, Y \leq 2)$

Solución: Los casos que cumplen la condición son

$y\backslash x$	0	1	2
0	$0/42$	$\mathbf{2/42}$	$\mathbf{4/42}$
1	$1/42$	$\mathbf{3/42}$	$\mathbf{5/42}$
2	$2/42$	$\mathbf{4/42}$	$\mathbf{6/42}$
3	$3/42$	$5/42$	$7/42$

cuya probabilidad suma $24/42$.

Ejercicio 3

(d) Calcule $P(X + Y = 1)$

Solución:

$y\backslash x$	0	1	2
0	$0/42$	$\mathbf{2/42}$	$4/42$
1	$\mathbf{1/42}$	$3/42$	$5/42$
2	$2/42$	$4/42$	$6/42$
3	$3/42$	$5/42$	$7/42$

cuya probabilidad suma $3/42$.

Ejercicio 3

(e) Calcule $P\left(X+Y\leq 3\right)$

Solución:

$y\backslash x$	0	1	2
0	$\mathbf{0/42}$	$\mathbf{2/42}$	$\mathbf{4/42}$
1	$\mathbf{1/42}$	$\mathbf{3/42}$	$\mathbf{5/42}$
2	$\mathbf{2/42}$	$\mathbf{4/42}$	$6/42$
3	$\mathbf{3/42}$	$5/42$	$7/42$

cuya probabilidad suma $24/42$. Ejercicio 3

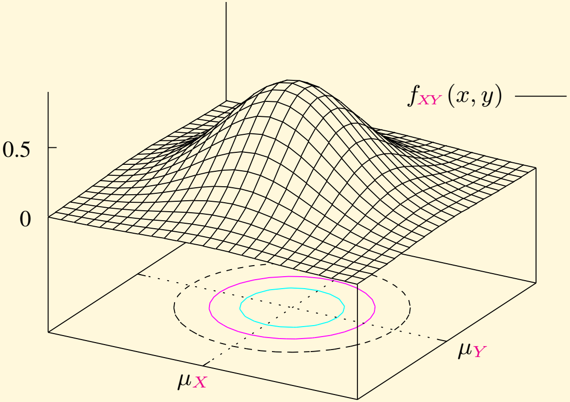
Función de densidad conjunta, $f_{XY}(x, y)$, de X e Y es la función contínua y positiva que verifica

$$P(X \leq a,\ Y \leq b) \equiv F_{XY}(a, b) = \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY} \\ x\leq a \\ y\leq b}} f_{XY}(x, y)\, dxdy$$

para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2_{XY}$.

Ya que $f_{XY}(x, y)$ continua, tenemos

$$\frac{\partial F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{XY}(x, y)\,.$$



0.20

EJERCICIO 4. La función de distribución conjunta de una exponencial bivariante es:

$$F_{XY}(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, \qquad x \geq 0,\ y \geq 0,$$

Calcule su función de densidad.

Solución:

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) &= \frac{d^2}{dxdy}\left(-e^{-y} + e^{-y-x} - e^{-x} + 1\right) \\ &= \frac{d}{dy}\left(e^{-x} - e^{-y-x}\right) = e^{-y-x}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5.

(a) Dibuje la siguiente función de densidad conjunta uniforme

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < 4 \text{ y } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

(b) Cuanto vale la "altura" k

Solución:

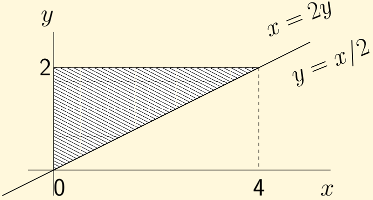
$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^4 f_{XY}(x,y)\, dx\ dy =& 1 \\ \int_0^2 4k\ dy =& 1 \\ 8k =& 1 \\ k =& 1/8 \end{aligned}$$

EJERCICIO 6. Sea la siguiente función de densidad

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < 2y < 4 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

(a) Calcule el valor de k

Solución: Hay dos posibilidades para resolverlo



1.

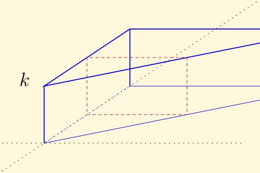
$$1 = \int_0^2 \int_0^{2y} k \; dx \; dy = 2k \int_0^2 y \; dy = 4 * k \quad \Rightarrow \quad \left[k = \frac{1}{4} \right]$$

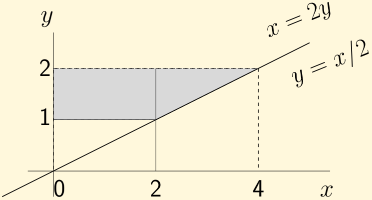
2.

$$1 = \int_0^4 \int_{x/2}^2 k \; dy \; dx = \frac{k \int_0^4 x \; dx}{2} = 4 * k \quad \Rightarrow \quad \left[k = \frac{1}{4} \right]$$

(b) Calcule $P\left(Y > 1\right)$.

Solución: De nuevo hay dos posibilidades





1.
$$P\left(Y > 1\right) = \int_1^2 \int_0^{2y} \frac{1}{4}\, dx\, dy = \frac{\int_1^2 y\, dy}{2} = \frac{3}{4}$$

2.
$$P\left(Y > 1\right) = \int_0^2 \int_1^2 \frac{1}{4}\, dy\, dx + \int_2^4 \int_{x/2}^2 \frac{1}{4}\, dy\, dx = \frac{\int_2^4 2 - \frac{x}{2}\, dx}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Ejercicio 6

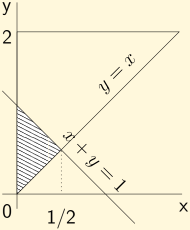
Solución numérica con octave

Ejercicio 7. Sea la función de densidad continua,

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < y < 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}.$$

Indique cómo calcularía la siguiente probabilidad: $P(X + Y \leq 1)$.

Solución: La región que cumple la condición es



Por tanto: $P(X + Y \leq 1) = \int_0^{1/2} \int_x^{1-x} k \; dy \; dx$ Ejercicio 7

Calculo numérico de la probabilidad con octave

Ejercicio 8. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ para algún valor concreto de k:

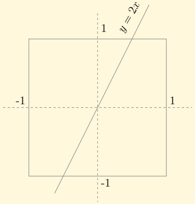
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } -1 < x < 1;\ -1 < y < 1 \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

Determine la probabilidad de los siguientes eventos:

(a) $2X - Y > 0.$

Solución: Puesto que el área del soporte es 4, y la función de densidad es **uniforme**; para que $f_{XY}(x, y)$ sea una función de densidad k (la altura) debe ser igual a $1/4$.

El suceso $2X - Y > 0$ divide el espacio de sucesos (el cuadrado de la figura) en dos áreas iguales; y como la distribución es uniforme, cada una de ellas tiene probabilidad igual a $1/2$

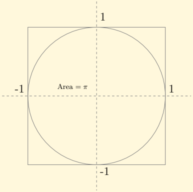


(b) $X^2 + Y^2 < 1$

Pista. $X^2 + Y^2 < r$ define un círculo de radio r centrado en $(0,\ 0)$, y con área igual a πr^2.

Solución: La probabilidad de $X^2 + Y^2 < 1$ es igual al volumen del cilindro con base de área $\pi \times 1^2 = \pi$ y altura $1/4$, es decir,

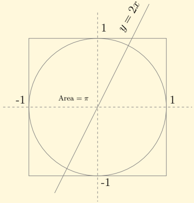
$$P\left(X^2 + Y^2 < 1\right) = \text{base} \times \text{altura} = \frac{\pi}{4}$$



Ejercicio 8

(c) $X^2 + Y^2 < 1$, y simultáneamente $2X - Y > 0$.

Solución: Por el mismo argumento, la probabilidad del suceso conjunto $X^2 + Y^2 < 1$ y $2X - Y > 0$ es la mitad de la probabilidad del suceso $X^2 + Y^2 < 1$; por lo tanto igual a $\frac{\pi}{8}$.



Ejercicio 8

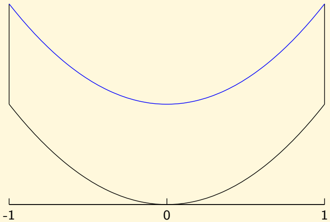
Calculo numérico de la probabilidad con octave

Ejercicio 9. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta $f_{XY}(x,y)$. La integral sobre su soporte conjunto $\mathbb{R}_{XY}$ es:

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{x^2+1} f_{XY}(x,y)\,dy\ dx.$$

Dibuje el soporte $\mathbb{R}_{XY}$.

Solución:



Ejercicio 9

caso continuo (función de densidad)

fb1. $f_{XY}(x,y) \begin{cases} \geq 0 \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2_{XY} \\ = 0 \text{ en el resto de casos} \end{cases}$

fb2. $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2_{XY}} f_{XY}(x,y)\, dydx = 1$

fb3. $\displaystyle F_{XY}(a,b) = \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY} \\ x\leq a;\ y\leq b}} f_{XY}(x,y)\, dydx,$

caso discreto (función de cuantía)

fb1. $P_{XY}(x,y) \begin{cases} \geq 0 \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2_{XY} \\ = 0 \text{ en el resto de casos} \end{cases}$

fb2. $\sum\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} P_{XY}(x,y) = 1$

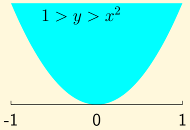
fb3. $F_{XY}(a,b) = \sum\sum_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY} \\ x\leq a;\ y\leq b}} P_{XY}(x,y)$

Ejercicio 10. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta $f_{XY}(x,y)$. La integral sobre su soporte conjunto $\mathbb{R}_{XY}$ es:

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} f_{XY}(x,y)\,dy\;dx = 1.$$

Dibuje el soporte $\mathbb{R}_{XY}$.

Solución:



Ejercicio 10

5. Distribuciones marginales

Sea la siguiente función de cuantía conjunta:

$y \backslash x$	0	1	2
0	0.2	0.2	0.2
2	0.1	0.1	0.2

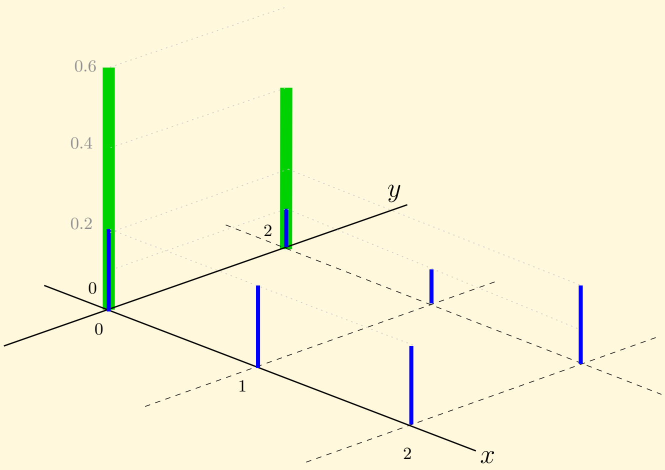
Las funciones de cuantía marginales son:

x	0	1	2
$P_X(x)$	0.3	0.3	0.4

y	0	2
$P_Y(y)$	0.6	0.4

Nótese que funciones de cuantía marginales son leyes de probabilidad (suman 1)!

$P_Y(y)$



$P_{XY}(x,y)$ contiene información sobre la relación entre X e Y.

Puesto que son posibles muchos tipos de relación entre X e Y; en general, no es posible partiendo de $P_X(x)$ y $P_Y(y)$ obtener $P_{XY}(x,y)$

(sería necesario decir, además, como se relacionan X e Y)

(lo mismo se puede decir en el caso contínuo)

Siempre es posible deducir $P_X(x)$ y $P_Y(y)$ a partir de $P_{XY}(x, y)$:

Caso discreto:

Función de cuantía marginal de X

$$P_X(x_i) = \sum_{y_j \in \mathbb{R}_Y} P_{XY}(x_i, y_j)$$

Función de cuantía marginal de Y

$$P_Y(y_i) = \sum_{x_i \in \mathbb{R}_X} P_{XY}(x_i, y)$$

Caso continuo:

$$f_X(x) = \int_{y \in \mathbb{R}_Y} f_{XY}(x, y)\, dy$$

EJERCICIO 11. **[Continuación del Ejercicio 3 en la página˜60]**

Calcule las funciones marginales de la siguiente función de cuantía conjunta

$y\backslash x$	0	1	2
0	$0/42$	$2/42$	$4/42$
1	$1/42$	$3/42$	$5/42$
2	$2/42$	$4/42$	$6/42$
3	$3/42$	$5/42$	$7/42$

Solución:

$y\backslash x$	0	1	2	$\mathbf{P_Y(y)}$
0	$0/42$	$2/42$	$4/42$	$\mathbf{6/42}$
1	$1/42$	$3/42$	$5/42$	$\mathbf{9/42}$
2	$2/42$	$4/42$	$6/42$	$\mathbf{12/42}$
3	$3/42$	$5/42$	$7/42$	$\mathbf{15/42}$
$\mathbf{P_X(x)}$	$\mathbf{6/42}$	$\mathbf{14/42}$	$\mathbf{22/42}$	

Ejercicio 11

EJERCICIO 12. **[Continuación del Ejercicio 6 en la página˜67]**
Calcule las funciones de densidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

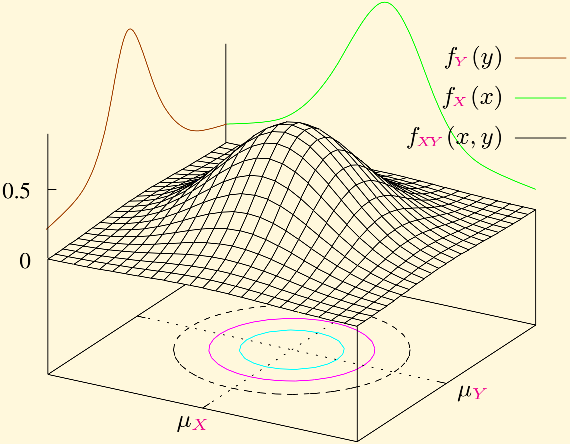
Calculo numérico con octave

Solución:

$$f_X(x) = \int_{x/2}^{2} f_{XY}(x,y)\,dy = \frac{2-\frac{x}{2}}{4} \qquad \text{para } 0 < x < 4$$

$$f_Y(y) = \int_{0}^{2y} f_{XY}(x,y)\,dx = \frac{y}{2} \qquad \text{para } 0 < y < 2$$

Ejercicio 12



Leyes de prob. marginales pierden la información de otras variables
Son leyes de probabilidad (integran 1)! Calculo numérico con octave

6. Distribuciones condicionadas

6.1. Caso discreto

$$P\,(A \mid B) \equiv \frac{P\,(A \cap B)}{P\,(B)} \quad \text{siempre que } P\,(B) > 0.$$

$$P_X\,(x)\,, \qquad P_{XY}\,(x, y)$$

$$P_{Y|X}\,(y \mid b) \equiv \frac{P_{XY}\,(b, y)}{P_X\,(b)}$$

para un valor b fijo, y $P_X\,(b) \neq 0$

$P_{Y|X}\,(y \mid b)$ es función de y.

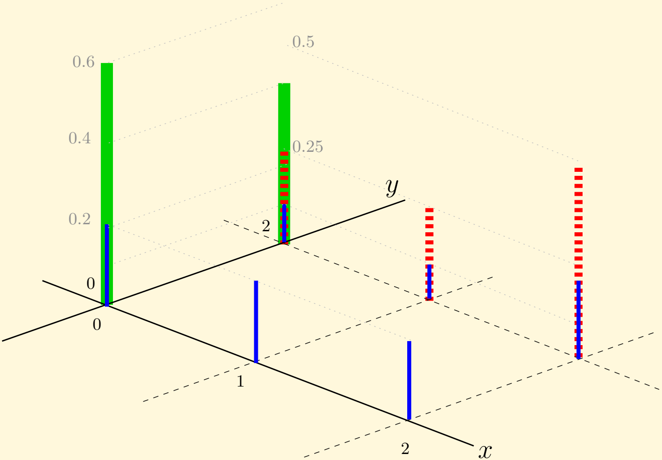
Funciones de cuantía condicionales son leyes de probabilidad (suman 1)!

$y \backslash x$	1	2	3	$P_Y(y)$
0	0.20	0.10	0.15	
1	0.10	0.25	0.05	
2	0.01	0.06	0.08	
$P_X(x)$				1

$X = 1 :\ (18 - 35)$ $X = 2 :\ (36 - 55)$ $X = 3 :\ (56 - 70)$

$Y = 0 :$ pobre $Y = 1 :$ renta intermedia $Y = 2 :$ rico

1. ¿Quien soy?
2. ¿Que edad tengo?
3. ¿Que edad tengo si conducía un Porsche?



$P_{X|Y}(x \mid 2)$

EJERCICIO 13. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta, donde X e Y pueden tomar los valores 0,1,2,3. La variable aleatoria Y hace referencia a los cambios en los ingresos, mientras que X hace mención a los cambios en los gastos en publicidad. Definimos las variables de la siguiente manera: $Y = 0$ si las ventas caen, $Y = 1$ si las ventas se mantienen, $Y = 2$ si las ventas suben, pero menos de un 10 %, $Y = 3$ si suben más de un $10\,\%$. De manera análoga definimos X. La ley de probabilidad conjunta viene dada por $P_{XY}(x, y) = k(3 - x + y)$.

(a) Halle el valor de k para que $P_{XY}(x, y)$ sea una verdadera ley de probabilidad.

Solución: Tenemos que $\sum\sum k(3 - x + y) = 48k$, por lo que $k = 1/48$.

Ejercicio 13

(b) Para el correcto valor de k, represente en una tabla de doble entrada la función de cuantía de la variable aleatoria bidimensional.

Solución:

$Y \setminus X$	0	1	2	3
0	3/48	2/48	1/48	0
1	4/48	3/48	2/48	1/48
2	5/48	4/48	3/48	2/48
3	6/48	5/48	4/48	3/48

que como se puede comprobar suma 1.

Ejercicio 13

(c) Calcule las leyes de probabilidad marginales de X e Y. Según esta información, ¿es más probable que las ventas bajen, se mantengan o suban?

Solución: Las leyes de probabilidad marginales de X e Y vienen dadas por:

$$P_X(x) \equiv \sum_{y_j \in \mathbb{R}_Y} P_{XY}(x, y_j) = \sum_{y_j=0}^{3} P_{XY}(x, y_j) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}_X$$

$$P_Y(y) \equiv \sum_{x_j \in \mathbb{R}_X} P_{XY}(x_j, y) = \sum_{x_j=0}^{3} P_{XY}(x_j, y) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}_Y$$

es decir,

X	0	1	2	3
$P_X(x)$	18/48	14/48	10/48	6/48

Y	0	1	2	3
$P_Y(y)$	6/48	10/48	14/48	18/48

Por lo tanto,

- $P(\text{caer}) = P_Y(0) = 0.125$
- $P(\text{mantener}) = P_Y(1) = 0.208$
- $P(\text{subir}) = P_Y(2) + P_Y(3) = 0.667$;

Es más probable que suban. Esta probabilidad está calculada sobre la base de las leyes de probabilidad marginales de Y. Esto es, no tenemos ninguna información precisa acerca de la realización de la variable aleatoria X. Dicha información nos podría ayudar a ser más precisos en el cálculo de estas probabilidades.

Ejercicio 13

(d) Halle las leyes de probabilidad condicionadas de Y con respecto a los diferentes valores que pueda tomar X. ¿Varían entre ellas y con respecto a la ley de probabilidad marginal de Y? ¿Que significa la respuesta a la pregunta anterior? Si $X = 0$, ¿cambiaría la respuesta cualitativa del apartado anterior? ¿Y si $X = 2$?

Solución: Las leyes de probabilidad condicionadas están resumidas en la siguiente tabla. Nótese que tenemos 4 posibles variables aleatorias, una para cada posible valor de X. Para cada una de estas v.a. tenemos una ley de probabilidad condicionada.

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
	$P_{Y\|X}(y\,\|\,0)$	$P_{Y\|X}(y\,\|\,1)$	$P_{Y\|X}(y\,\|\,2)$	$P_{Y\|X}(y\,\|\,3)$
$Y=0$	3/18	2/14	1/10	0
$Y=1$	4/18	3/14	2/10	1/6
$Y=2$	5/18	4/14	3/10	2/6
$Y=3$	6/18	5/14	4/10	3/6

Usando la ley de probabilidades apropiada en cada caso:

Si $X=0$:

- $P\,(\text{caer}\,|\,X=0)=P_{Y|X}\,(0\,|\,0)=0.167$
- $P\,(\text{mantener}\,|\,X=0)=P_{Y|X}\,(1\,|\,0)=0.222$
- $P\,(\text{subir}\,|\,X=0)=P_{Y|X}\,(2\,|\,0)+P_{Y|X}\,(3\,|\,0)=0.611$

Si $X=1$:

- $P\,(\text{caer}\,|\,X=1)=P_{Y|X}\,(0\,|\,1)=0.143$
- $P\,(\text{mantener}\,|\,X=1)=P_{Y|X}\,(1\,|\,1)=0.214$
- $P\,(\text{subir}\,|\,X=1)=P_{Y|X}\,(2\,|\,1)+P_{Y|X}\,(3\,|\,1)=0.643$

Si $X=2$:

- $P\,(\text{caer}\,|\,X=2)=P_{Y|X}\,(0\,|\,2)=0.1$
- $P\,(\text{mantener}\,|\,X=2)=P_{Y|X}\,(1\,|\,2)=0.2$

- $P\,(\text{subir} \mid X = 2) = P_{Y|X}\,(2 \mid 2) + P_{Y|X}\,(3 \mid 1) = 0.7$

Si $X = 3$:

- $P\,(\text{caer} \mid X = 3) = P_{Y|X}\,(0 \mid 3) = 0$
- $P\,(\text{mantener} \mid X = 3) = P_{Y|X}\,(1 \mid 3) = 0.167$
- $P\,(\text{subir} \mid X = 3) = P_{Y|X}\,(2 \mid 3) + P_{Y|X}\,(3 \mid 3) = 0.833$

Las probabilidades han cambiado. Esto nos indica que las variables son dependientes. Nueva información sobre X hace cambiar las leyes de probabilidad sobre los ingresos.

Ejercicio 13

(e) Según el apartado anterior, ¿para qué valor de X es más probable que las ventas aumenten más de un $10\,\%$? ¿Para qué valor de X es más probable que las ventas caigan? ¿Nos da esto alguna indicación del posible signo de la relación entre las dos variables?

Solución: La probabilidad de que los ingresos suban aumenta a medida que el gasto en publicidad es mayor

$$P\,(\text{subir}\,|\,X=0) < P\,(\text{subir}\,|\,X=1) < P\,(\text{subir}\,|\,X=2) < P\,(\text{subir}\,|\,X=3)\,.$$

Mientras que la probabilidad de que los ingresos caigan crece cuanto menor son los gastos en publicidad.

$$P\,(\text{caer}\,|\,X=0) > P\,(\text{caer}\,|\,X=1) > P\,(\text{caer}\,|\,X=2) > P\,(\text{caer}\,|\,X=3)\,.$$

Así pues, podemos sospechar que la relación entre X e Y es positiva; es decir, cuando mayor es X, mayor es la probabilidad de tener valores altos en Y y viceversa.

Ejercicio 13

(f) Definamos $Z = Y - X$. ¿Cuál es la probabilidad de que $Z > 0$? ¿Y de que $Z = 0$? ¿Y de $Z < 0$?

Solución: Reescribimos las probabilidades de Z en términos de una relación entre X e Y. De este modo podemos usar la información sumistrada por la ley de probabilidad conjunta, que sí es conocida. Así

$$
\begin{aligned}
P(Z > 0) = P(Y > X) \\
= P_{XY}(0,1) + P_{XY}(0,2) + \cdots + P_{XY}(2,3) \\
= 28/48 = 0.583
\end{aligned}
$$

Nótese que la diagonal principal muestra el caso en que $X = y$, o sea $Z = 0$. Lo que está por debajo de la diagonal principal son los casos en que $Y > X$ $(Z > 0)$ y por encima de la diagonal principal los casos en que $Y < X$ $(Z < 0)$. De manera análoga:

$$P(Z = 0) = P(Y = X) = 12/48 = 0.250; \quad P(Z < 0) = P(Y < X) = 8/48 = 0.167$$

Ejercicio 13

(g) ¿Cómo cambian las respuestas del apartado anterior si $X = 0$, ó $X = 1$, ó $X = 2$ ó $X = 3$ (use la información de las probabilidades condicionadas?)

Solución: Tenemos que reescribir estas probabilidades en términos de las leyes de probabilidad condicionadas:

Si $X = 0$:

$$\begin{aligned} P(Z > 0 \mid X = 0) = P(Y - X > 0 \mid X = 0) \\ = P_{Y|X}(1 \mid 0) + P_{Y|X}(2 \mid 0) + P_{Y|X}(3 \mid 0) \\ = 15/18 = 0.833 \end{aligned}$$

$$P(Z = 0 \mid X = 0) = 3/18 = 167$$

De manera análoga lo haríamos para los demás posibles valores de X.

A lo largo de todo el problema la clave ha estado en identificar correctamente la variable aleatoria (marginal, condicionada o conjunta) sobre la que nos estamos preguntando y usar en cada momento la ley de probabilidades asociada a ella.

Ejercicio 13

6.2. Caso continuo

La probalidad del suceso A condicionada al suceso B se define como

$$P\,(\,A\,|\;B) \equiv \frac{P\,(A \cap B)}{P\,(B)}, \quad \text{siempre que } P\,(B) > 0.$$

El siguiente ejercicio puede resolverse aplicando lo anterior ya que la probabilidad de la condición es mayor que cero:

EJERCICIO 14. Sea la función de densidad bivariante

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto del plano} \end{cases}.$$

Calcule $P\left(0.2 \leq X \leq 0.4 \mid Y < 0.5\right)$.

Solución: Por una parte

$$P\left(0.2 \leq X \leq 0.4 \mid Y < 0.5\right) = \frac{P(0.2 \leq X \leq 0.4) \cap P(Y < 0.5)}{P(Y < 0.5)}.$$

Por otra

$$f_Y(y) = \int_y^1 2(x+y)\ dx = 1 + 2y - 3y^2;$$

por tanto

$$P(Y < 0.5) = \int_0^{0.5} 1 + 2y - 3y^2\ dy = 0.625,$$

y

$$P(0.2 \leq X \leq 0.4) \cap P(Y < 0.5) = \int_{0.2}^{0.4} \int_0^x 2(x+y)\ dydx = 0.056.$$

Así pues,

$$P\left(0.2 \leq X \leq 0.4 \mid Y < 0.5\right) = \frac{0.056}{0.625} = 0.0896.$$

Sin embargo, si la pregunta al ejercicio anterior hubiera sido calcular

$$P\,(\,0.2 \leq X \leq 0.4\,|\,Y = 0.5)\,;$$

y puesto que Y es una función contínua y por tanto $P\,(Y = 0.5) = 0$, entonces la estrategia anterior no hubiera sido posible ya que la probabilidad de la condición es cero.

Función de densidad condicionada

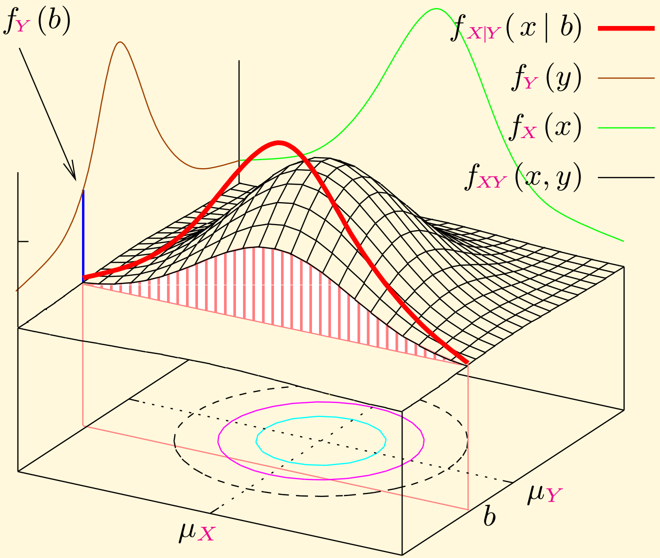
$$f_{Y|X}(y \mid a) \equiv \frac{f_{XY}(a,y)}{f_X(a)}$$

Función de distribución condicionada

$$F_{Y|X}(b \mid a) \equiv \int_{\substack{(a,y)\in\mathbb{R}^2_{XY} \\ y<b}} f_{Y|X}(y \mid a)\, dy = \int_{\substack{(a,y)\in\mathbb{R}^2_{XY} \\ y<b}} \frac{f_{XY}(a,y)}{f_X(a)} dy$$

para un valor a fijo, y $f_X(a) \neq 0$

Funciones de densidad condicionales son leyes de probab. (integran 1)!


$f_Y(b)$
$f_{X|Y}(x \mid b)$
$f_Y(y)$
$f_X(x)$
$f_{XY}(x,y)$
μ_X
μ_Y
b

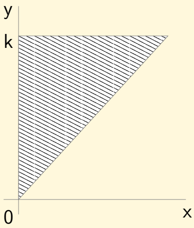
EJERCICIO 15. Sean X e Y con función de densidad uniforme igual a 2 en el triángulo $0 \leq x \leq y \leq k$, es decir,

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{para } 0 \leq x \leq y \leq k \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcule lo siguiente:

(a) El valor de k para que $f_{XY}(x,y)$ sea un función de densidad

Solución: El soporte es



Por ser la distribución uniforme sobre el soporte triangular, la doble integral coincide con el volumen del "quesito" sobre dicho soporte, que debe ser igual a uno. El volumen es igual en este caso (distribución uniforme) a la superficie del triángulo multiplicada por la altura de la función, que es 2. Por tanto $superficie \times altura = superficie \times 2 = 1$ de donde sabemos que la superficie es 1/2. Puesto que la superficie de un triángulo es base por altura dividido por dos. Y en este caso base y altura son iguales a k, necesariamente $k = 1$.

Otra forma de calcular más general es

$$\int_0^k \int_x^k 2dydx = \int_0^k [2y]_x^k = \int_0^k 2k - 2xdx =$$

$$= \left[2kx - x^2\right]_0^k = 2k^2 - k^2 = k^2 = 1$$

de donde $k = 1$.

Ejercicio 15

(b) Las funciones marginales de X e Y

Solución:

$$f_X(x) = \int_x^1 2dy = 2(1-x); \text{ para } x \in [0,\ 1]$$
$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y; \text{ para } y \in [0,\ 1]$$

Ejercicio 15

(c) Las funciones de densidad condicionadas $f_{Y|X}(y \mid a)$ y $f_{X|Y}(x \mid b)$

Solución:

$$f_{X|Y}(x \mid b) = \frac{f_{XY}(x,b)}{f_Y(b)} = \frac{1}{b}; \text{ para } 0 \leq x \leq b$$
$$f_{Y|X}(y \mid a) = \frac{f_{XY}(a,y)}{f_X(a)} = \frac{1}{1-a}; \text{ para } a \leq y \leq 1$$

Ejercicio 15

(d) $P\left(Y > \frac{1}{2} \,\middle|\, X = a\right)$ para cualquier valor factible $a \in \mathbb{R}_X$

Solución:

$$P\left(Y > \frac{1}{2} \,\middle|\, X = a\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq \frac{1}{2} \\ \int\limits_{1/2}^{1} f_{Y|X}(y \mid a)\; dy = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{1}{1-a} dy = \frac{0.5}{1-a} & \text{si } a < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 15

(e) $P\left(X > \frac{1}{2} \,\middle|\, Y = b\right)$ para cualquier valor factible $b \in \mathbb{R}_Y$

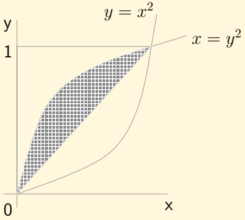
Solución:

$$P\left(X > \frac{1}{2} \,\middle|\, Y = b\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \leq \frac{1}{2} \\ \int\limits_{1/2}^{b} f_{X|Y}(x \mid b)\; dx = \int\limits_{1/2}^{b} \frac{1}{b} dx = 1 - \frac{1}{2b} & \text{si } b > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 15

(f) $P\left(Y > X^2,\ X > Y^2\right)$

Solución: El área a integrar es



es decir

$$P\left(Y > X^2,\ X > Y^2\right) = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} 2dxdy = \int_0^1 \left[2x\right]_{y^2}^{y} dy =$$

$$= \int_0^1 2y - 2y^2 dy = \left[y^2 - \frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

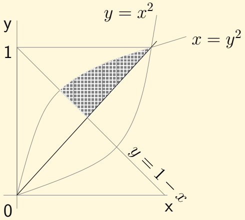
Ejercicio 15

(g) Sin realizar más cálculos, podría decir cual es la probabilidad de

$$P\left(Y > X^2,\ X > Y^2,\ Y > 1 - X\right)$$

(con decir en que proporción es mayor, menor (o igual) a la anterior probabilidad es suficiente) ¿Y si $f_{XY}(x, y)$ no fuera uniforme?

Solución: El área a integrar es



que es exactamente la mitad del área anterior, por lo tanto, la probabilidad es exactamente la mitad de la calculada en el apartado anterior.

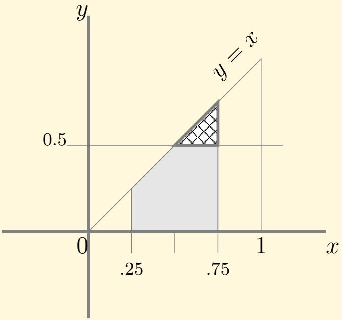
Si la función de densidad no fuera uniforme, la mitad del área no implicaría necesariamente mitad de la probabilidad, ya que habría regiones con mayor densidad de probabilidad que otras. Ejercicio 15 Continuación en el EJERCICIO **??** en la página~??.

EJERCICIO 16. Sea la siguiente función de densidad

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}.$$

¿Cómo calcularía la probabilidad condicionada $P(Y > 0.5 \mid X \in (0.25,\ 0.75))$?
(NO lo calcule, pero indique correctamente los órdenes de integración)

Solución: Hay varias posibles respuestas dependiendo del orden en que se integran las variables. Aqui presentamos dos posibles respuestas



1. La probabilidad condicionada $P\left(Y > 0.5 \,|\, X \in (0.25,\ 0.75)\right)$ es

$$\frac{\int_{0.5}^{0.75}\int_{y}^{0.75} f_{XY}(x,y)\ dx\ dy}{\int_{0.25}^{0.75}\int_{0}^{x} f_{XY}(x,y)\ dy\ dx} = \frac{\int_{0.5}^{0.75}\int_{y}^{0.75} f_{XY}(x,y)\ dx\ dy}{\int_{0.25}^{0.75} f_{X}(x)\ dx}$$

donde la función de densidad marginal de X es $f_X(x) = \int_0^x f_{XY}(x,y)\ dy$.

2. La probabilidad condicionada: $P\left(Y > 0.5 \,|\, X \in (0.25,\ 0.75)\right)$ es

$$\frac{\int_{0.5}^{0.75}\int_{0.5}^{x} f_{XY}(x,y)\ dy\ dx}{\int_{0.25}^{0.75}\int_{0}^{x} f_{XY}(x,y)\ dy\ dx} = \frac{\int_{0.5}^{0.75}\int_{0.5}^{x} f_{XY}(x,y)\ dy\ dx}{\int_{0.25}^{0.75} f_{X}(x)\ dx}$$

donde la función de densidad marginal de X es $f_X(x) = \int_0^x f_{XY}(x,y)\ dy$.

Ejercicio 16

7. Independencia

$$\left.\begin{array}{ll} P(A \mid B) = P(A)\,; & P(B) \neq 0 \\ P(B \mid A) = P(B)\,; & P(A) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Caso discreto:

$$P_{Y|X}(y \mid x) = P_Y(y) \text{ para cualquier } x;$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{P_{XY}(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)}$$

Caso continuo:

$$f_{Y|X}(Y \mid x) = f_Y(y) \text{ para cualquier } x;$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)}$$

convertir test en ejercicio

Test. Conteste a la siguiente cuestión.

1. Sean X e Y con $f_{XY}(x,y) = e^{-x-y}$ donde x e y son mayores que cero (exponencial bivariante).

(a) X e Y son independientes

(b) X e Y NO son independientes

Solución:Puesto que

$$f_X(x) = \int_0^\infty e^{-x-y} dy = e^{-x}$$

y

$$f_Y(y) = \int_0^\infty e^{-x-y} dx = e^{-y}.$$

Entonces

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-x} \cdot e^{-y} = e^{-x-y} = f_{XY}(x,y)$$

Fin 1

EJERCICIO 17. Sean dos variables aleatorias discretas, (X,Y), que reflejan la siguiente información: $X = 1$ si se da un shock positivo de demanda en la economía y $X = -1$ si el shock es negativo; $Y = 1$ si el salario real sube, $Y = -1$ si el salario real baja e $Y = 0$ si se mantiene. La rigidez salarial implica que los salarios reales no se ven afectados por shocks de demanda. Según la siguiente tabla de probabilidades conjuntas, ¿podríamos afirmar que los salarios reales son rígidos en esta economía?

$P_{XY}(x,y)$		Y = -1	Y = 0	Y = 1
X	-1	1/18	3/18	2/18
	1	2/18	6/18	4/18

Solución: Salarios rígidos significa que X e Y son independientes, es decir, que

$$P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

para todo x e y. Puesto que las funciones de cuantía marginales son:

$P_X(x) = \begin{cases} 6/18 & \text{si } X = -1 \\ 12/18 & \text{si } X = 1 \end{cases}$, y $P_Y(y) = \begin{cases} 3/18 & \text{si } Y = -1 \\ 9/18 & \text{si } Y = 0 \\ 6/18 & \text{si } Y = 1 \end{cases}$; cuyo producto coincide con la función de cuantía conjunta; **los salarios reales son rígidos**

8. Momentos conjuntos

$$\mathrm{E}\left(g(X,Y)\right) = \sum\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} g(x,y)\cdot P_{XY}(x,y)$$

Respecto al origen:

$$a_{rm} = \mathrm{E}_{XY}\left(X^r Y^m\right) = \sum\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} x^r y^m \cdot P_{XY}(x,y)$$

para $r,\ m = 0, 1, 2, \ldots$

Respecto al valor esperado:

$$\begin{aligned}\mu_{rm} &= \mathrm{E}_{XY}\left([X-\mathrm{E}_X(X)]^r[Y-\mathrm{E}_Y(Y)]^m\right)\\ &= \sum\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} (x-\mu_X)^r(y-\mu_Y)^m \cdot P_{XY}(x,y)\end{aligned}$$

para $r,\ m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{E}\left(g(X,Y)\right) = \iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} g(x,y)\cdot f_{XY}(x,y;\boldsymbol{\theta})\,dx\,dy$$

Respecto al origen:

$$a_{rm} = \mathrm{E}_{XY}\left(X^r Y^m\right) = \iint_{\mathbb{R}^2_{XY}} x^r y^m f_{XY}(x,y)\,dydx$$

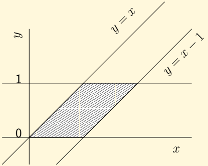
para $r,\ m = 0, 1, 2, \ldots$

Respecto al valor esperado:

$$\begin{aligned}\mu_{rm} &= \mathrm{E}_{XY}\left([X-\mathrm{E}_X(X)]^r[Y-\mathrm{E}_Y(Y)]^m\right)\\ &= \iint_{\mathbb{R}^2_{XY}} (x-\mu_X)^r(y-\mu_Y)^m f_{XY}(x,y)\,dydx\end{aligned}$$

para $r,\ m = 0, 1, 2, \ldots$

EJERCICIO 18. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta $f_{XY}(x,y)$; y cuyo soporte conjunto $\mathbb{R}_{XY}$ aparece en la siguiente figura:



Indique cómo calcularía $\mathrm{E}(X)$ (indique correctamente los límites de integración).

Solución:

$$\int_0^1 \int_y^{y+1} x \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\ dy.$$

o también

$$\int_0^1 \int_0^x x \cdot f_{XY}(x,y)\, dy\ dx + \int_1^2 \int_{x-1}^1 x \cdot f_{XY}(x,y)\, dy\ dx.$$

Ejercicio 18

8.1. Propiedades de los momentos bivariantes

$$\mathrm{E}_{XY}(X+Y) = \mathrm{E}_{X}(X) + \mathrm{E}_{Y}(Y)$$

$$\mathrm{E}_{XY}(X-Y) = \mathrm{E}_{X}(X) - \mathrm{E}_{Y}(Y)$$

$$\mathrm{E}_{X}(aX) = a \cdot \mathrm{E}_{X}(X)$$

y si X e Y son independientes

$$\mathrm{E}_{XY}(X \cdot Y) = \mathrm{E}_{X}(X) \cdot \mathrm{E}_{Y}(Y)$$

Proposición 8.1. $\mathrm{E}_{XY}(g(X)) = \mathrm{E}_X(g(X))$ *donde* $f_{XY}(x,y) \neq 0$ *para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{XY}$ *y* $f_{XY}(x,y) = 0$ *en el resto de casos.*

Demostración.

$$\mathrm{E}_{XY}(g(X)) = \iint\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} g(x) f_{XY}(x,y)\, dydx = \iint\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} g(x) f_{Y|X}(Y \mid x) \cdot f_X(x)\, dydx$$

$$= \int\limits_{x\in\mathbb{R}_X} g(x) f_X(x) \left[\int\limits_{\substack{(a,y)\in\mathbb{R}^2_{XY} \\ a\in\mathbb{R}_X}} f_{Y|X}(y \mid a)\, dy \right] dx$$

$$= \int\limits_{x\in\mathbb{R}_X} g(x) f_X(x)\, dx = \mathrm{E}_X(g(X))$$

□

Por esto cuando escribimos $\mathrm{E}(X)$ nos referimos indistitamente tanto a $\mathrm{E}_X(X)$ como a $\mathrm{E}_{XY}(X)$

EJERCICIO 19. Teniendo en cuenta lo anterior:

(a) demuestre la primera y segunda propiedad de la trasparencia anterior .

Solución:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,(X+Y) &= \iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} (x+y) f_{XY}\,(x,y)\,dydx \\ &= \iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} x f_{XY}\,(x,y)\,dydx + \iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} y f_{XY}\,(x,y)\,dydx \\ &= \boxed{\mathrm{E}\,(X) + \mathrm{E}\,(Y)} \end{aligned}$$

[Repita la demostración para el caso discreto (solución en Novales, 1997, Teorema 7.4)] La demostración de $\mathrm{E}_{XY}\,(X-Y) = \mathrm{E}_X\,(X) - \mathrm{E}_Y(Y)$ es similar.

Ejercicio 19

(b) demuestre la tercera propiedad de la trasparencia anterior .

Solución: No hay mas que sacar la constante a de la integral (o el sumatorio) y aplicar la definición de $\mathrm{E}\,(X)$. Ejercicio 19

(c) Demuestre también la cuarta propiedad

Solución: Basta con recordar que indenpendencia implica

$$f_{Y|X}(Y \mid x) = f_Y(y)$$

y operar oportunamente; es decir

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X\cdot Y\right) &= \iint\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} x\cdot y\cdot f_{XY}\left(x,y\right)dydx \\
&= \iint\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}} x\cdot y\cdot f_{Y|X}\left(Y\mid x\right)\cdot f_X\left(x\right)dydx \\
&= \int\limits_{x\in\mathbb{R}_X} x\left[\int_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{XY}\\ x\in\mathbb{R}_X\ \text{dado}}} y f_{Y|X}\left(Y\mid x\right)dy\right] f_X\left(x\right)dx && \text{por ser } x f_X\left(x\right) \text{ cte. r} \\
&= \int\limits_{x\in\mathbb{R}_X} x\left[\int_{y\in\mathbb{R}_Y} y f_Y\left(y\right)dy\right] f_X\left(x\right)dx && \text{por in} \\
&= \int\limits_{x\in\mathbb{R}_X} x\left[\mathrm{E}\left(Y\right)\right] f_X\left(x\right)dx && \text{por definición de esp} \\
&= \mathrm{E}\left(Y\right)\cdot\int\limits_{x\in\mathbb{R}_X} x f_X\left(x\right)dx && \text{por ser } \mathrm{E}\left(Y\right) \text{ un núme} \\
&= \mathrm{E}\left(Y\right)\cdot\mathrm{E}\left(X\right)
\end{aligned}$$

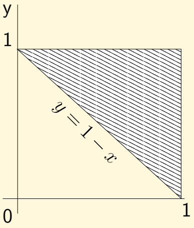
(para el caso discreto la demostración es similar)

Ejercicio 19

Ejercicio 20. Sean X e Y con función de densidad $f_{XY}(x,y)$ y como soporte $\mathbb{R}^2_{XY}$ el triángulo $0 \le 1-x \le y \le 1$. ¿Cuál (o cuales) de las siguientes expresiones es (o son) correcta (correctas)?

1. $\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \int_{1-x}^1 f_{XY}(x,y)\, dydx$
2. $\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \int_0^1 f_{XY}(x,y)\, dydx$
3. $\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \int_{1-x}^y f_{XY}(x,y)\, dydx$
4. $1 = \int_0^1 \int_0^1 f_{XY}(x,y)\, dydx$

Solución:



Sólo la primera.

Ejercicio 20

El momento conjunto más empleado es la covarianza:

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) \equiv \mu_{11} = \mathrm{E}_{XY}\left([X-\mathrm{E}_X(X)][Y-\mathrm{E}_Y(Y)]\right) \equiv \sigma_{XY}$$

Propiedades de la covarianza:

C1. $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y)$

C2. $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathrm{Cov}\,(Y,X)$

C3. $\mathrm{Cov}\,(aX,Y) = a\mathrm{Cov}\,(X,Y)$ para $a \in \mathbb{R}$

C4. $\mathrm{Cov}\,(X+Y,Z) = \mathrm{Cov}\,(X,Z) + \mathrm{Cov}\,(Y,Z)$

Empleando la covarianza podemos extender la propiedad V2 en la página˜277 a v.a. *no independientes*:

V1'. $\mathrm{Var}\,(aX_1+bX_2) = a^2\,\mathrm{Var}\,(X_1) + b^2\,\mathrm{Var}\,(X_2) + 2ab\,\mathrm{Cov}\,(X,Y)$

Ejercicio 21. Calcular $\operatorname{Cov}(X, Y)$ dada la siguiente función de cuantía conjunta

$y \backslash x$	0	1	2	$P_Y(y)$
0	0.2	0.2	0.2	0.6
2	0.1	0.1	0.2	0.4
$P_X(x)$	0.3	0.3	0.4	1

Solución: Primero calculamos los momentos univariantes

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 0 \cdot (0.3) + 1 \cdot (0.3) + 2 \cdot (0.4) = 1.1 \\
\mathrm{E}(Y) &= 0 \cdot (0.6) + 2 \cdot (0.4) = 0.8 \\
\operatorname{Var}(X) &= [0 - 1.1]^2 \cdot (0.3) + [1 - 1.1]^2 \cdot (0.3) + [2 - 1.1]^2 \cdot (0.4) = 0.69 \\
\operatorname{Var}(Y) &= [0 - 0.8]^2 \cdot (0.6) + [2 - 0.8]^2 \cdot (0.4) = 0.96
\end{aligned}$$

Ahora podemos calcular $\operatorname{Cov}(X, Y)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= (0)(0) \cdot (0.2) + (0)(2) \cdot (0.1) + (1)(0) \cdot (0.2) + \\
&= (1)(2) \cdot (0.1) + (2)(0) \cdot (0.2) + (2)(2) \cdot (0.2) = 1
\end{aligned}$$

tenemos $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 1 - 1.1 \cdot 0.8 = 0.12$

Una debilidad de la covarianza es que depende de las unidades de medida. Para evitar este problema empleamos una versión *estandarizada*:

$$\mathrm{Corr}\,(X,Y) = \rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}\,(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)\,\mathrm{Var}\,(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Propiedades del coef. correlación:

ρ1. $-1 \leq \mathrm{Corr}\,(X,Y) \leq 1$

ρ2. $\mathrm{Corr}\,(aX+b, cY+d) = \mathrm{Corr}\,(X,Y)$,
para $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, y $(a \cdot b) > 0$

ρ3. $\mathrm{Corr}\,(X,Y) = \pm 1$ si y sólo si $Y = a + bX, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Es una medida del grado de relación lineal entre X e Y

Si X e Y son indep., $\Longrightarrow \rho_{XY} = 0$ (pero $\not\Leftarrow$).

Ejercicio 22. Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: Si dos variables X, Y poseen un coeficiente de correlación lineal muy próximo a cero, debemos concluir que prácticamente no existe ninguna relación entre las dos variables.

Solución: La conclusión es falsa. La correlación lineal indica el grado de relación **lineal** entre dos variables. Si el coeficiente de correlación lineal está muy próximo a cero, esto quiere decir que la relación **lineal** entre las dos variables es prácticamente inexistente. Pero esto no es óbice para que pueda existir una fuerte relación (no lineal) entre las variables.

Ejercicio 22

Ejercicio 23. (Consta de 5 apartados)

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta, donde X e Y pueden tomar los valores 0, 1 ó 2. La variable aleatoria X hace referencia al volumen de venta de bebidas alcohólicas en un chiringuito de playa en un día cualquiera, mientras que Y hace mención al volumen de ventas de refrescos el mismo día en el mismo establecimiento. Definimos las variables de la siguiente manera: $X = 0$ si se vende poco, $X = 1$ si el volumen de ventas es medio y $X = 2$ si se vende mucho. De manera análoga definimos Y. La ley de probabilidad conjunta viene dada por la siguiente función de cuantía:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.12	0.16	0.12
1	0.08	0.12	0.16
2	0.04	0.08	0.12

(a) Calcule las leyes de probabilidad marginales de X e Y. Según esta información, ¿que situación es más probable respecto a las ventas de alcohol?

Solución:

$X \backslash Y$	0	1	2	$P_X(x)$
0	0.12	0.16	0.12	0.40
1	0.08	0.12	0.16	0.36
2	0.04	0.08	0.12	0.24
$P_Y(y)$	0.24	0.36	0.40	

Por lo tanto,

- $P(\text{poco}) = P_X(0) = 0.40$
- $P(\text{medio}) = P_X(1) = 0.36$
- $P(\text{mucho}) = P_X(2) = 0.24$

es decir, lo más probable es vender pocas bebidas alcohólicas.

Ejercicio 23

(b) Halle las leyes de probabilidad condicionadas de X con respecto a los diferentes valores que pueda tomar Y. ¿Varían entre ellas y con respecto a la ley de probabilidad marginal de X? ¿Que significa la respuesta a la pregunta anterior? Si $Y = 0$, ¿cambiaría la respuesta cualitativa del apartado anterior? ¿Y si $Y = 2$?

Solución: Las leyes de probabilidad condicionadas están resumidas en las columnas de la siguiente tabla.

	$P_{X\|Y}(x\,\|\,0)$	$P_{X\|Y}(x\,\|\,1)$	$P_{X\|Y}(x\,\|\,2)$
$X=0$	0.500	$0.\overset{\frown}{44}$	0.300
$X=1$	$0.\overset{\frown}{333}$	$0.\overset{\frown}{33}$	0.400
$X=2$	0.167	$0.\overset{\frown}{22}$	0.300

Las probabilidades han cambiado. Esto nos indica que las variables son dependientes. Nueva información sobre X hace cambiar las leyes de probabilidad sobre las ventas de bebidas alcohólicas; no obstante, si la venta de refrescos ha sido baja (Y=0) sigue siendo más probable que la venta de alcohol sea baja. Sin embargo, si la venta de refrescos ha sido elevada (Y=2) lo más probable es que haya un volumen intermedio de ventas de bebidas alcohólicas.

Ejercicio 23

(c) Calcule la correlación entre la venta de refrescos y la de bebidas alcohólicas. Interprete el resultado.

Solución: Necesitamos calcular las desviaciones típicas y la covarianza de X e Y.

Por una parte, $\mathrm{E}(X) = 0.36 + 2 \cdot 0.24 = 0.84$ y por otra $\mathrm{E}\left(X^2\right) = 0.36 + 2^2 \cdot 0.24 = 1.32$

Por tanto

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left[\mathrm{E}(X)\right]^2 = 1.32 - \left[0.84\right]^2 = 0.6144$$

En cuanto a Y, $\mathrm{E}(Y) = 0.36 + 2 \cdot 0.40 = 1.16$ y $\mathrm{E}\left(Y^2\right) = 0.36 + 2^2 \cdot 0.40 = 1.96$

Así pues,

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \left[\mathrm{E}(Y)\right]^2 = 1.96 - \left[1.16\right]^2 = 0.6144$$

La covarianza es

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = \\ &= 0.12 + 2 \cdot 0.16 + 2 \cdot 0.08 + 4 \cdot 0.12 \; - \; 0.84 \cdot 1.16 = 0.1056\end{aligned}$$

Finalmente el coeficiente de correlación es

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{0.1056}{\sqrt{0.6144}\sqrt{0.6144}} = 0.17188$$

Existe una débil relación lineal de signo positivo entre las variables.

(d) El dueño del chiringuito considera "mal día" a aquel en el que las ventas bajas de un tipo de bebida, no son compensadas con ventas elevadas del otro tipo de bebida (es decir si $X + Y < 2$). ¿Cúal es la probabilidad de que se dé un "mal día"?

Solución: Los casos que generan un mal día se pueden resumir en aquellos que verifican $X + Y < 2$. Así pues,

$$P(X + Y < 2) = P_{XY}(0,0) + P_{XY}(0,1) + P_{XY}(1,0) = 0.36$$

Ejercicio 23

(e) ¿Cómo cambian las respuestas del apartado anterior si se sabe con anterioridad que $Y = 0$, que $Y = 1$, ó que $Y = 2$ (use la información de las probabilidades condicionadas?)

Solución: Tenemos que reescribir estas probabilidades en términos de las leyes de probabilidad condicionadas:

- Si $Y = 0$:

$$P(X + Y < 2 \mid Y = 0) = P_{X|Y}(0 \mid 0) + P_{X|Y}(1 \mid 0) = 0.50 + 0.333 = 0.833$$

- Si $Y = 1$:

$$P(X + Y < 2 \mid Y = 1) = P_{X|Y}(0 \mid 1) = 0.44$$

- Si $Y = 2$:

$$P(X + Y < 2 \mid Y = 2) = 0$$

Ejercicio 23

9. Momentos condicionados

Esperanza condicionada:

$$\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,a) = \sum_{y\in\mathbb{R}_Y} y\,P_{Y|X}(y\,|\,a)$$

Varianza condicionada:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{Y|X}(Y|\,a) &= \sum_{y\in\mathbb{R}_Y}\left[y - \mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,a)\right]^2 P_{Y|X}(y\,|\,a)\\ &= \mathrm{E}_{Y|X}\left(Y^2\,|\,a\right) - \left[\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,a)\right]^2\end{aligned}$$

EJERCICIO 24. Sea la siguiente función de cuantía conjunta para X e Y

$P_{XY}(x,y)$	y=0	y=1	y=2
x=0	0.33	0.12	0.05
x=1	0	0.25	0.25

Calcule $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid 2)$.

Solución:

$P_{XY}(x,y)$	y=0	y=1	y=2
x=0	0.33	0.12	0.05
x=1	0	0.25	0.25
Marginal de Y	0.33	0.37	0.3

; por tanto

$P_{X\|Y}(X \mid 2)$	
x=0	0.05/0.3
x=1	0.25/0.3

y entonces $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid 2) = 0 \times 0.05/0.3 + 1 \times 0.25/0.3 = 0.25/0.3 = 0.83$ Ejercicio 24

Esperanza condicionada:

$$\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, a) = \int\limits_{y\in\mathbb{R}_Y} y\, f_{Y|X}(y\,|\, a)\, dy$$

Varianza condicionada:

$$\mathrm{Var}_{Y|X}(Y|\, a) = \int\limits_{y\in\mathbb{R}_Y} \left[y - \mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, a)\right]^2 f_{Y|X}(y\,|\, a)\, dy$$

$$= \mathrm{E}_{Y|X}\left(Y^2\,|\, a\right) - \left[\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, a)\right]^2$$

EJERCICIO 25. Sea la siguiente función de densidad condicionada

$$f_{Y|X}(Y \mid x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 < y < x, \text{ para } x \in (0,1) \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}.$$

¿Cómo calcularía el valor esperado de Y condicionado a que X tomase un valor arbitrario en el intervalo (0,1)?
(NO lo calcule, pero indique correctamente los órdenes de integración).

Solución:

$$\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid x) = \int_0^x y \cdot f_{y|X}(y \mid x)\ dy = \int_0^x kxy\ dy$$

Ejercicio 25

9.1. Propiedades de la esperanza condicional

Para X, Y y Z v.a. y a y b constantes; $\mathrm{E}_{\cdot|\cdot}(\cdot \mid \cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

EC1. **[Linealidad]** $\mathrm{E}_{XY|Z}(aX + bY \mid z) = a \cdot \mathrm{E}_{X|Z}(X \mid z) + b \cdot \mathrm{E}_{Y|Z}(Y \mid z)$

EC2. **[“Sustituyendo lo conocido”]**

$$\mathrm{E}_{Y|X}(h(X,Y) \mid x) = \mathrm{E}_{Y|X}(h(x,Y) \mid x)$$

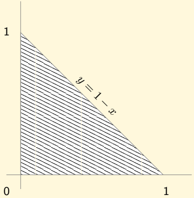
EC3. Si X e Y independientes: $\mathrm{E}_{Y|X}(g(Y) \mid x) = \mathrm{E}\,(g(Y))$

EJERCICIO 26. La variable aleatoria bidimensional (X,Y) tiene función bidimensional conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k & \text{si} \quad 0 < y < 1 - x < 1 \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$

(a) Calcule k para que $f_{XY}(x,y)$ sea una verdadera función de densidad

Solución: El soporte en un triángulo rectángulo cuyos catetos son los ejes x e y que se unen en el origen, y cuya hipotenusa es el segmento que va de $(x,y)=(0,1)$ hasta $(x,y)=(1,0)$ (y que corresponde a la función $y=1-x$).



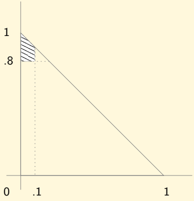
Para que sea función de densidad debe integrar uno:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} k\ dxdy = k\int_0^1 [x]_0^{1-y}\, dy = k\int_0^1 1-y\ dy = k\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = k/2 = 1$$

por lo tanto, $k=2$. Ejercicio 26

(b) $P\,(X < 0.1,\ Y > 0.8)$.

Solución: Debemos calcular la probabilidad asociada al siguiente recinto



es decir

$$P\,(X < 0.1,\ Y > 0.8) = \int_0^{0.1}\int_{0.8}^{1-x} 2dy\ dx \qquad = \int_0^{0.1}\left[2y\right]_{0.8}^{1-x} dx$$

$$= \int_0^{0.1}\left[2\cdot(1-x) - 2\cdot(0.8)\right]dx$$

$$= \int_0^{0.1}\left[0.4 - 2x\right]dx \qquad = \left[0.4x - x^2\right]_0^{0.1} dx$$

$$= 0.4\cdot(0.1) - (0.1)^2 = 0.03$$

(c) Calcule las funciones de densidad marginales, así como sus esperanzas.

Solución: Para X

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 2dy = [2y]_0^{1-x} = 2-2x \qquad \text{si } 0<x<1$$

y $f_X(x) = 0$ en el resto de los casos.

Para Y

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^{1-y} 2dx = [2x]_0^{1-y} = 2-2y \qquad \text{si } 0<y<1$$

y $f_Y(y) = 0$ en el resto de los casos.

Por tanto

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 2x - 2x^2 dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 2y - 2y^2 dy = \left[y^2 - \frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

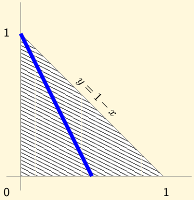
(d) Calcule $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y)$. ¿Es igual a la esperanza incondicional de X?

Solución: Primero debemos calcular la función de densidad condicionada

$$f_{X|Y}(X \mid y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{2-2y}$$

por tanto,

$$\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y) = \int_0^{1-y} x\frac{1}{1-y}dx = \frac{1}{1-y}\int_0^{1-y} xdx = \frac{1}{1-y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y} = \frac{1-y}{2}$$



Que es distinta de la esperanza incondicional, que es igual a $1/3$. Ejercicio 26

(e) Para que valor de Y la esperanza condicional, $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y)$, es igual a $\mathrm{E}(X)$.

Solución:

$$\frac{1-y}{2} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 26

(f) ¿Son X e Y independientes?

Solución: Puesto que la esperanza condicional es distinta de la incondicional, estas variables no son independientes. Ejercicio 26

(g) Calcule la covarianza entre X e Y. Comente el resultado.

Solución: Para ello hemos de calcular $\mathrm{E}(XY)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy f_{XY}(x,y)\, dydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy2dydx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{2xy^2}{2}\right]_0^{1-x} dydx = \int_0^1 x(1-x)^2 dx \\
&= \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\frac{1}{3} = -\frac{1}{36}$$

Es decir, hay una relación lineal decreciente entre X e Y como cabía esperar dado dado el soporte de la función de densidad conjunta, que es uniforme (nótese la relación lineal decreciente de la esperanza condicional, i.e., la función de regresión). Ejercicio 26

(h) Calcule $\mathrm{Var}_{X|Y}(X \mid y)$

Solución:

$$\mathrm{E}_{X|Y}(X^2 \mid y) = \int_0^{1-y} x^2 \frac{1}{1-y} dx = \frac{1}{1-y} \int_0^{1-y} x dx = \frac{1}{1-y} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1-y} = \frac{(1-y)^2}{3}$$

así pues, puesto que $\mathrm{Var}_{X|Y}(X \mid y) = \mathrm{E}_{X|Y}(X^2 \mid y) - [\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y)]^2$

$$\mathrm{Var}_{X|Y}(X \mid y) = \frac{(1-y)^2}{3} - \left[\frac{1-y}{2}\right]^2 = \frac{(1-y)^2}{12}$$

para $0 < y < 1$; por tanto, la varianza varía entre cero para $y = 1$ y $\frac{1}{12}$ para $y = 0$.

Ejercicio 26

Ejercicio 27. Sean X e Y dos variables aleatorias discretas. Si $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,1) = 1$ y además $\mathrm{Var}_{Y|X}(Y|\,1) = 0$. ¿Cual es el valor de $P_{Y|X}(1\,|\,1)$? ¿y el valor de $P_{Y|X}(2\,|\,1)$? Justifique su respuesta.

Solución: Que $\mathrm{Var}_{Y|X}(Y|\,1) = 0$ implica que cuando $X = 1$, la variable aleatoria Y es degenerada, es decir, toma un valor constante. Puesto que $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,1) = 1$, dicho valor es uno. Por lo tanto $P_{Y|X}(1\,|\,1)$ necesariamente es igual a 1. De esto se deduce que la probabilidad de que Y tome un valor distinto de 1 condicionado a X=1 es cero; en particular $P_{Y|X}(2\,|\,1) = 0$.

Ejercicio 27

EJERCICIO 28. **[Ejemplo 7.1 (Novales, 1997, pp. 247)]** Sea X e Y con una función de cuantía conjunta definida sobre el soporte $\mathbb{R}_{XY} = \{(-2,4),\ (-1,1),\ (0,0),\ (1,1),\ (2,4)\}$ que asigna a cada punto una probabilidad de $1/5$.

(a) Comprobar si X y Y son independientes.

Solución: La función de cuantía marginal de X es:

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/5 \text{ para } x = -2 \\ 1/5 \text{ para } x = -1 \\ 1/5 \text{ para } x = 0 \\ 1/5 \text{ para } x = 1 \\ 1/5 \text{ para } x = 2 \end{cases} ;$$

mientras que la función de cuantía marginal de Y es :

$$P_Y(y) = \begin{cases} 1/5 \text{ para } y = 0 \\ 2/5 \text{ para } y = 1 \\ 2/5 \text{ para } y = 4 \end{cases} .$$

Puesto que

$$P_{XY}(1,1) = 1/5$$

y

$$P_X(1) \cdot P_Y(1) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{25},$$

no son independientes.

(b) Calcular $\operatorname{Cov}(X, Y)$

Solución: Por una parte

$$\mathrm{E}(XY) = -8\frac{1}{5} - 1\frac{1}{5} + 0\frac{1}{5} + 1\frac{1}{5} + 8\frac{1}{5} = 0;$$

por otra

$$\mathrm{E}(X) = -2\frac{1}{5} - 1\frac{1}{5} + 0\frac{1}{5} + 1\frac{1}{5} + 2\frac{1}{5} = 0$$

y

$$\mathrm{E}(Y) = 0\frac{1}{5} + 1\frac{2}{5} + 4\frac{2}{5} = 2.$$

Así pues,

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) = 0 - 0 \cdot 2 = 0$$

Ejercicio 28

(c) **(añadido)** Calcular

1. la función de cuantía de X condicionada a $Y = 0$
2. la función de cuantía de X condicionada a $Y = 1$
3. la función de cuantía de X condicionada a $Y = 4$

Solución:

1. $P_{X|Y}(x \mid 0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$
2. $P_{X|Y}(x \mid 1) = \begin{cases} 1/2 & \text{para } x = -1 \\ 1/2 & \text{para } x = 1 \end{cases}$
3. $P_{X|Y}(x \mid 4) = \begin{cases} 1/2 & \text{para } x = -2 \\ 1/2 & \text{para } x = 2 \end{cases}$

Ejercicio 28

(d) **(añadido)** Calcular la función de cuantía de Y condicionada a $X = 0$.

Solución: $P_{Y|X}(y \mid 0) = \begin{cases} 1 & \text{para } y = 0 \end{cases}$ Ejercicio 28

(e) **(añadido)** Calcular

1. $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid 0)$
2. $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid 1)$
3. $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid 4)$

Solución:

1. $$\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid 0) = 0 * P_{X|Y}(0 \mid 0) = 0 * 1 = 0$$

2. $$\begin{aligned} \mathrm{E}_{X|Y}(X \mid 1) = -1 * P_{X|Y}(-1 \mid 1) + 1 * P_{X|Y}(1 \mid 1) = \\ = -1 * 1/2 + 1 * 1/2 = 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \mathrm{E}_{X|Y}(X \mid 4) = -2 * P_{X|Y}(-2 \mid 4) + 2 * P_{X|Y}(2 \mid 4) = \\ = -2 * 1/2 + 2 * 1/2 = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 28

(f) **(añadido)** Calcular $\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid 0)$.

Solución:

$$\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid 0) = 0 * P_{X|Y}(0 \mid 0) = 0 * 1 = 0$$

Ejercicio 28

(g) **(añadido)** Calcular

1. $\mathrm{Var}_{X|Y}(X \mid 0)$
2. $\mathrm{Var}_{X|Y}(X \mid 1)$
3. $\mathrm{Var}_{X|Y}(X \mid 4)$

Solución:

1.

$$\mathrm{Var}_{X|Y}(X \mid 0) = (0-0)^2 * P_{X|Y}(0 \mid 0) = (0-0)^2 * 1 = 0$$

2.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{X|Y}(X \mid 1) = \\ &(-1-0)^2 * P_{X|Y}(-1 \mid 1) + (1-0)^2 * P_{X|Y}(1 \mid 1) \\ &= 1 * 1/2 + 1 * 1/2 = 1\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{X|Y}(X \mid 4) = \\ &(-2-0)^2 * P_{X|Y}(-2 \mid 4) + (2-0)^2 * P_{X|Y}(2 \mid 4) \\ &= 4 * 1/2 + 4 * 1/2 = 4\end{aligned}$$

Ejercicio 28 Continuación en EJERCICIO 29 en la página˜163.

10. Función de regresión y función cedástica. Esperanzas y varianzas condicionales estocásticas

Función de regresión[a] es $\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid x_j)$ interpretada como función de x_j para $x_j \in \mathbb{R}_X$:

$$h(x) = \mathrm{E}_{Y|X}\left(Y \mid x\right), \quad x \in \mathbb{R}_X$$

[a]de Y sobre X

Esperanza condicional estocástica: v.a. que toma los valores

$$h(x) = \mathrm{E}_{Y|X}\left(Y|\, x_j\right), \quad x_j \in \mathbb{R}_X$$

con probabilidades determinadas por la ley de probabilidad de X:

$$\mathrm{E}\left(Y|\, X\right) = \mathrm{E}_{Y|X}\left(Y|\, x_j\right) \text{ con probabilidades provenientes de } F_X\left(x_j\right)$$

para todo $x_j \in \mathbb{R}_X$

Es decir, si $h(x) = \mathrm{E}_{Y|X}\left(Y|\, x\right)$ es la función de regresión, entonces

$$h(X) \equiv \mathrm{E}\left(Y|\, X\right)$$

es la *esperanza condicional estocástica*.

EJERCICIO 29.

(a) Represente la función de regresión $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y)$ del EJERCICIO 28.

(b) ¿Cual es la función de cuantía de $\mathrm{E}(X \mid Y)$?

Solución:

$$P\left(\mathrm{E}(X \mid Y)\right) = \begin{cases} 1 & \text{para } \mathrm{E}(X \mid Y) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 29

Función cedástica[a] es $\mathrm{Var}_{Y|X}(Y|\,x)$ interpretada como función de x:

$$g(x) = \mathrm{Var}_{Y|X}(Y|\,x)\,, \quad x \in \mathbb{R}_X$$

$\mathrm{Var}_{Y|X}(Y|\,x) = cte \;\Rightarrow$ Var. cond. *homocedástica*.

$\mathrm{Var}_{Y|X}(Y|\,x) = g(x) \neq cte \;\Rightarrow$ Var. cond. *heterocedástica*.

[a] de Y sobre X

Varianza condicional estocástica: v.a. que toma los valores

$$\mathrm{Var}_{Y|X}\,(Y|\,x_j)\,,\quad x_j \in \mathbb{R}_X$$

con probabilidades determinadas por la ley de probabilidad de X:

$\mathrm{Var}\,(Y|\,X) = \mathrm{Var}_{Y|X}\,(Y|\,x_j)$ con probabilidades provenientes de $F_X\,(x_j)$ para todo $x_j \in \mathbb{R}_X$

Es decir, si $g(x) = \mathrm{Var}_{Y|X}\,(Y|\,x)$ es la función cedástica, entonces

$$g(X) = \mathrm{Var}\,(Y|\,X) = \mathrm{E}\left(Y^2\,\middle|\,X\right) - \left[\mathrm{E}\,(Y|\,X)\right]^2$$

es la varianza condicional estocástica.

EJERCICIO 30.

(a) Represente la función cedástica $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y)$ del EJERCICIO 28.

(b) ¿Cual es la función de cuantía de $\operatorname{Var}(X \mid Y)$?

Solución:

$$P\left(\operatorname{Var}(X \mid Y)\right) = \begin{cases} 1/5 & \text{para } \operatorname{Var}(X \mid Y) = 0 \\ 2/5 & \text{para } \operatorname{Var}(X \mid Y) = 1 \\ 2/5 & \text{para } \operatorname{Var}(X \mid Y) = 4 \end{cases}$$

10.1. Esperanzas iteradas

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_{X}\left(\mathrm{E}\left(Y \mid X\right)\right) &= \quad \sum h(x) P_{X}(x) \\
&= \quad \sum \left[\mathrm{E}_{Y|X}\left(Y \mid x\right)\right] P_{X}(x) \\
&= \quad \sum \left[\sum y P_{Y|X}\left(y \mid x\right)\right] P_{X}(x) \\
&= \quad \sum \sum y \cdot P_{Y|X}\left(y \mid x\right) P_{X}(x) \\
&= \quad \sum \sum y \cdot P_{XY}(x, y) = \mathrm{E}\left(Y\right)
\end{aligned}
$$

10.2. Identidad de la varianza condicional

$$\mathrm{Var}\,(Y) = \mathrm{E}\,(\mathrm{Var}\,(Y|\,X)) + \mathrm{Var}\,(\mathrm{E}\,(Y|\,X))$$

que implica

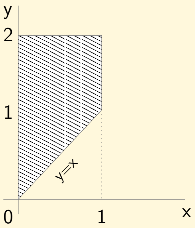
$$\mathrm{Var}\,(Y) \geq \mathrm{Var}\,(\mathrm{E}\,(Y|\,X))$$

EJERCICIO 31. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua con la siguiente función de densidad:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2/3 & \text{si } x \in [0, 1]; \qquad y \in [0, 2]; \qquad y > x \\ 0 & \text{en los restantes casos} \end{cases}$$

(a) Dibuje el recinto en el que $f_{XY}(x, y)$ toma valores distintos de cero. Especifique claramente los rangos de definición (incondicionales y condicionales) de las variables aleatorias X e Y. (¿valores tomados por y restringen en cualquier caso los posibles valores que puede tomar x?)

Solución:



Nótese que x puede tomar valores entre 0 y 1, siempre y cuando además $x < y$. Cuando $y < 1$, la variable x estará en el intervalo $x \in (0,\ y)$; por lo que y restringe los posibles valores de x. Sin embargo, cuando $y \geq 1$, la variable x puede tomar cualquier valor entre cero y uno (y NO restringe, en este segundo caso, los posibles valores de x.)

Ejercicio 31

(b) Verifique que $f_{XY}(x,y) = 2/3$ es efectivamente una función de densidad definida en el recinto especificado.

Solución: $\int_0^1 \int_x^2 2/3 \; dydx = 1$ y además $f_{XY}(x,y)$ es estrictamente positiva en todo su dominio de definición.

Ejercicio 31

(c) Calcule las funciones de densidad marginal de X e Y. Indique explícitamente sus dominios de definición. Calcule el valor esperado de X e Y.

Solución:

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_x^2 2/3\ dy = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x, & \text{en el intervalo } x \in (0,1) \\ 0 & \text{en el resto de casos.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y 2/3\ dx = \frac{2}{3}y, & \text{en el intervalo } y \in (0,1) \\ \int_0^1 2/3\ dx = \frac{2}{3}, & \text{en el intervalo } y \in [1,2) \\ 0 & \text{en el resto de casos.} \end{cases}$$

Los valores esperados son:

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y \frac{2}{3} y\ dy + \int_1^2 y \frac{2}{3}\ dy = \frac{11}{9}.$$

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x \right)\ dx = \frac{4}{9}.$$

Ejercicio 31

(d) Verifique que la probabilidad de que Y sea mayor que 1 es dos tercios, y la probabilidad de que sea menor o igual que 1 un tercio.

Solución:

$$\int_1^2 \frac{2}{3}\ dy = \frac{2}{3};$$

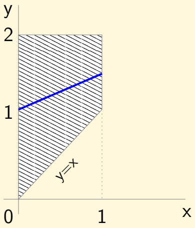
$$\int_0^1 \frac{2}{3} y dy = \frac{1}{3};$$ como cabe esperar por ser el suceso complementario al anterior.

Ejercicio 31

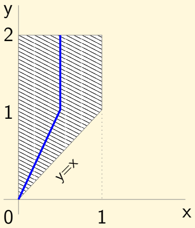
(e) Calcule la función de regresión de Y sobre X (esperanza de Y condicionada a X) y la función de regresión de X sobre Y (la esperanza de X condicionada a Y). Deje bien claro los dominios de definición de las dos esperanzas condicionadas. Dibuje ambas esperanzas condicionadas.

Solución:

$$\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,x) = \begin{cases} \int_x^2 y \frac{2/3}{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x} dy = \frac{x^2}{2x-4} - \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}(x+2)\,, & \text{definida para } x \in (0,1), \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



$$\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y) = \begin{cases} \int_0^y x \frac{2/3}{2/3y} dx = \frac{1}{2} y & \text{definida para } y \in (0,1), \\ \int_0^1 x \frac{2/3}{2/3} dx = \frac{1}{2} & \text{definida para } y \in [1,2), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Ejercicio 31

(f) ¿Son lineales las funciones de regresión (las esperanzas condicionadas) calculadas en el apartado anterior?

Solución: $\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid x)$ es lineal; sin embargo $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y)$ no lo es. Ejercicio 31

Esperanza como predictor óptimo

10.3. Propiedades de la esperanza condicional estocástica

Para X, Y y Z v.a. y a y b constantes; $\mathrm{E}\left(\cdot\,|\,\cdot\right)$ satisface las siguientes propiedades:

ECS1. **[Linealidad]** $\mathrm{E}(aX + bY|Z) = a\mathrm{E}\left(X\,|\,Z\right) + b\mathrm{E}\left(Y\,|\,Z\right)$

ECS2. **[Ley de esperanzas iteradas]** $\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(g(X,Y)|X)\right) = \mathrm{E}\left(g(X,Y)\right)$

ECS3. **[“Sacando fuera lo conocido”]**
$\mathrm{E}(\ h(X)\cdot g(Y)\ |X) = h(X)\cdot\mathrm{E}(g(Y)|X)$

ECS4. **[Predictor óptimo]** $\mathrm{E}\left(\left[Y - \mathrm{E}\left(Y\,|\,X\right)\right]^2\right) \leq \mathrm{E}\left(\left[Y - g(X)\right]^2\right)$ para cualquier $g(X)$

Buscamos una función de X, digamos $h(X)$, tal que $\mathrm{E}_{XY}\left(\left[Y - h(X)\right]^2\right)$ sea mínimo.

$$\mathrm{E}_{XY}\left(\left[Y - h(X)\right]^2\right) = \mathrm{E}_{X}\left(\mathrm{E}_{Y|X}\left(\left[Y - h(x)\right]^2 \,\Big|\, x\right)\right).$$

Buscamos $h(x)$ que hace $\mathrm{E}_{Y|X}\left(\left[Y - h(x)\right]^2 \,\Big|\, x\right)$ mínimo para todo $x \in \mathbb{R}_X$.

$$\geq 0 + \underbrace{\operatorname{Var}_{Y|X}(Y|\,x)}_{\text{cte.}}$$

que es mínimo cuando $h(x) = \mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,x)$.

10.4. Esperanza condicional cuando es una función lineal

Sea $\mathrm{E}\left(Y \mid X\right)$ una función lineal de X, es decir,

$$\mathrm{E}\left(Y \mid X\right) = a + bX$$

¿Cómo son en este caso a y b en relación a los momentos teóricos de $f_{XY}\left(x, y\right)$?

De ECS1 y ECS2 sabemos que

$$\mathrm{E}\left(Y\right) = \mathrm{E}_{X}\left(\mathrm{E}_{Y|X}\left(Y \mid x\right)\right) = \mathrm{E}\left(a + bX\right) = a + b\mathrm{E}\left(X\right);$$

por tanto,

$$a = \mathrm{E}\left(Y\right) - b \cdot \mathrm{E}\left(X\right) \tag{10.1}$$

De ECS2 y ECS3

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}_X(\mathrm{E}(XY \mid X)) = \mathrm{E}(X \cdot \mathrm{E}(Y \mid X))$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) =& \mathrm{E}(X \cdot [a + bX]) \\
=& \mathrm{E}\left(X \cdot \left[\left(\mathrm{E}(Y) - b \cdot \mathrm{E}(X)\right) + bX\right]\right) && \text{de } 10.1 \\
=& \mathrm{E}(X\mathrm{E}(Y)) + b\left[\mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(X)\right] \\
=& \mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(X) + b \cdot \mathrm{Var}(X);
\end{aligned}$$

despejando $b \cdot \mathrm{Var}(X)$:

$$b \cdot \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

$$b = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)}. \qquad (10.2)$$

10.5. Aproximación lineal de la esperanza condicional. Recta de regresió

- $\mathrm{E}\left(Y\right)$ es un predictor de Y

- $h(x) = \mathrm{E}_{Y|X}\left(Y|\,x\right)$ es predictor preferido
(incorpora información relevante cuando Y y X dependientes)

- Si conocemos $f_{XY}\left(x, y\right)$ podemos deducir $h(x) = \mathrm{E}_{Y|X}\left(Y|\,x\right)$

- En general desconocemos tanto $f_{XY}\left(x, y\right)$ como $h(x) = \mathrm{E}_{Y|X}\left(Y|\,x\right)$
(aunque con frecuencia conocemos realizaciones de X)

- Una solución es buscar una función $g^*(x)$ alternativa a la función $h(x)$ desconocida, pero que se "*parezca a*" $h(x)$ en algún sentido.

Buscamos la aproximación mínimo cuadrática
(que minimiza la suma ponderada de la distancia al cuadrado):

$$\min_{g^*} \sum_{\mathbb{R}_X} \left[g^*(x) - h(x)\right]^2 P_X(x)\,,$$

donde $f_X(x)$ y $h(x) = \mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,x)$ son funciones desconocidas.

Si suponemos $g^*(x) = a + bx$:

$$\min_{g^*} \sum_{\mathbb{R}_X} \left[(a + bx) - h(x)\right]^2 P_X(x)$$

Condiciones de primer orden (parámetro a):

$$\begin{aligned} 2\sum_{\mathbb{R}_X} [a + b \cdot x - h(x)]\, P_X(x) &= 0 \\ a\sum_{\mathbb{R}_X} P_X(x) + b\sum_{\mathbb{R}_X} x P_X(x) - \sum_{\mathbb{R}_X} \mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, x)\, P_X(x) &= 0 \\ a + b \cdot \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) &= 0 \end{aligned}$$

$$a = \mathrm{E}(Y) - b \cdot \mathrm{E}(X)$$

Condiciones de primer orden (parámetro b):

$$\begin{aligned} 2\sum_{\mathbb{R}_X}\left[a+b\cdot x-h(x)\right]xP_X(x) &= 0 \\ a\mathrm{E}(X)+b\mathrm{E}\left(X^2\right)-\mathrm{E}\left(X\cdot\mathrm{E}(Y\,|\,X)\right) &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\mathrm{E}\left(X\cdot\mathrm{E}(Y\,|\,X)\right)=\sum_{\mathbb{R}_X}x\sum_{\mathbb{R}_{Y|X}}y\frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)}P_X(x)=\mathrm{E}(XY)$$

y sustituyendo el valor de a que obtuvimos anteriormente,

$$\begin{aligned} b &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}, \\ a &= \mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(X)\frac{\mathrm{Cov}(Y,X)}{\mathrm{Var}(X)}. \end{aligned}$$

$$g^*(x) = \overbrace{\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\frac{\mathrm{Cov}(Y,X)}{\mathrm{Var}(X)}}^{a} + \overbrace{\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}}^{b} \cdot x; \qquad \forall x \in \mathbb{R}_X, \tag{10.3}$$

y puesto que $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$; entonces $\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ y tenemos una expresión alternativa:

$$g^*(x) = \mathrm{E}(Y) + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mathrm{E}(X)); \qquad \forall x \in \mathbb{R}_X, \tag{10.4}$$

de la recta de regresión[a].

[a] ¡pero que depende de **momentos** que en general son **desconocidos**!

Ejemplo 3. Sean las siguientes v.a. referentes a una empresa

- Y tasa de variación de los beneficios
- X tasa de variación de los gastos en personal
- Z tasa de variación de los gastos en publicidad

Conocemos los siguientes momentos de dichas variables

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{E}(Y) = 0.04 & \sigma_Y = 0.01 & \\
\mathrm{E}(X) = 0.03 & \sigma_X = 0.015 & \rho_{XY} = 0.5 \\
\mathrm{E}(Z) = 0.035 & \sigma_Z = 0.025 & \rho_{ZY} = 0.6
\end{array}
$$

Podemos incrementar en un 5 % una de las dos vbles de control (bien X, o bien Z) ¿Que decisión es preferible?

Empleando la aproximación lineal a la esperanza condicional (regresión lineal) vemos que, por una parte:

$$\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, x) \approx a_x + b_x \cdot x,$$

donde $b_x = \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = 0.5 \frac{0.01}{0.015} = 0.333$ (que es la pendiente) y $a_x = \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X) \cdot b_x = 0.04 - 0.03 \cdot 0.333 = 0.03$.

Por lo tanto

$$\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, x) \approx 0.03 + 0.333 \cdot x,$$

por lo que el incremento esperado en los beneficios condicionado a un incremento del 5 % en el gasto en personal es: $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, 0.05) \approx 0.03 + 0.333 \cdot 0.05 = 0.0466$,

Por otra parte

$$\mathrm{E}_{Y|Z}(Y|\, z) \approx a_z + b_z \cdot z,$$

donde $b_z = \rho_{ZY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_Z} = 0.6 \frac{0.01}{0.025} = 0.24$ (que es la pendiente) y $a_z = \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(Z) \cdot b_x = 0.04 - 0.035 \cdot 0.24 = 0.0316$.

Por lo tanto

$$\mathrm{E}_{Y|Z}(Y|\, z) \approx 0.0316 + 0.24 \cdot z,$$

por lo que el incremento esperado en los beneficios condicionado a un incremento del 5 % en el gasto en publicidad es: $\mathrm{E}_{Y|Z}(Y|\, 0.05) \approx 0.0316 + 0.24 \cdot 0.05 = 0.0436$,

Pese a que $\rho_{ZY} > \rho_{XY}$, la pendiente de la función de regresión de Y sobre X es mayor que la pendiente de la función de regresión de Y sobre Z; por lo que un incremento del gasto del 5 % en personal arroja un mayor beneficio esperado que en el caso de que dicho incremento se produzca en publicidad.

EJERCICIO 32. (Consta de 9 apartados)

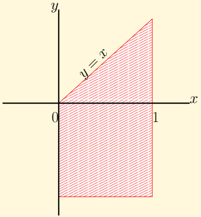
Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) \text{ definida sobre el soporte } -1 \le y \le x; \quad 0 \le x \le 1$$

Deje indicado cómo calcularía las siguientes cuestiones:
(En este ejercico no se le pide realizar calculos, tan sólo plantear y/o expresar adecuadamente lo requerido en cada apartado; por ello *preste especial atención en indicar cláramente los* **límites de integración** *y* **dominio** *de las funciones de densidad en cada caso; ¡no hacerlo significará no haber respondido a la pregunta!*)

(a) Dibuje el soporte de $f_{XY}(x,y)$.

Solución:



(b) ¿Cómo verificaría que $f_{XY}(x, y)$ es función de densidad?

1. Primero integrando respecto de y y después respecto de x
2. Primero integrando respecto de x y después respecto de y

Solución: Comprobando si se verifican las siguientes igualdades

1. $$\int_0^1 \int_{-1}^x f_{XY}(x, y)\, dy\; dx = 1$$
2. $$\int_0^1 \int_y^1 f_{XY}(x, y)\, dx\; dy + \int_{-1}^0 \int_0^1 f_{XY}(x, y)\, dx\; dy = 1$$

Ejercicio 32

(c) Las funciones de densidad marginales de X y Y, especificando explicitamente sus soportes (dominio de cada función de densidad).

Solución:

$$f_X(x) = \int_{-1}^x f_{XY}(x, y)\, dy; \qquad x \in [0,\ 1]$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 f_{XY}(x, y)\, dx; & y \in (0,\ 1] \\ \\ \int_0^1 f_{XY}(x, y)\, dx; & y \in [-1,\ 0] \end{cases}$$

Ejercicio 32

(d) ¿Cómo verificaría si X e Y son independientes o no?

Solución: Debería comprobarse si se verifica

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \text{ para } -1 \leq y \leq x; \quad 0 \leq x \leq 1$$

en caso afirmativo, X e Y son independientes. Ejercicio 32

(e) La Varianza de X

Solución: Puesto que $\operatorname{Var}(X) = \operatorname{E}\left(X^2\right) - \left[\operatorname{E}(X)\right]^2$, entonces

$$\operatorname{Var}(X) = \int_0^1 \int_{-1}^x x^2 f_{XY}(x,y)\, dy\ dx - \left[\int_0^1 \int_{-1}^x x f_{XY}(x,y)\, dy\ dx\right]^2$$

o lo que es lo mismo

$$\operatorname{Var}(X) = \int_0^1 x^2 f_X(x)\, dx - \left[\int_0^1 x f_X(x)\, dx\right]^2$$

Ejercicio 32

(f) La esperanza de Y condicionanda a $X = x$.

Solución: Para ello es necesario calcular la función de densidad condicionada, que en este caso es

$$f_{Y|X}\left(y \mid a\right) = \frac{f_{XY}\left(a, y\right)}{f_X\left(a\right)}; \qquad -1 \leq y \leq a$$

por lo tanto

$$\mathrm{E}_{Y|X}\left(Y \mid x\right) = \int_{-1}^{x} y \frac{f_{XY}\left(x, y\right)}{f_X\left(x\right)} dy; \qquad x \in [-1,\ 0]; \quad -1 < y < x.$$

Ejercicio 32

(g) Cual sería la expresión exacta de la anterior esperanza condicional en el caso de ser una función lineal de x.

Solución:

$$\mathrm{E}_{Y|X}\left(Y \mid x\right) = \mathrm{E}\left(Y\right) - \mathrm{E}\left(X\right) \frac{\mathrm{Cov}\left(Y, X\right)}{\mathrm{Var}\left(X\right)} + \frac{\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)}{\mathrm{Var}\left(X\right)} \cdot x; \qquad \forall x \in [0,\ 1].$$

Ejercicio 32

(h) $P\left(Y > d \mid X = 0.5\right)$, donde $-1 \leq d \leq 1$.

Solución:

$$P\left(Y > d \mid X = 0.5\right) = \int_{d}^{0.5} f_{Y|X}\left(y \mid 0.5\right) dy = \int_{d}^{0.5} \frac{f_{XY}\left(0.5, y\right)}{f_{X}\left(0.5\right)} dy \qquad \text{si } d < 0.5$$

$$P\left(Y > d \mid X = 0.5\right) = 0 \qquad \text{si } d \geq 0.5$$

Ejercicio 32

(i) $P\left(Y > d \mid X > 0.5\right)$, donde $-1 \leq d \leq 1$.

Solución: En este caso no podemos emplear la función de densidad condicionada $f_{Y|X}(Y \mid x)$; aquí debemos emplear directamente la definición de probabilidad condiciona

$$P\left(Y > d \mid X > 0.5\right) = \frac{\int_{0.5}^{1} \int_{d}^{x} f_{XY}\left(x, y\right) dy \; dx}{\int_{0.5}^{1} f_{X}\left(x\right) dx} \qquad \text{si } d < 0.5$$

$$P\left(Y > d \mid X > 0.5\right) = \frac{\int_{d}^{1} \int_{d}^{x} f_{XY}\left(x, y\right) dy \; dx}{\int_{0.5}^{1} f_{X}\left(x\right) dx} \qquad \text{si } d \geq 0.5$$

Ejercicio 32

EJERCICIO 33. Un inversor desea saber si le intreresa invertir en bolsa. Este inversor sabe que la ley de probabilidades conjunta de las rentabilidades del IBEX35 (X) y del tipo de interés de los bonos a un año (Y) es

$$P_{XY}(x, y) = k(1 - XY);$$

donde $x \in \{-1, \quad 0, \quad 1\}$ es una variable que toma el valor -1 si la rentabilidad es negativa (pérdidas), 0 si la rentabilidad es nula y 1 hay rentabilidades positivas; y por otra parte $y \in \{-1, \quad 0, \quad 1\}$ es una variable que vale -1 si hay una bajada de tipos de interés, 0 si los tipos se mantienen y 1 si los tipos suben

(a) Encuentre el valor de k para que $P_{XY}(x, y)$ sea una función de cuantía.

(b) Calcular la rentabilidad esperada independientemente de lo que ocurra con los tipos de interés.

(c) Calcule la rentabilidad esperada si el tipo de interés cae.

(d) Calcule el coeficiente de correlación

(e) Si definimos la prima al riesgo del mercado como el diferencial de rentabilidad respecto a los tipos: $Z = X - Y$, calcule la prima esperada.

(f) Si definimos la prima al riesgo del mercado como el diferencial de rentabilidad respecto a los tipos: $Z = X - Y$, calcule la prima esperada en un escenario de bajada de tipos de interés.

(g) Calcule el valor de a y b tales que

$$\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid x) \approx a + bx$$

11. Transformación de variables

Sea X con $f_X(x)$ sobre $\mathbb{R}_X$.

Sea la función $h(\cdot)$ continua, diferenciable (y monótona[a])

Deseamos conocer la distribución de la v.a. definida como

$$Y = h(X)$$

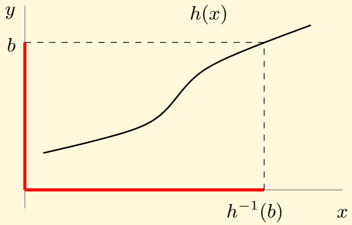
[a]si no es monótona, el problema es muy similar pero ligeramente más conplejo (Papoulis, 1991, cap. 5)

Sea $Y = h(X)$; entonces

$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = P(h(X) \leq b)$$

si $h(\cdot)$ es monótona creciente, y aplicando $h(\cdot)^{-1}$;

$$F_Y(b) = P\left(X \leq h^{-1}(b)\right) = F_X\left(h^{-1}(b)\right)$$

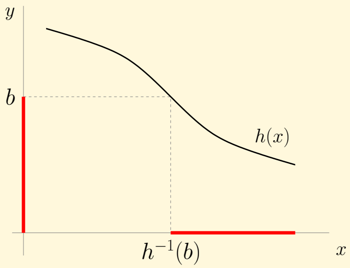


Sea $Y = h(X)$; entonces

$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = P(h(X) \leq b)$$

si $h(\cdot)$ es monótona decreciente, y aplicando $h(\cdot)^{-1}$;

$$\begin{aligned} F_Y(b) = P\left(X \geq h^{-1}(b)\right) &= 1 - P\left(X \leq h^{-1}(b)\right) \\ &= 1 - F_X\left(h^{-1}(b)\right) \end{aligned}$$



Si $h(\cdot)$ es creciente la función de densidad de la *v.a.* transformada es

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = f_Y(y) = \frac{dF_X\left(h^{-1}(y)\right)}{dy} = f_X\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

y si $h(\cdot)$ es decreciente

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = f_Y(y) = -\frac{d(1 - F_X\left(h^{-1}(y)\right))}{dy} = -f_X\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

En general

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

nota: en Novales (1997) se sustituye $h^{-1}(y)$ por x.

Sea $f_X(x) = 1$ en el intervalo $x \in (0, 1)$ y cero en el resto.

Sea $Y = 3X - 1$; entonces

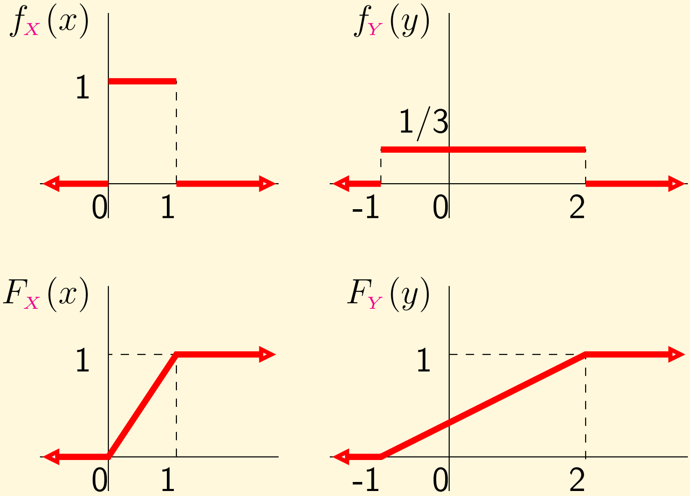
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3X - 1 \leq y) = P\left(X \leq \tfrac{y+1}{3}\right)$$

$$= F_X\left(\tfrac{y+1}{3}\right);$$

y por tanto

$$f_Y(y) = \frac{dF_X\big(h^{-1}(y)\big)}{dy} = f_X\big(h^{-1}(y)\big) \cdot \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = 1 \cdot \frac{1}{3}$$

en el intervalo $y \in \big(h(0),\ h(1)\big) = (-1, 2)$, y cero en el resto.


$f_X(x)$
1
0
1
$f_Y(y)$
1/3
-1
0
2
$F_X(x)$
1
0
1
$F_Y(y)$
1
-1
0
2

- El BCE desea conocer la probabilidad de que la inflación, π supere el $2\,\%$.

- El BCE sabe que la inflación depende del nivel de los tipos de interés o del volumen de ALPs.

El BCE puede fijarse en lo siguiente

1. Calcular $P(\pi > 0.02)$
   - (cálculo pobre, poca información en la distribución marginal)
2. Puede intentar emplear la función de distribución condicional
   - (pero necesita la función de densidad conjunta que en general es desconocida)
3. Puede emplear la aproximación lineal a la esperanza condicional (solo necesita estimar algunos parámetros)
   - Pero le dá valores para un nivel de ALP dado (que en general es desconocido)
4. Puede (alternativamente) calcular $P(\mathrm{E}(\pi \mid ALP) > 0.02)$
   - Necesito suponer alguna dist. sobre ALP y el tipo funcional de $\mathrm{E}_{\pi|ALP}(\pi \mid alp)$.(generalmente supondremos linealidad)

Supongamos que $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, x)$ es función lineal de x

$$\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, x) = a + bx = h(x)^{a};$$

entonces la función de densidad de $\mathrm{E}(Y|\, X) = h(X)$ es

$$f_{\mathrm{E}(Y\,|\,X)}(y) \quad = \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| \cdot f_X\left(h^{-1}(y)\right) \quad = \quad \left|\frac{1}{b}\right| \cdot f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

ya que de $y = a + bx$ se deduce que $x = \frac{y-a}{b}$.

[a] por lo que $h^{-1}(y) = \frac{y-a}{b}$

Ejercicio 34. Sea $X \sim \mathrm{Uniforme}\,(0,\ 1)$. Sea $Z = \mathrm{E}\,(Y|\,X) = 2+3X$. Halle la función $f_Z\,(z)$ (explicitando su soporte $\mathbb{R}_Z$). Halle $\mathrm{E}\,(Z)$. ¿Qué probabilidad hay de que el valor esperado de Y condicionado a X sea mayor que 3?
Pista. la función de densidad de $X \sim \mathrm{Uniforme}\,(0,\ 1)$ es $f_X\,(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Solución: Puesto que $Z = 3X + 2; \quad$ entonces

$$F_Z\,(z) = P\,(Z \leq z) = P\,(3X + 2 \leq z) = P\left(X \leq \frac{z-2}{3}\right) = F_X\left(\frac{z-2}{3}\right);$$

y

$$f_Z\,(z) = f_X\,(h^{-1}(z)) \cdot \left|\frac{dh^{-1}(z)}{dz}\right| = 1 \cdot \frac{1}{3}; \quad z \in \mathbb{R}_Z = \big(h(0),\ h(1)\big) = (2, 5)$$

Es decir, $Z \sim \mathrm{Uniforme}\,(2,\ 5)$. Por tanto, $\mathrm{E}\,(Z) = \int_2^3 z\frac{1}{3}dz = \ \frac{1}{3}\frac{z^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{7}{2}$.

Puesto que $Z = \mathrm{E}\,(Y|\,X)$, entonces $P\,(\mathrm{E}\,(Y|\,X) > 3) = P\,(Z > 3)$:

$$P\,(Z > 3) = \int_3^5 \frac{1}{3} \cdot dz = \left.\frac{z}{3}\right|_3^5 = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}$$

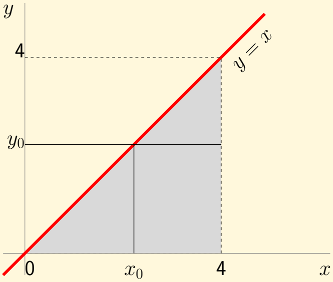
Ejercicio 34

EJERCICIO 35. Sea la función de densidad bivariante

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{32} & \text{si } 0 < y < x < 4 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}.$$

(a) Dibuje el soporte de la distribución.

Solución:



(b) Calcule las funciones de densidad condicionadas de X e Y.

Solución: Puesto que las funciones de densidad marginales son

- $f_Y(y) = \int_y^4 \frac{xy}{32}\, dx = \frac{y}{4} - \frac{y^3}{64}$ para $y \in (0,4)$.
- $f_X(x) = \int_0^x \frac{xy}{32}\, dy = \frac{x^3}{64}$, para $x \in (0,4)$.

entonces

1. $f_{x|Y}(x \mid y) = \frac{\frac{xy}{32}}{\frac{y}{4} - \frac{y^3}{64}} = \frac{2x}{(16-y^2)}, \quad y < x < 4;$ es decir $\mathbb{R}_{Y \mid X} = (y,\ 4)$
2. $f_{y|X}(y \mid x) = \frac{\frac{xy}{32}}{\frac{x^3}{64}} = \frac{2y}{x^2}, \quad 0 < y < x;$ es decir $\mathbb{R}_{Y \mid X} = (0,\ x)$

Ejercicio 35

(c) Calcule el valor esperado de Y.

Solución: $\mathrm{E}(Y) = \int_0^4 y(\frac{1}{4}y - \frac{1}{64}y^3)dy = \frac{32}{15} = 2.13$ Ejercicio 35

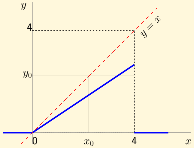
(d) Calcule y represente gráficamente $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,x)$. Cuando $X=2$, ¿cuál es el valor esperado de Y? ¿Coincide con la esperanza incondicional?

Solución: Para cualquier $x \in (0,4)$,

$$f_{Y|X}(Y \mid x) = \frac{\frac{1}{32}xy}{\frac{1}{64}x^3} = \frac{2y}{x^2}; \qquad y \in (x,4).$$

Entonces $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,x) = \int_0^x y\frac{2y}{x^2}\,dy = \frac{2}{3}x$, para $x \in (0,4)$.

La esperanza condicionada está representada por la linea azul.



Si X=2, $\mathrm{E}(Y|X=2) = 4/3 < \mathrm{E}(Y)$. Por tanto no coinciden.

Ejercicio 35

(e) ¿Son X e Y independientes?

Solución: En este caso $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$; pero ya no es necesario verificarlo puesto que $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, x)$ difiere de $\mathrm{E}(Y)$, ambas variables dependen. Ejercicio 35

(f) A partir de qué valor de X, el valor esperado de Y condicionado a X es mayor que el valor esperado de Y incondicional.

Solución: $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, x) > \mathrm{E}(Y)$ sólo cuando $\frac{2}{3}x > \frac{32}{15}$, es decir, cuando $x > \frac{16}{5}$. Por lo tanto, si $x \in (16/5,\ 4)$ entonces $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, x) > \mathrm{E}(Y)$. Ejercicio 35

(g) Calcule, por tanto, la probabilidad $P\left(\mathrm{E}(Y\,|\,X) > \mathrm{E}(Y)\right)$.

Solución: Según el apartado anterior, es la probabilidad de que $P\left(X > \frac{16}{5}\right)$. Por tanto

$$P\left(X > \frac{16}{5}\right) = \int_{16/5}^{4} f_X(x)\, dx = \int_{16/5}^{4} \frac{1}{64} x^3 dx = \frac{369}{625} = 0.59$$

Ejercicio 35

(h) Calcule la función de densidad de $\mathrm{E}\,(Y\,|\,X)$

Solución: Puesto que $\mathrm{E}_{Y|X}\,(\,Y|\ x) = \frac{2}{3}x$, entonces $\mathbb{R}_{\mathrm{E}\,(Y\ |X)} = (0,\ 8/3)$ y

$$y = h(x) = \frac{2}{3}x \quad \text{y por tanto} \quad x = h^{-1}(y) = \frac{3}{2}y;$$

además $f_X\,(x) = \frac{1}{64}x^3$, así pues

$$f_{\mathrm{E}\,(Y\,|\,X)}\,(y) = \left|\frac{3}{2}\right| \cdot f_X\left(\frac{3}{2}y\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}y\right)^3 = \frac{81}{1024}y^3$$

para $y \in (0,\ \frac{8}{3})$ Ejercicio 35

(i) Con la nueva información verifique que $P\,(\mathrm{E}\,(Y|\,X) > \mathrm{E}\,(Y)) = 0.59$

Solución:

$$P\,(\mathrm{E}\,(Y|\,X) > \mathrm{E}\,(Y)) = P\,(\mathrm{E}\,(Y|\,X) > 32/15) = \int_{\mathrm{E}\,(Y)}^{8/3} \frac{81}{1024}y^3 = 0.59$$

Ejercicio 35

Transformación de una v.a. bidimensional Sean X e Y con $f_{XY}(x,y)$.

Y sean las variables aleatorias $U = g_1(X,Y)$ y $V = g_2(X,Y)$,
con inversas $X = h_1(U,V)$ e $Y = h_2(U,V)$.

Entonces

$$f_{UV}(u,v) = |J|\, f_{XY}(h_1(U,V), h_2(U,V)),$$

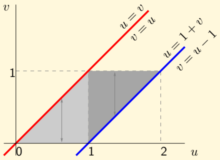
donde

$$J \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

y donde $\frac{\partial x}{\partial u} \equiv \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} \equiv \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v}, \quad \cdots$

Ejemplo 4. Sea $f_{XY}(x,y) = 4xy; \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1.$
Sean $U{=}X{+}Y; \quad V{=}Y;$ entonces

$$0 \leq v \leq 1, \qquad 0 \leq v \leq u \leq 1+v \leq 2.$$



Las funciones inversas son $Y = V; \qquad X = U - Y = U - V.$ Por tanto

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad f_{UV}(u,v) = |J|\, f_{XY}(x,y) = 4(u-v)v;$$

donde $0 \leq v \leq 1, \quad \text{y} \quad v \leq u \leq 1+v.$

La función de densidad de $X+Y$ es la marginal de U; por tanto (véase la figura):

$$f_U(u) = \begin{cases} 4\int_0^u v(u-v)dv = 4\left[u\frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right]_0^u = \frac{2}{3}u^3; & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ \\ 4\int_{u-1}^1 v(u-v)dv = 4\left[u\frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right]_{u-1}^1 = \frac{1}{3}(12u - 2u^3 - 8); & \text{si } 1 \leq u \leq 2 \end{cases}.$$

Ejemplo 5. Sean X_1 y X_2 indep $\sim \text{Exponencial}\,(\lambda)$, es decir, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}; \quad x > 0.$ Demostrar que $Y_1 = X_1 + X_2$ y $Y_2 = X_1/X_2$ son variables independientes:

$$T: \; (x_1,\; x_2) \longrightarrow (y_1,\; y_2); \quad \text{donde} \quad y_1 = x_1 + x_2, \qquad y_2 = \frac{x_1}{x_2}$$

Por tanto T^{-1} será:

$$\begin{aligned} x_2 =& y_1 - x_1; \qquad\qquad \text{y} \quad x_1 = y_2 \cdot x_2 \\ x_2 =& y_1 - x_2 \cdot y_2 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sustituyendo } x_1 \\ x_2(1 + y_2) =& y_1 \\ x_2 =& \frac{y_1}{1 + y_2}; \qquad\qquad x_1 = \frac{y_1 y_2}{1 + y_2}, \quad \text{que es } T^{-1}: \; (y_1,\; y_2) \longrightarrow (x_1,\; x_2) \end{aligned}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y_2}{1+y_2} & \left(\frac{y_1}{1+y_2} - \frac{y_1 y_2}{(1+y_2)^2} \right) \\ \frac{1}{1+y_2} & -\frac{y_1}{(1+y_2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{y_1}{(1 + y_2)^2}.$$

Entonces

$$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = \left| -\frac{y_1}{(1+y_2)^2} \right| f_{X_1X_2}\left(\frac{y_1 y_2}{1+y_2}, \frac{y_1}{1+y_2} \right);$$

donde $y_1,\ y_2 > 0;$ y donde $f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2}$.

Por tanto, la función de densidad conjunta buscada es:

$$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = \left[\frac{y_1}{(1+y_2)^2} \right] \left(\lambda^2 y_1 e^{-\lambda y_1} \right)$$

Así pues, las distribuciones marginales son:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^\infty f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2)\, dy_2 = \lambda^2 y_1 e^{-\lambda y_1}, \quad y_1 > 0$$

y

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_0^\infty f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2)\, dy_1 = \frac{y_1}{(1+y_2)^2}, \quad y_2 > 0.$$

Y puesto que $f_{Y_1}(y_1) \cdot f_{Y_2}(y_2) = f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2)$; Y_1 e Y_2 son independientes.

12. Distribuciones multivariantes

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n); \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}} \equiv \mathbb{R}_{X_1} \times \cdots \times \mathbb{R}_{X_n}$$

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{b}) \equiv F_{X_1,\ldots,X_n}(b_1, \ldots, b_n) = P(X_1 \leq b_1, X_2 \leq b_2, \ldots, X_n \leq b_n)$$

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \equiv f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^n \; F_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}; \quad F_{\boldsymbol{x}}(b_1, \ldots, b_n) = \int_{-\infty}^{b_1} \cdots \int_{-\infty}^{b_n} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \; dx_n \cdots dx_1$$

$$F_{X_j}(x_j) = F_{X_1,\ldots,X_n}(\infty,\ldots,\infty,x_j,\infty,\ldots,\infty)$$

$$f_{X_j}(x_j) = \int\limits_{\mathbb{R}_{X_1}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}_{X_{(j-1)}}} \int\limits_{\mathbb{R}_{X_{(j+1)}}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}_{X_n}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\ dx_n \cdots dx_{(j+1)}\, dx_{(j-1)} \cdots dx_1$$

$$f_{X_2\cdots X_n}(x_2,\ldots,x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}_{X_1}} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\ dx_1$$

Función de densidad condicionada de X_1

$$f_{X_1|X_2\ldots X_n}(x_1 \mid b_2 \ldots b_n) = \frac{f_{\boldsymbol{X}}(x_1, b_2, \ldots, b_n)}{f_{X_2\ldots X_N}(b_2 \ldots b_n)}$$

Función de regresión de X_1 sobre $X_2 \ldots X_n$

$$\mathrm{E}_{X_1|X_2\ldots X_n}(x_1 \mid x_2 \ldots x_n) = h(x_2, \ldots, x_n)$$

$$f_{X_1|X_2\ldots X_n}(x_1 \mid x_2 \ldots x_n) = f_{X_1}(x_1)\,;$$

por tanto

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)\,.$$

13. Función generatriz de momentos

Llamamos *función generatriz de momentos* de X a:

$$M_X(t) \equiv \mathrm{E}\left(e^{tX}\right)$$

Caso discreto

$$M(t) = \sum_{x \in \mathbb{R}_X} e^{tx} P_X(x)$$

Caso continuo

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}_X} e^{tx} f_X(x)\, dx$$

siempre que dicha esperanza exista para $t \in (-h,\ h)$, donde $h > 0$.

Puesto que

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{E}\left(e^{tX}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{d}{dt}e^{tX}\right) = \mathrm{E}\left(Xe^{tX}\right)$$

entonces

$$\left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0} = \mathrm{E}\left(X\right)$$

Del mismo modo

$$\left.\frac{dM^2(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \mathrm{E}\left(X^2\right); \qquad \left.\frac{dM^3(t)}{dt^3}\right|_{t=0} = \mathrm{E}\left(X^3\right); \ldots$$

Ejemplo 6. Sea $f_X(x) = e^{-x},\ x > 0$ entonces

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^\infty e^{tx} \cdot e^{-x}\, dx$$
$$= \int_0^\infty e^{(t-1)x}\, dx = \frac{1}{t-1} e^{(t-1)x}\Big|_0^\infty = 0 - \frac{1}{t-1} = (1-t)^{-1}$$

donde t debe ser **menor que uno** para que la integral esté definida.

Por lo tanto su esperanza es

$$M'_X(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \to M'_X(0) = 1 = \mathrm{E}(X)$$

y

$$M''_X(t) = \frac{2}{(1-t)^3} \to M''_X(0) = 2 = \mathrm{E}\left(X^2\right)$$

sí pues, su varianza es $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left[\mathrm{E}(X)\right]^2 = 2 - 1^2 = 1.$

Ejercicio 36. La función generatriz de momentos de una Chi-cuadrado de r grados de libertad es: $M(t) = (1-2t)^{-r/2}$. Use su función generatriz de momentos para calcular la varianza de una Chi-cuadrado de r grados de libertad.

Solución: Puesto que $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left[\mathrm{E}(X)\right]^2$; realizamos los siguientes cálculos:

Por una parte:

$$M'(t) = \frac{-r}{2}(1-2t)^{\frac{-r}{2}-1}(-2) = r(1-2t)^{\frac{-r}{2}-1}$$

que evaluada en cero es:

$$\mathrm{E}(X) = M'(0) = r$$

Por otra parte:

$$M''(t) = r(\frac{-r}{2}-1)(1-2t)^{\frac{-r}{2}-2}(-2) = (r^2+2r)(1-2t)^{\frac{-r}{2}-2}$$

que evaluada en cero es:

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = M''(0) = r^2 + 2r.$$

Por tanto, $\mathrm{Var}(X) = r^2 + 2r - r^2 = 2r$

Ejercicio 36

EJERCICIO 37. **[Función generatriz de momentos de transformaciones lineales:]** Sea X con $M_X(t)$, y sea $Y = aX + b$.

(a) Demuestre que $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$.

Solución:

$$M_Y(t) = \mathrm{E}\left(e^{Yt}\right) = \mathrm{E}\left(e^{(aX+b)t}\right) = \mathrm{E}\left(e^{aXt} \cdot e^{bt}\right) = e^{bt}\mathrm{E}\left(e^{aXt}\right) = e^{bt} M_X(at).$$

Ejercicio 37

(b) Empleando el resultado anterior demuestre que $\mathrm{E}\left(Y\right) = b + a\mathrm{E}\left(X\right).$

Solución:

$$M_Y'(t) = \frac{dM(t)}{dt} = be^{bt} M_X(at) + e^{bt} a M_X'(at)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(Y\right) =& M_Y'(0) = b \cdot \underbrace{M_X(0)}_{\mathrm{E}\left(e^{X0}\right)=\mathrm{E}(1)=1} + a \cdot \underbrace{M_X'(0)}_{\mathrm{E}(X)} \\ =& b + a\mathrm{E}\left(X\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 37

(c) Sea $Z \sim \mathrm{N}\,(0\,,\,1)$, su función generatriz de momentos es

$$M_Z(t) = e^{t^2/2}$$

(véase Novales, 1997, pp. 223); y sea $Y = \mu + \sigma Z$. Demuestre que

$$M_Y(t) = e^{t\mu + t^2\sigma^2/2}.$$

Solución: Puesto que de (a) sabemos que $M_Y(t) = e^{\mu t} M_Z(\sigma t)$; sustituyendo tenemos:

$$M_Y(t) = e^{\mu t} \cdot M_Z(\sigma t) = e^{\mu t} \cdot e^{(\sigma t)^2/2} = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}.$$

Ejercicio 37

Llamamos *función generatriz de momentos* de $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ evaluada en $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_N)$ a:

$$M_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{t}) = M_{\boldsymbol{X}}(t_1, t_2, \ldots, t_N) = \mathrm{E}\left(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \cdots + t_N X_N}\right)$$

discreto

$$M_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{t}) = \sum_{x_1 \in \mathbb{R}_{X_1}} \cdots \sum_{x_N \in \mathbb{R}_{X_N}} e^{t_1 x_1 + \cdots + t_N x_N} P_{X_1 \ldots X_N}(x_1, \ldots, x_N)$$

continuo

$$M_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}_{X_1}} \cdots \int_{\mathbb{R}_{X_N}} e^{t_1 x_1 + \cdots + t_N x_N} f_{X_1 \ldots X_N}(x_1, \ldots, x_N)\, dx_N \ldots dx_1$$

Los momentos son

$$\frac{\partial^{r+s} M_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{0})}{\partial t_i^r \partial t_j^s} = \mathrm{E}\left({X_i}^r {X_j}^s\right)$$

La función generatriz **marginal** es

$$M_{X_j}(t_j) = M_{\boldsymbol{X}}(0, \ldots, 0, t_j, 0, \ldots, 0)$$

Además, si $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ son independientes, entonces

$$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \prod_{i=1}^{N} M_{X_i}(t_i)$$

Teorema 13.1. *Dos conjuntos de* v.a., $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, *tienen idéntica distribución de probabilidad, si sus funciones generatrices de momentos coinciden (siempre que éstas existan) y viceversa.*

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = M_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t})$$

Sean X e Y independientes con $M_X(t)$ y $M_Y(t)$ respectivamente. Entonces $Z = X + Y$ tiene

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

Demostración

$M_Z(t) = \mathrm{E}\left(e^{tZ}\right) = \mathrm{E}\left(e^{tX+tY}\right) = \mathrm{E}\left(e^{tX}e^{tY}\right) =$

por independencia

$$= \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) \cdot \mathrm{E}\left(e^{tY}\right) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

La demostración es similar para el caso de n *v.a.*s independientes.

Ejercicio 38. Sean X e Y variables aleatorias **independientes** con función generatriz de momentos $(1-t^2)^{-1}$ (distribución de Laplace) y con **esperanza nula**.

(a) Sea $U = X+Y$. Demuestre que la función generatriz de momentos de U es $(1-t^2)^{-2}$.

Solución:

$$\begin{aligned} M_U(t) =& \mathrm{E}\left(e^{t(X+Y)}\right) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) \cdot \mathrm{E}\left(e^{tY}\right) && \text{por independencia} \\ =& M_X(t) \cdot M_Y(t) = (1-t^2)^{-2} \end{aligned}$$

Ejercicio 38

(b) Sea $V = X - Y$. Demuestre que U y V tienen idéntica distribución.

Solución:

$$\begin{aligned} M_V(t) =& \mathrm{E}\left(e^{t(X-Y)}\right) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) \cdot \mathrm{E}\left(e^{-tY}\right) && \text{por independencia} \\ =& M_X(t) \cdot M_Y(-t) = (1-t^2)^{-2} \end{aligned}$$

Por tanto tienen idéntica distribución debido al teorema de unicidad de las funciones generatrices de momentos. Ejercicio 38

(c) Calcule la función generatriz de momentos conjunta de U y V

Solución:

$$\begin{aligned} M_{UV}(s,t) =& \mathrm{E}\left(e^{sU+tV}\right) = \mathrm{E}\left(e^{s(X+Y)+t(X-Y)}\right) \\ =& \mathrm{E}\left(e^{(s+t)X+(s-t)Y}\right) \\ =& \mathrm{E}\left(e^{(s+t)X}\right)\cdot \mathrm{E}\left(e^{(s-t)Y}\right) \qquad \text{por independencia} \\ =& M_X(s+t)\cdot M_Y(s-t) \\ =& (1-(s+t)^2)^{-2}\cdot(1-(s-t)^2)^{-2} \end{aligned}$$

Ejercicio 38

(d) Demuestre que U y V no son independientes

Solución: Y puesto que la función generatriz conjunta $M_{U,V}(s,t)$ es distinta de

$$M_U(s)M_V(t) = (1-s^2)^{-2}\cdot(1-t^2)^{-2}$$

U y V no son independientes.

Ejercicio 38

(e) No obstante, demuestre que U y V están incorreladas

Pista. recuerde que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$, y que $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{E}\left(Y^2\right)$ puesto que ambas variables tienen idéntica distribución.

Solución: Basta con demostrar que $\mathrm{Cov}(U, V) = 0$.

$$\mathrm{Cov}(U, V) = \mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V).$$

Por una parte,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(U) &= \mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = 0 + 0 \\ \mathrm{E}(V) &= \mathrm{E}(X-Y) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) = 0 - 0;\end{aligned}$$

por otra

$$\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}((X+Y)(X-Y)) = \mathrm{E}\left(X^2 - Y^2\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}\left(Y^2\right) = 0.$$

Por tanto $\mathrm{Cov}(U, V) = 0$.

Ejercicio 38

Ejercicio 39. Sea la siguiente función de cuantía

$P_{XY}(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=0$	$1/9$	$3/9$	$2/9$
$x=1$	$1/18$	$1/6$	$1/9$

(a) Obtenga la función generatriz de momentos conjunta.

Solución: Puesto que $M_{X,Y}(t,\tau) = \mathrm{E}\left(e^{tX+\tau Y}\right)$; entonces

$$\begin{aligned} M_{X,Y}(t,\tau) =& \mathrm{E}\left(e^{tX+\tau Y}\right) = \sum_{x_i \in \mathbb{R}_X} \sum_{y_j \in \mathbb{R}_Y} e^{tx_i+\tau y_j} P_{XY}(x_i,y_j) \\ =& 1/9e^{0t+0\tau} + 3/9e^{\tau} + 2/9e^{2\tau} \ + \ 1/18e^{t} + 1/6e^{t+\tau} + 1/9e^{t+2\tau} \end{aligned}$$

Ejercicio 39

(b) Utilizando exclusivamente la función generatriz de momentos calculada en el ejercicio anterior obtenga la esperanza de X.

Solución: La función generatriz de momentos marginal es la conjunta evaluada en $\tau = 0$, por tanto

$$M_X(t) = 2/3 + 1/18e^t + 1/6e^t + 1/9e^t = 2/3 + 1/3e^t$$

derivando respecto de t y evaluando en $t = 0$

$$\mathrm{E}\left(X\right) = \left.\frac{d\ (2/3 + 1/3e^t)}{dt}\right|_{t=0} = 1/3e^0 = 1/3.$$

Ejercicio 39

14. Preguntas y problemas

Test. Conteste a las siguientes cuestiones.

1. Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $Y = 2X + 1$. Además, se tiene que la variable X sigue una distribución uniforme en el intervalo $[-1, 1]$. Se tiene que:

(a) $\rho = 1$, donde ρ es el coeficiente de correlación entre X e Y.

(b) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid x) = \mathrm{E}(Y)$.

(c) $\mathrm{Var}(Y|X = 0) = \mathrm{Var}(Y)$.

(d) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid x) = \mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y)$

2. Suponga que $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y) = \mathrm{E}(X)$ para todo y, entonces necesariamente:

(a) conocer el valor tomado por Y no aporta información sobre la probabilidad de los valores que puede tomar X.

(b) saber que Y ha tomado un valor superior a $\mathrm{E}(Y)$ no aporta información sobre la probabilidad de que X tome un valor superior a $\mathrm{E}(X)$.

(c) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid x) = \mathrm{E}(Y)$ para todo x.

(d) $\mathrm{Var}_{X|Y}(X \mid y) = \mathrm{Var}(X)$ para todo y.

Solución:

- conocer el valor de Y no aporta información sobre los valores que puede haber tomado X *sólo cuando* X e Y son independientes; algo que no necesariamente ocurre cuando $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y) = \mathrm{E}(X)$.
- Puesto que la esperanza condicionada de X no depende de los valores tomados por Y, saber que Y ha tomado un valor determinado no nos dice nada acerca de $\mathrm{E}(X)$ (por lo tanto 2 es cierta).
- En general, $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid y) = \mathrm{E}(X)$ no implica ni $\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid x) = \mathrm{E}(Y)$, ni tampoco $\mathrm{Var}_{X|Y}(X \mid y) = \mathrm{Var}(X)$.

Fin 2

El siguiente texto es valido para las 3 siguientes preguntas:

Sea la función

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < y < 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

3. El valor de k que hace que $f_{XY}(x,y)$ sea función de densidad viene dado por la ecuación:

(a) $\int_x^2 \int_0^2 k dy dx = 1$.

(b) $\int_0^2 \int_x^2 k dy dx = 1$.

(c) $\int_0^2 \int_0^2 k dy dx = 1$.

(d) ninguna de las anteriores.

4. Conocida una realización $X = 1$, se tiene que:

(a) la realización de Y está en el intervalo $(0, 1)$.

(b) para cualesquiera realizaciones, las variables X e Y son independientes.

(c) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, 1) < \mathrm{E}(Y)$.

(d) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, 1) \geq \mathrm{E}(Y)$.

5. Se tiene que:

(a) $P(X+Y \leq 2) = \int_0^1 \int_x^{2-x} f_{XY}(x,y)\, dydx.$

(b) $P(X+Y \leq 2) = \int_0^1 \int_0^1 f_{XY}(x,y)\, dydx.$

(c) $P(X+Y \leq 2) = \int_0^1 \int_x^2 f_{XY}(x,y)\, dydx.$

(d) ninguna de las anteriores.

■ fin del grupo de preguntas ■

La siguiente función se utiliza en las preguntas 6, 7, 8, 9 y 10:
Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta (para algún valor concreto de k)

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k[1+xy(x^2-y^2)] & \text{para } -1<x<1;\ -1<y<1 \\ 0 & \text{en los restantes casos} \end{cases}.$$

6. Que valor debe tomar k para que $f_{XY}(x,y)$ sea función de densidad.

(a) $k = 4$
(b) $k = 1/4$
(c) $k = 2$
(d) $k = 1/2$

Solución:

$$\begin{aligned} 1 = & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k[1+xy(x^2-y^2)]dxdy \\ = & k\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dxdy + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^3y - xy^3)dxdy\right] \\ = & k\left[4 + \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^4}{4}y - \frac{x^2}{2}y^3\right]_{-1}^{1} dy\right] \\ = & k\left[4 + \int_{-1}^{1}\left[\frac{y}{4} - \frac{y^3}{2} - \frac{y}{4} + \frac{y^3}{2}\right]_{-1}^{1} dy\right] = k\cdot 4 \end{aligned}$$

por tanto $k = 1/4$. Fin 6

7. Las funciones de densidad marginal de X y Y son

(a) $f_X(x) = 1/2;$ $\quad f_Y(y) = 1/4$

(b) $f_X(x) = 1/2;$ $\quad f_Y(y) = 1/2$

(c) $f_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{4};$ $\quad f_Y(y) = \frac{1}{4} + \frac{y}{4} - \frac{y^2}{2}$

(d) $f_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{4};$ $\quad f_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{y}{4} - \frac{y^2}{2}$

Solución:La densidad marginal de X es

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)]dy = \frac{2}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$$

De manera análoga $f_Y(y) = \frac{1}{2}$ Fin 7

8. La covarianza entre X e Y es

(a) $\operatorname{Cov}(X,Y) = \frac{1}{5}$

(b) $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$

(c) $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$; y por lo tanto X e Y son independientes

(d) ninguna de las anteriores

Solución:Podemos calcular $\operatorname{Cov}(X,Y)$ como

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{E}(XY) - \operatorname{E}(X)\operatorname{E}(Y).$$

Por una parte

$$\operatorname{E}(X) = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0,$$

y análogamente $\operatorname{E}(Y) = 0$.

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\operatorname{E}(XY) = & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy\cdot\tfrac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)]dxdy \\
= & \frac{1}{4}\left[\underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xydxdy}_{\text{A}} + \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^4y^2dxdy}_{\text{B}} - \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2y^4dxdy}_{\text{C}}\right]
\end{aligned}$$

donde

$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xydxdy = \int_{-1}^{1} xdx \int_{-1}^{1} ydy = 0,$$

$$\mathrm{B} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xydxdy = \int_{-1}^{1} x^4dx \int_{-1}^{1} y^2dy = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{15},$$

$$\mathrm{C} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xydxdy = \int_{-1}^{1} x^2dx \int_{-1}^{1} y^4dy = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{15},$$

por lo tanto

$$\mathrm{E}\left(XY\right) = \frac{1}{4}[\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}] = 0.$$

Podemos concluir que

$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right) = \mathrm{E}\left(XY\right) - \mathrm{E}\left(X\right)\mathrm{E}\left(Y\right) = 0 - 0\cdot 0 = 0;$$

es decir, no hay relación lineal entre X e Y, lo que no quiere decir no pueda existir algún otro tipo de relación; de hecho

$$f_X\left(x\right)\cdot f_Y\left(y\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq f_{XY}\left(x,y\right) = \frac{1}{4}[1 + xy(x^2-y^2)]$$

por lo que ambas variables no son independientes. Fin 8

9. Señale la afirmación correcta. La esperanza de Y condicionada a $X = x$ es:

(a) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,x) = 0$

(b) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x$

(c) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,x) > \mathrm{E}(Y)$

(d) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,x) < \mathrm{E}(Y)$

Solución:Necesitamos la función de densidad condicional, es decir

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(Y \mid x) &= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}[1+xy(x^2-y^2)]}{1/2} \\ &= \frac{1}{2}[1+xy(x^2-y^2)] \end{aligned} .$$

La esperanza condicional es

$$\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,x) = \int_{-1}^{1} y\frac{1}{2}[1+xy(x^2-y^2)] = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x.$$

Fin 9

10. ¿Cual es la probabilidad de que $X+Y \geq 0$?

(a) $5/24$ (b) $1/2$

(c) $1/4$ (d) $3/8$

Solución:

$$P(X+Y>0)=\int_{-1}^{1}\int_{-x}^{1}\frac{1}{4}[1+xy(x^2-y^2)]dydx$$
$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{y}{4}+\frac{x^3y^2}{2}-\frac{xy^4}{4}\right]_{y=-x}^{y=1}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}+\frac{x^3}{2}-\frac{x}{4}\right)-\left(-\frac{x}{4}+\frac{2x^5}{4}-\frac{x^5}{4}\right)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{4}dx=\left[\frac{x}{4}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{24}\right]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}-\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}-\right)=\frac{1}{2}$$

Fin 10

■ fin del grupo de preguntas ■

La siguiente información es válida para las dos próximas preguntas:

Suponga la siguiente tabla de probabilidades de la variable aleatoria bidimensional (X,Y):

	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=0$	$2/18$	$6/18$	$4/18$
$Y=1$	$1/18$	$3/18$	$2/18$

11. De las siguientes afirmaciones:

(i) $P_X(X=2)=9/18$

(ii) $P_Y(Y=0)=12/18$

(iii) $\mathrm{E}\,(X)=13/6$

(iv) Su coeficiente de correlación lineal es cero

Sólo son ciertas:

(a) La (i) y la (ii)

(b) Todas

(c) Todas menos la (iv)

(d) Ninguna

12. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, 2) = 2/3$

(b) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, 2) = \mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, 3)$

(c) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, 2) > \mathrm{E}(Y)$

(d) $\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\, 2) < \mathrm{E}(Y)$

■ fin del grupo de preguntas ■

13. Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $Y = aX^2$, donde $a > 0$ es constante y $x < 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) El coeficiente de correlación lineal es 1 al ser $a > 0$.

(b) El coeficiente de correlación lineal no tiene porque ser 1, pero siempre será positivo al ser $a > 0$.

(c) El coeficiente de correlación lineal es cero debido al término cuadrático.

(d) El coeficiente de correlación lineal depende de la ley de probabilidades de X.

14. Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $Y = aX + b$ y $\mathrm{Var}\,(X) > 0$, donde a y b son números fijos. Sea ρel coeficiente de correlación poblacional entre ambas variables. Se tiene que:

(a) $\rho = 1$ si $|a| = 1$

(b) $\rho = 1$ para cualquier a

(c) $\mathrm{Var}\,(Y|\ X = 1) > \mathrm{Var}\,(Y)$

(d) $|\rho| = 1$ si $a \neq 0$

Solución:

- Si $a = -1$; $|a| = 1$ y sin embargo $\rho = -1$
- Si $a < 0$, $\rho = -1$.
- Dada la relación determinista entre X e Y, se verifica que $\mathrm{Var}\,(Y|\ X = 1) = 0$ ya que si $X = 1$ entonces $(Y|\ X = 1) = a + b$ es una constante; pero si $a \neq 0$ entonces $\mathrm{Var}\,(X) > 0$, que implica que $\mathrm{Var}\,(Y) > 0$.

Fin 14

La siguiente función se utiliza en las preguntas 15, 16 y 17:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < 2y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

15. El valor de k que hace que $f_{XY}(x,y)$ sea función de densidad viene dado por la ecuación:

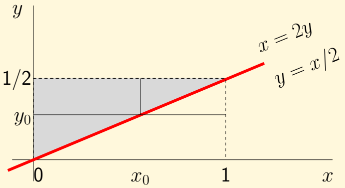
(a) $\int_0^1 \int_0^{2x} f_{XY}(x,y)\, dydx = 1.$

(b) $\int_0^{\frac{1}{2}x} \int_0^1 f_{XY}(x,y)\, dxdy = 1.$

(c) $\int_0^1 \int_0^{2y} f_{XY}(x,y)\, dydx = 1.$

(d) ninguna de las anteriores.

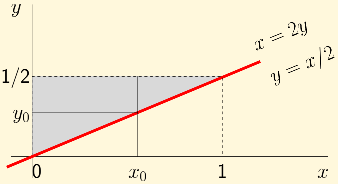
Solución:El soporte es el triángulo con vértices (0, 0), (0, 1/2) y (1,1/2).



Por lo tanto la respuesta correcta es

$$\int_0^1 \int_{x/2}^{1/2} f_{XY}(x,y)\,dydx = 1.$$

o bien



$$\int_0^{1/2} \int_0^{2y} f_{XY}(x,y)\,dxdy = 1.$$

De hecho el valor de k es

$$\int_0^{1/2} \int_0^{2y} k dxdy = k \int_0^{1/2} 2ydy = k\left[y^2\right]_0^{1/2} = k \cdot 1/4 = 1$$

por tanto $k = 4$. Fin 15

16. Conocida una realización de $X = \frac{1}{2}$, se tiene que:

(a) la realización de Y está en el intervalo $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

(b) sabemos lo mismo sobre las posibles realizaciones de Y que si no conociéramos la realización de X.

(c) esperamos que Y haya tomado un valor inferior a $\mathrm{E}(Y)$.

(d) esperamos que Y haya tomado un valor igual o superior a $\mathrm{E}(Y)$.

Solución:

- Puesto que $X = 1/2$ y $x < 2y < 1$ la realización de y debe pertenecer al intervalo $(1/4,\ 1/2)$.
- La distribución marginal de X es

$$\int_{x/2}^{1/2} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{x/2}^{1/2} 4dy = \left[4y\right]_{x/2}^{1/2} = 2 - 2x$$

  y la de Y es

$$\int_{0}^{2y} 4dx = \left[4x\right]_{0}^{2y} = 8y$$

  De donde deducimos que en general

$$f_X(x)\, f_Y(y) = 8y \cdot (2-2x) \neq 4 = f_{XY}(x,y)$$

  por tanto no son independientes y la información de X condiciona la distribución de Y.

- Por una parte

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,(Y) = & \int_0^{1/2} y f_Y\,(y)\,dy = \int_0^{1/2} y \cdot 8y dy = \left[\tfrac{8y^3}{3}\right]_0^{1/2} \\ = & \ 1/3; \end{aligned}$$

por otra

$$f_{Y|X}\,(Y \mid x) = \frac{f_{XY}\,(x,y)}{f_X\,(x)} = \frac{4}{2-2x} = \frac{2}{1-x}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{Y|X}\,(Y|\,x) = & \int_{x/2}^{1/2} y f_{Y|X}\,(Y \mid x)\,dy \\ = & \int_{x/2}^{1/2} y \tfrac{2}{1-x} dy \\ = & \left[\tfrac{y^2}{1-x}\right]_{x/2}^{1/2}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\mathrm{E}\left(Y|\ X = 1/2\right) = \left[\frac{y^2}{1/2}\right]_{1/4}^{1/2} = 0.375 > 1/3 = \mathrm{E}\,(Y)\,.$$

Fin 16

17. Sea $a \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y $Z = X + Y$, se tiene que:

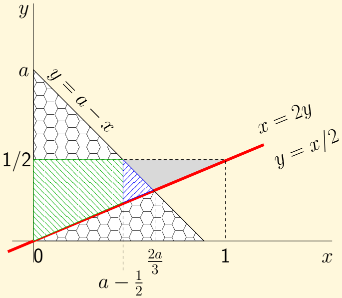
(a) $P\left(Z \leq a\right) = \int_0^{a-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}} f_{XY}\left(x,y\right) dydx + \int_{a-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}a} \int_{\frac{1}{2}x}^{a-x} f_{XY}\left(x,y\right) dydx$

(b) $P\left(Z \leq a\right) = \int_0^{a-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}x}^{a} f_{XY}\left(x,y\right) dydx + \int_{a-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}a} \int_{\frac{1}{2}x}^{a-x} f_{XY}\left(x,y\right) dydx$

(c) $P\left(Z \leq a\right) = \int_0^{a} \int_0^{a} f_{XY}\left(x,y\right) dydx$

(d) ninguna de las anteriores.

Solución:



Fin 17

18. Sean $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n \sim i.i.d$ con momentos bien definidos. Señale la afirmación correcta. Sea $\widehat{\overline{x}}$ el estimador de media muestral.

(a) La función generatriz de $\widehat{\overline{x}}$ coincide con la función generatriz de momentos conjunta de $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ evaluada en $(1/n,\ 1/n,\ \ldots,\ 1/n)$.

(b) Si las variables aleatorias X_i tienen distribución normal, entonces necesitamos aplicar el Teorema Central del Límite para conocer la distribución asintótica de $\widehat{\overline{x}}$.

(c) La esperanza de $\widehat{\overline{x}}$ coincide con $\mathrm{E}\left(X\right)$ sólo si las variables aleatorias X_i tienen distribución normal.

(d) Si variables aleatorias X_i no tienen distribución normal, no podemos conocer de $\widehat{\overline{x}}$ ni su distribución para muestras finitas, ni tampoco su distribución asintótica.

EJERCICIO 40. Sea X una variable aleatoria con la siguiente función generatriz de momentos $M_X(t) = \lambda(1 + t^2)$.

(a) Calcule $\mathrm{E}(X)$

Solución:

$$\left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0} = \mathrm{E}(X) = 2\lambda 0 = 0$$

Ejercicio 40

(b) Calcule $\mathrm{Var}(X)$

Solución: Puesto que

$$\left.\frac{dM^2(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \mathrm{E}\left(X^2\right) = 2\lambda$$

Entonces $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - [\mathrm{E}(X)]^2 = 2\lambda$

Ejercicio 40

Ejercicio 41. Comente y/o responda brevemente las siguientes frases:

(a) En **ningún** caso podemos concluir que dos variables aleatorias que estén incorrelacionadas sean independientes.

Solución: Cuando ambas variables aleatorias tienen **distribución conjunta normal**, entonces incorrelación implica necesariamente independencia. Ejercicio 41

(b) Tenemos dos variables X, Y. Su coeficiente de correlación lineal está muy próximo a cero. Así, concluimos que la la relación entre las dos variables es prácticamente inexistente.

Solución: La conclusión es falsa. La correlación lineal indica el grado de relación **lineal** entre dos variables. Si el coeficiente de correlación lineal está muy próximo a cero, esto quiere decir que relación **lineal** entre las dos variables es prácticamente inexistente. Pero esto no es óbice para que pueda existir una fuerte relación (no lineal) entre las variables. Ejercicio 41

(c) Dadas dos variables aleatorias X, Y. Sus momentos de primer y segundo orden existen, están bien definidos y son conocidos. La aproximación lineal a la esperanza condicional $\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid x)$ es $a+b\cdot x$, siendo $a=\mathrm{E}(Y)-b\mathrm{E}(X)$ y $b=\mathrm{Cov}(X,Y)/\sigma_X^2$. Pese a su sencillo cálculo, esta aproximación tiene el inconveniente de que **es siempre una mera aproximación** (es decir, nunca podemos garantizar que coincida con la verdadera esperanza condicional).

Solución: Cuando la esperanza condicional es una función lineal de x, la aproximación lineal coincide con la verdadera esperanza condicional (esto siempre es así cuando X e Y tienen distribución conjunta normal). Ejercicio 41

15. Trasparencias

Lista de Trasparencias

16. Bibliografía

Casella, G. y Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*. Duxbury Advanced Series. Duxbury, USA, segunda ed. ISBN 0-534-24312-6. 279

López Cachero, M. (1992). *Fundamentos y métodos de estadística*. Ediciones Pirámide, Madrid. ISBN 84-368-0425-2. 21

Mittelhammer, R. C. (1996). *Mathematical Statistics for Economics and Business*. Springer-Verlag, New York, primera ed. ISBN 0-387-94587-3. 21

Novales, A. (1997). *Estadística y Econometría*. McGraw-Hill, Madrid, primera ed. ISBN 84-481-0798-5. 7, 21, 44, 46, 125, 154, 205, 233

Papoulis, A. (1991). *Probability, random variables, and stochastic processes*. Electrical & Electronic Engineering Series. McGraw-Hill, New York, tercera ed. ISBN 0-07-100870-5. 202

Peña, D. (2001). *Fundamentos de Estadística*. Alianza Editorial, Madrid. ISBN 84-206-8696-4. 7, 21

Peña, D. (2002). *Regresión y diseño de experimentos*. Alianza Editorial, Madrid. ISBN 84-206-8695-6. 7

Peña, D. y Romo, J. (1997). *Introducción a la Estadística para la Ciencias Sociales*. McGraw-Hill, Madrid. ISBN 84-481-1617-8. 7

Spanos, A. (1999). *Probability Theory and Statistical Inference. Econometric Modeling with Observational Data*. Cambridge University Press, Cambridge, UK. ISBN 0-521-42408-9. 9, 12, 21

A. Momentos univariantes

Para X_1 y X_2 v.a. y a, b y c constantes; $\mathrm{E}\left(\cdot\right)$ satisface las siguientes propiedades:

E1. $\mathrm{E}\left(c\right) = c$

E2. $\mathrm{E}\left(aX_1 + bX_2\right) = a\mathrm{E}\left(X_1\right) + b\mathrm{E}\left(X_2\right)$

Por lo tanto, la aplicación *esperanza*, $\mathrm{E}\left(\cdot\right)$, es lineal.

Para X_1 y X_2 v.a. *independientes*; y a, b y c constantes; $\mathrm{Var}\,(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

V1. $\mathrm{Var}\,(c) = 0$

V2. $\mathrm{Var}\,(aX_1 + bX_2) = a^2\mathrm{Var}\,(X_1) + b^2\mathrm{Var}\,(X_2)$

B. Demostraciones

Puesto que $\{X = x\} \subset \{x - \epsilon < X \leq x\}$ para cualquier $\epsilon > 0$, entonces

$$P(X = x) \leq P(x - \epsilon < X \leq x) = F_X(x) - F_X(x - \epsilon)$$

para cualquier $\epsilon > 0$. Por tanto

$$0 \leq P(X = x) \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} [F_X(x) - F_X(x - \epsilon)] = 0$$

por continuidad de $F_X(x)$.
(Casella y Berger, 2002, pp. 35)

Partes del temario

- Tema 1 IntEctr-T01
- Tema 2 IntEctr-T02
- Tema 3 IntEctr-T03
- Tema 4 IntEctr-T04
- Tema 5 IntEctr-T05
- Tema 6 IntEctr-T06
- Tema 7 IntEctr-T07

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 33(a)

$P_{XY}(x,y)$	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$0\cdot k$	$1\cdot k$	$2\cdot k$
$Y=0$	$1\cdot k$	$1\cdot k$	$1\cdot k$
$Y=1$	$2\cdot k$	$1\cdot k$	$0\cdot k$

que suma $9\cdot k$; por tanto $k=\frac{1}{9}$.

$\square$

Ejercicio 33(b) Primero calculamos la función de cuantía marginal

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$P_X(x)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Por tanto

$$\mathrm{E}(X) = \sum x P_X(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$\square$

Ejercicio 33(c) Primero necesitamos calcular la función de cuantía condicionada a que $Y = -1$; sabiendo que $P(Y = -1) = \frac{1}{3}$

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$P_{X\|Y}(x \mid -1)$	0	$1/3$	$2/3$

Por tanto

$$\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid -1) = \sum x P_{X|Y}(x \mid -1) = \frac{2}{3}$$

$\square$

Ejercicio 33(d) Por una parte

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \sum x^2 P_X(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad \mathrm{Var}\left(X\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}\left(X\right)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{E}\left(Y\right) = \sum y P_Y(y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \qquad \mathrm{E}\left(Y^2\right) = \sum y^2 P_Y(y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right) = \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}\left(Y\right)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{E}\left(XY\right) = \sum\sum xy P_Y(y) = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{4}{9} \qquad \mathrm{Cov}\left(X,Y\right) = \mathrm{E}\left(XY\right) - \mathrm{E}\left(X\right)\mathrm{E}\left(Y\right) = -$$

Por tanto

$$\rho_{XY} = -\frac{4/9}{\sqrt{2/3 \cdot 2/3}} = -\frac{4/9}{2/3} = -\frac{2}{3}$$

$\square$

Ejercicio 33(e) Z es una variable cuyo soporte son los valores enteros desde -2 hasta 2. Pensemos primero cuales son sus probabilidades:

$$
\begin{aligned}
P(Z=-2) &= P_{XY}(-1,1) = \frac{2}{9} \\
P(Z=-1) &= P_{XY}(-1,0) + P_{XY}(0,1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \\
P(Z=0) &= P_{XY}(-1,-1) + P_{XY}(0,0) + P_{XY}(0,0) = 0 + \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9} \\
P(Z=1) &= P_{XY}(0,-1) + P_{XY}(1,0) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \\
P(Z=2) &= P_{XY}(1,-1) = \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\mathrm{E}(Z) = -2\frac{2}{9} - 1\frac{2}{9}0 + \frac{1}{9} + 1\frac{2}{9} + 2\frac{2}{9} = 0
$$

$\square$

Ejercicio 33(f) $(Z \mid Y = -1)$ es una variable cuyo soporte son los valores enteros desde 0 hasta 2. Pensemos primero cuales son sus probabilidades:

$$P\,(\,Z = 0 \mid Y = -1) = P_{X|Y}\,(\,-1 \mid -1) = 0$$
$$P\,(\,Z = 1 \mid Y = -1) = P_{X|Y}\,(\,0 \mid -1) = \frac{1}{3}$$
$$P\,(\,Z = 2 \mid Y = -1) = P_{X|Y}\,(\,1 \mid -1) = \frac{2}{3}$$

Por tanto

$$\mathrm{E}_{\,Z|Y}\,(\,Z \mid -1) = 1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$\square$

Ejercicio 33(g)

$$\mathrm{E}_{Y|X}(Y|\,x) \approx 0 + \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}x = -\frac{2}{3}x$$

$\square$