

Dpto. de Economía Cuantitativa
Universidad Complutense de Madrid
Introducción a la Econometría

Tema 2 — Probabilidad multivariante

Marcos Bujosa y Gustavo A. Marrero

Material de apoyo para el curso *Introducción a la Econometría* de la licenciatura en Economía de la Universidad Complutense de Madrid.

© 2003–2007 Marcos Bujosa y Gustavo A. Marrero
Actualizado el: 31 de mayo de 2007

Versión 4.1

Copyright © 2003–2007 Marcos Bujosa y Gustavo A. Marrero



Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento-CompartirIgual de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/es/deed.es> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Puede encontrar la última versión de este material en:

<http://www.ucm.es/info/ecocuan/mbb/index.html#ietria>

Índice

Índice	1
Probabilidad multivariante	3
1. Introducción	3
2. Espacio de probabilidad	8
2.1. Probabilidad condicionada	10
3. Variables aleatorias	11
3.1. Variables aleatorias discretas	12
3.2. Variables aleatorias continuas	13
4. Variables aleatorias bivariantes	15
5. Distribuciones marginales	21
6. Distribuciones condicionadas	22
6.1. Caso discreto	23
6.2. Caso continuo	24
7. Independencia	26
8. Momentos conjuntos	27
8.1. Propiedades de los momentos bivariantes	28
9. Momentos condicionados	30
9.1. Propiedades de la esperanza condicional	31

10. Función de regresión y función cedástica. Esperanzas y varianzas condicionales estocásticas	33
10.1. Esperanzas iteradas	34
10.2. Identidad de la varianza condicional	35
10.3. Propiedades de la esperanza condicional estocástica	36
10.4. Esperanza condicional cuando es una función lineal	37
10.5. Aproximación lineal de la esperanza condicional. Recta de regresión	38
11. Transformación de variables	42
12. Distribuciones multivariantes	46
13. Función generatriz de momentos	47
14. Preguntas y problemas	49
15. Bibliografía	54
A. Momentos univariantes	54
B. Demostraciones	60
. Soluciones a los Ejercicios	62
. Soluciones a los Tests	93

Este es un material de apoyo a las clases. En ningún caso sustituye a los libros de texto que figuran en el programa de la asignatura; textos que el alumno debe estudiar para afrontar el examen final con ciertas garantías de éxito.

El programa se cubre con los siguientes capítulos de libro de texto [Novales \(1997\)](#)¹:

Capítulos 1 a 3: Estos temas han sido cubiertos en asignaturas anteriores, y debido a su bajo nivel de complejidad no se verán en clase (aunque forman parte del programa).

Capítulos 4 a 6: Estos temas han sido cubiertos en las asignaturas [Estadística I](#) y [II](#). Se realizará un breve repaso en clase (una semana o semana y media como máximo), asumiendo que el alumno es capaz de preparar por su cuenta esta parte.

Capítulos 7 y 8: completos

Capítulo 9: secciones 9.4 a 9.6

Capítulos 10 y 12: completos

¹Otros excelentes manuales en castellano son [Peña \(2001\)](#), [Peña \(2002\)](#) y [Peña y Romo \(1997\)](#).

Probabilidad multivariante

Tema 2. Variable Aleatoria Bidimensional.

1. Introducción. Variable aleatoria bidimensional.
2. Distribuciones de probabilidad de tipo discreto. Conjuntas y marginales.
3. Distribuciones de probabilidad de tipo continuo. Densidades conjuntas y marginales.
4. Calculo de probabilidades conjuntas.
5. Momentos conjuntos. Covarianza y coeficiente de correlación lineal.
6. Variables aleatorias condicionadas. Leyes de probabilidad condicionadas.
7. Momentos condicionados. Esperanza y varianza condicionada.
8. Esperanza condicionada como función de X o como variable aleatoria. Uso de su función inversa. Aplicación de cambio de variable unidimensional.
9. Aproximación lineal de la Esperanza condicionada. El predictor lineal óptimo.
10. Funciones generatrices de momentos en el caso bivariante.
11. Cambio de variables en distribuciones bivariantes. Ejemplos.
12. Distribuciones multivariantes

1. Introducción

Una buena introducción aparece en ([Spanos, 1999](#), Cap. 1).

↑
Modelo Teórico vs Mundo Real
1

¿Cuanto mide una linea pintada sobre la diagonal de una pared? (mundo real)

A.- Teoría matemática (Geometría Euclídea⇒Teorema de Pitágoras)

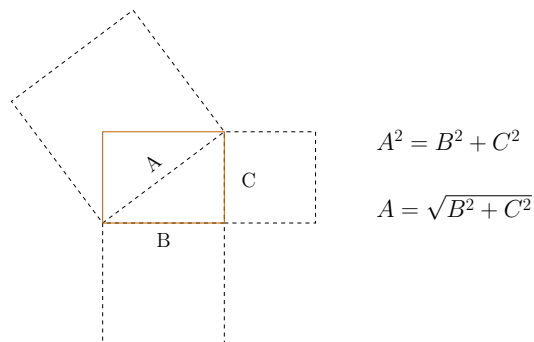
B.- Modelo teórico (representación abstracta de la pared)

Del modelo podemos inferir una respuesta *tentativa* midiendo los lados

El “mundo” teórico y el “mundo” real son distintos. El teórico suele ser más simple, y en dicha simplicidad radica su utilidad. Las respuestas que podemos obtener con el modelo teórico no son reales; pero a veces son suficientemente buenas como para resultarnos útiles.

Piense en la pared de un edificio construido con bloques de piedra cuadrados (con un metro de lado cada uno). Imagine que alguien quiere pegar cinta adhesiva a lo largo de la diagonal. ¿Cuantos metros de cinta necesita?

En la Geometría Euclídea (modelo matemático) hay un resultado que dice que (en el plano) la suma del cuadrado de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa (Teorema de Pitágoras); y que la diagonal divide un rectángulo dos triángulos rectángulos.



Supongamos un modelo teórico para la pared: *la pared es plana y con forma de rectángulo*. Bajo este marco teórico, un calculo sencillo es medir el nº de bloques de la base y de la altura de la pared; y emplear el teorema de Pitágoras. ¿Se ajusta la respuesta a la realidad?... Desgraciadamente No.

Si la pared fuese perfectamente plana (las paredes suelen alabearse) y perfectamente rectangular (los angulos no suelen ser de exáctamente 90 grados) entonces la respuesta sería correcta; pero las irregularidades

de la pared alejan el modelo teórico de la realidad. No obstante, la aproximación suele ser suficientemente buena como para que nos resulte útil.

En estadística y econometría (incluyendo las series temporales) no estamos interesados en estudiar longitudes (como en el ejemplo anterior), sino regularidades en sucesos que nos resultan aleatorios; es decir, queremos estudiar regularidades en el azar de los sucesos.

Las regularidades son de tres tipos

1. **Distribución:** ¿cuan probables son cada uno de los resultados posibles de un suceso o acontecimiento?
2. **Dependencia (o Independencia):** ¿afecta un resultado particular a las probabilidades de otros sucesos?
3. **Heterogeneidad (u Homogeneidad²)** ¿La distribución de las probabilidades de un suceso o acontecimiento es igual que la de otro? ¿Cambia dicha distribución con el tiempo?

↑	<u>Regularidades en el azar</u>	2
Azar: incertidumbre sobre cada resultado particular de un fenómeno		
Regularidad: persistente regularidad en comportamiento de resultados		
Regularidad en el azar ^a		
<ol style="list-style-type: none"> 1. Distribución 2. Dependencia (o Independencia) 3. Heterogeneidad (u Homogeneidad^b) 		
Lanzamiento de un dado ¿plástico o plastilina?		octave
<hr style="width: 30%; margin-left: 0;"/> ^a (véase Spanos, 1999, Capitulo 1) ^b Idéntica distribución (ID)		

Ejemplo 1. Piense en el lanzamiento de un dado:

1. **Distribución:** por argumentos de simetría podemos deducir lo siguiente. Puesto que todas las caras son similares, ningún resultado debe ser más probable que otro. Por tanto, todos los resultados deben tener la misma probabilidad. Es decir, la distribución debe ser uniforme.
2. **Dependencia (o Independencia):** El resultado de un lanzamiento no altera las características del dado. Por tanto las probabilidades no deben cambiar (el argumento de simetría se mantiene). Es decir, los sucesivos lanzamientos son independientes entre si (las probabilidades no cambian).
3. **Heterogeneidad (u Homogeneidad³):** El razonamiento anterior nos indica que las distribuciones de probabilidad son homogéneas para todos los lanzamientos. Es decir todos los lanzamientos tienen idéntica distribución (ID).

Piense, para cada uno de los puntos, si esto se mantiene cuando el dado es de plastilina (nótese que en cada lanzamiento las características del dado cambian, pues las caras se van deformando por los golpes).

Ejemplo 2. De manera similar, mirando el Cuadro 1, podemos deducir que la suma del lanzamiento de DOS dados debe tener distribución triangular: de los 36 posibles resultados sólo uno suma 2, sólo 3 suman 3, sólo 3 suman 4, etc. (Distribución triangular).

Además, el resultado de un ensayo de lanzamiento no afectará al siguiente ensayo! (No nos ayuda a prever el resultado del siguiente ensayo: **Independencia**) y nada nos hace suponer que el comportamiento de los dados vaya a cambiar conforme transcurre el tiempo o el número de ensayos (**Homogeneidad**).

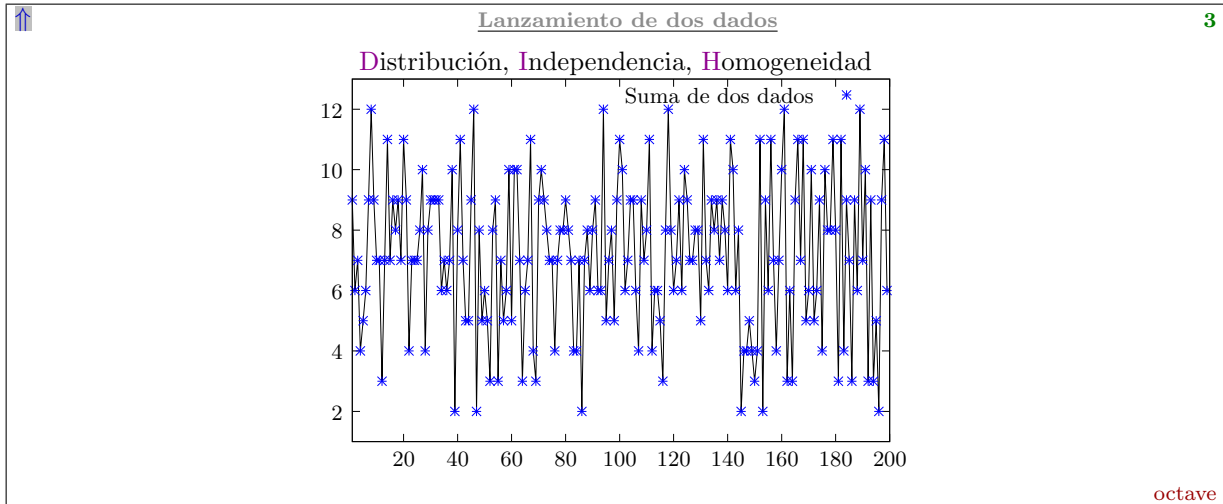
Piense de nuevo si esto se mantiene cuando el dado es de plastilina.

²Idéntica distribución (ID)

³Idéntica distribución (ID)

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

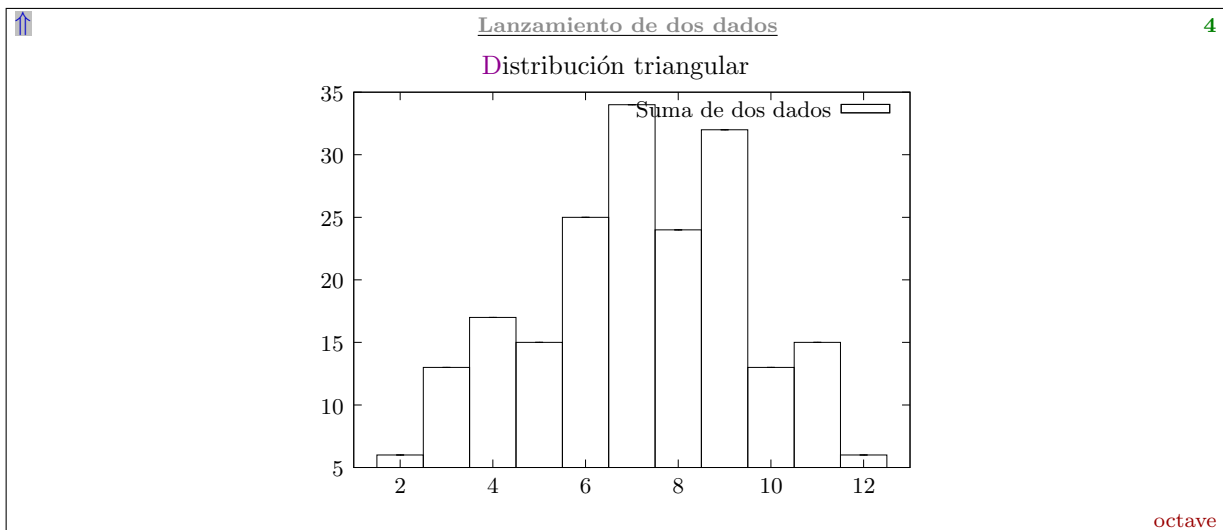
Cuadro 1: resultados elementales en el lanzamiento de dos dados



En la simulación realizada por ordenador del lanzamiento de 2 dados 200 veces, se puede observar que los resultados más frecuentes son los números próximos a 7 y que, por el contrario, los números más alejados a 7 son menos frecuentes. En el histograma se vé claramente esta característica referente a la *Distribución triangular*.

Si usted tapa parcialmente la figura de los sucesivos resultados el último dato observado no le ayuda a anticipar cómo será el siguiente resultado: *los lanzamientos son Independientes*.

Si usted compara la primera parte del gráfico con la segunda, no hay diferencias significativas en el comportamiento: *Homogeneidad*



↑ ¿Regularidades en fenómenos económicos? 5

- Lanzamiento 2 dados:
 - Distribución (triangular)
 - Independencia, Homogeneidad (I.I.D.)

- ¿Regularidad en *fenómenos económicos*?
 - No podemos derivar una dist. *a priori* (ej.: mediante argumentos de simetría)
 - Con frecuencia resultados dependientes; y condiciones cambian con el tiempo (Heterogeneidad).

- Índice de cotizaciones NASDAQ:
 - Distribución (campaniforme para la tasa de variación), Dependencia, Heterogeneidad

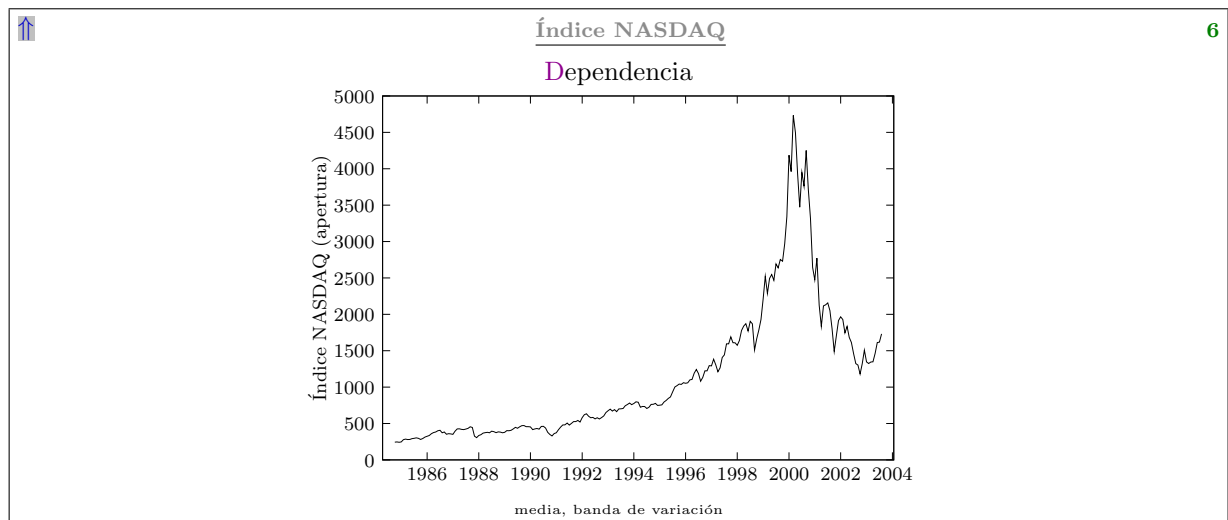
La deducción “a priori” del posible comportamiento de fenómenos físicos sencillos es algo frecuente en estudios experimentales . . . ¿podemos esperar algo semejante con los fenómenos económicos?

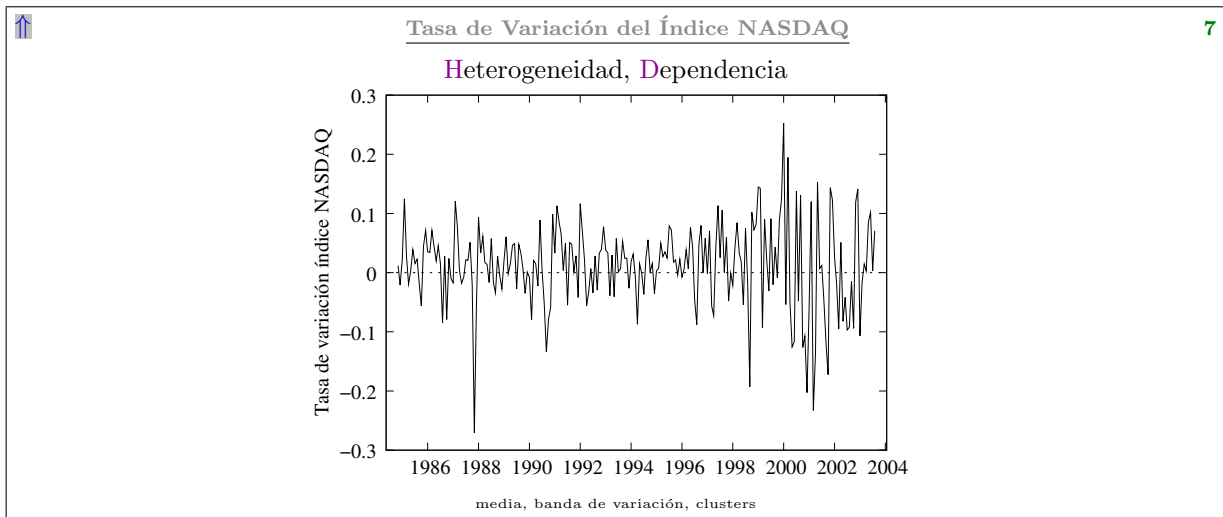
Aunque no podamos deducir “a priori” el comportamiento, podemos observar regularidades dentro del “posible” azar con que se han sucedido las observaciones.

Ejemplo 3. El nivel del índice NASDAQ parece *depender* del nivel en el mes anterior (Datos mensuales de octubre de 84 a agosto de 2003. Fuente S&P); así, es posible prever que el índice en el mes siguiente estará alrededor del nivel del mes corriente. Por otra parte, parece que la volatilidad de la serie *depende* de la volatilidad inmediatamente anterior.

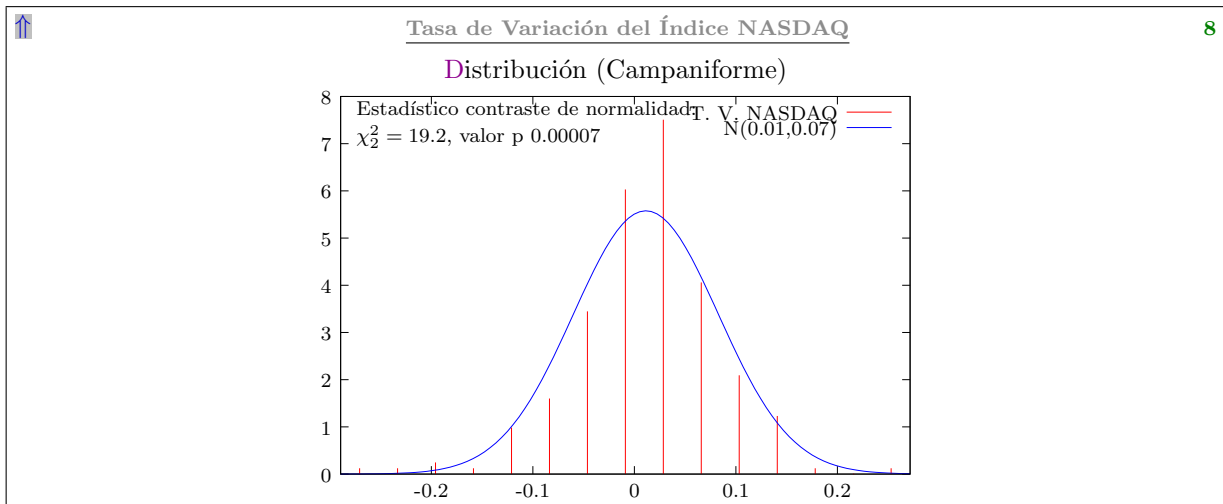
Mirando la tasa de variación del índice NASDAQ, podemos ver que su nivel se mantiene alrededor de cero, y la banda de variación parece relativamente constante, pero existen clusters de volatilidad (la última parte de la muestra es claramente más volátil o inestable); por tanto hay *heterogeneidad* en la distribución.

Viendo el histograma de la tasa de variación se puede observar que su *distribución* es campaniforme (seguramente una *t* de Student).





7



8

Estadística y Econometría

Objetivo: identificar patrones de regularidad en datos. 0.1

A.- Teoría matemática: Probabilidad. Formaliza conceptos de *distribución (D)*, *independencia (I)* y *homogeneidad (H)*. Temas 1 a 3

B.- Modelo estadístico

- frecuencias relativas ↔ **distribución** (N,U, χ^2 ,...) (D)
- impredecibilidad ↔ **independencia** (I) o dependencia (I)
- semejanza en pautas ↔ **homogeneidad** (ID) o heterogeneidad (H)

Descripción de la dependencia y la heterogeneidad
(variables – econometría o bien pasado reciente – series temporales)

Inferencia estadística con Modelo estadístico y los datos. Temas 4 a 7

9

Modelado empírico

- Modelo estadístico: conjunto de asunciones probabilísticas (D, I, H)
es una descripción tentativa del mecanismo de azar que ha generado los datos. Con ella pretendemos recoger la información sistemática de los datos.

Para seleccionar un modelo necesitamos

1. reconocer las regularidades exhibidas por los datos
2. capturar esa regularidades con un modelo estadístico apropiado

Las técnicas gráficas son muy importantes en esta fase.

- *con frecuencia hay discrepancias entre los conceptos teóricos de la teoría económica, y las series de datos disponibles, que miden algo que puede ser muy distinto. (la teoría hace supuestos ceteris paribus que no se dan en la realidad, dificultades en la medición inherentes al concepto (funciones de utilidad, etc.).)*

Como ejemplo: el concepto de *demanda* frente a *cantidades efectivamente intercambiadas* (véase [Spanos, 1995](#))

1. ¿Cómo han sido recogidos los datos?
 2. ¿Qué es lo que se ha medido?
 3. ¿Cuáles son las medidas y la escala?
 4. ¿Cuál es el período muestral?
 5. ¿Qué conexión hay entre lo medido y su correspondiente concepto teórico?
 6. ¿Cuál es la naturaleza y calidad de los datos?
- *Nunca se deben deducir conclusiones sin contrastar previamente la correcta adecuación estadística del modelo postulado.*
 - La síntesis entre el modelo estadístico (D, I, H) y la teoría económica es lo que llamaremos *modelo econométrico*.

2. Espacio de probabilidad

Una buena introducción aparece en ([Spanos, 1999](#), Cap. 4).

Además de los capítulos 4 a 7 de [Novales \(1997\)](#), también puede consultar [Peña \(2001, Capítulos 4 y 6\)](#) [López Cachero \(1992, Capítulos 17 a 20\)](#) [Mittelhammer \(1996, Capítulos 1 a 3\)](#)

Supongamos el siguiente experimento aleatorio ([véase...](#))

Ejemplo 4. \mathcal{E} : Lanzamiento de una moneda dos veces.

Sucesos de interés: cualquier resultado:

$$\{(\ominus, \ominus)\}, \{(\ominus, \star)\}, \{(\star, \ominus)\}, \{(\star, \star)\}$$

Espacio de sucesos (y, o, y no):

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} = & \left\{ \{(\ominus, \ominus)\}, \{(\ominus, \star)\}, \{(\star, \ominus)\}, \{(\star, \star)\}, \right. \\ & \{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star)\}, \{(\ominus, \ominus), (\star, \ominus)\}, \{(\ominus, \ominus), (\star, \star)\}, \\ & \{(\ominus, \star), (\star, \ominus)\}, \{(\ominus, \star), (\star, \star)\}, \{(\star, \star), (\star, \ominus)\}, \\ & \{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star), (\star, \ominus)\}, \{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star), (\star, \star)\}, \\ & \{(\ominus, \ominus), (\star, \ominus), (\star, \star)\}, \{(\ominus, \star), (\star, \ominus), (\star, \star)\}, \\ & S \text{ (que ocurra cualquier cosa — suceso seguro) } \\ & \left. \emptyset \text{ (que no ocurra nada — suceso imposible) } \right\} \end{aligned}$$

EJERCICIO 1. Escriba el conjunto de sucesos de interés, y el espacio de sucesos, si sólo nos interesan que “ambos lanzamientos muestren el mismo resultado”.

Solución: **Sucesos de interés:**

$$A_1 = \{(\ominus, \ominus)\}, \quad A_2 = \{(\star, \star)\}$$

Espacio de sucesos (y, o, y no):

$$\mathfrak{B} = \{S, \emptyset, A_1, A_2, (A_1 \cup A_2), \bar{A}_1, \bar{A}_2, (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)\}$$

es decir

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{aligned} &S \text{ (que ocurra cualquier cosa — suceso seguro)} \\ &\emptyset \text{ (que no ocurra nada — suceso imposible)}, \\ &\{(\ominus, \ominus)\}, \{(\star, \star)\}, \{(\ominus, \ominus), (\star, \star)\}, \\ &\{(\ominus, \star), (\star, \ominus), (\star, \star)\}, \{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star), (\star, \ominus)\} \\ &\{(\ominus, \star), (\star, \ominus)\} \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio 1

Llamamos *ley (o función) de probabilidad* $P(\cdot)$ a la función:

$$P(\cdot) : \mathfrak{B} \longrightarrow [0, 1]$$

que verifica

[Axioma 1] $P(S) = 1$

[Axioma 2] $P(A) \geq 0$, para cualquier suceso $A \in \mathfrak{B}$

[Axioma 3] *Aditividad contable*. Para cualquier sucesión numerable de sucesos $A_i \in \mathfrak{B}$, $i = 1, 2, \dots$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Ejemplo 5. [Lanzamiento de dos monedas: (continuación del Ejemplo 4 en la página anterior)]

Experimento aleatorio, \mathcal{E} : Lanzamiento de una moneda dos veces.

Sucesos de interés: cualquier resultado.

Ley de probabilidad (si la moneda no está trucada, ie. $P(\ominus) = 1/2$):

$$P(\cdot) = \begin{cases} \text{para } \emptyset & 0 \\ \text{para } S & 1 \\ \text{para } \{(\ominus, \ominus)\}, \{(\ominus, \star)\}, \{(\star, \ominus)\}, \{(\star, \star)\}, & 1/4 \\ \text{para } \{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star)\}, \{(\ominus, \ominus), (\star, \ominus)\}, \{(\ominus, \ominus), (\star, \star)\}, & 1/2 \\ \text{para } \{(\ominus, \star), (\star, \ominus)\}, \{(\ominus, \star), (\star, \star)\}, \{(\star, \star), (\star, \ominus)\}, & 1/2 \\ \text{para } \{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star), (\star, \ominus)\}, \{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star), (\star, \star)\}, & 3/4 \\ \text{para } \{(\ominus, \ominus), (\star, \ominus), (\star, \star)\}, \{(\ominus, \star), (\star, \ominus), (\star, \star)\} & 3/4 \end{cases} \quad (2.1)$$

EJERCICIO 2. [Continuación del anterior ejercicio] Escriba la ley de probabilidad del Ejercicio 1 en la página anterior si la moneda no está trucada, i.e., $P(\ominus) = 1/2$.

Solución: *Experimento aleatorio*, \mathcal{E} : Lanzamiento de una moneda dos veces.

Sucesos de interés: ambos lanzamientos con mismo resultado.

Ley de probabilidad (si la moneda no está trucada, ie. $P(\ominus) = 1/2$):

$$P(\cdot) = \begin{cases} \text{para } \emptyset & 0 \\ \text{para } S & 1 \\ \text{para } \{(\ominus, \ominus)\}, \{(\star, \star)\}, & 1/4 \\ \text{para } \{(\ominus, \star), (\star, \ominus)\}, \{(\ominus, \ominus), (\star, \star)\}, & 1/2 \\ \text{para } \{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star), (\star, \ominus)\}, \{(\ominus, \star), (\star, \ominus), (\star, \star)\} & 3/4 \end{cases}$$

Ejercicio 2

EJERCICIO 3. [Variación del ejercicio anterior] Escriba el conjunto de sucesos de interés, el espacio de sucesos y la ley de probabilidad si sólo nos interesan resultados en los que “ambas monedas muestran lo mismo” pero suponiendo que $P(\ominus) = 3/4$.

Llamamos *espacio de probabilidad* a la terna

$$(S, \mathfrak{B}, P(\cdot))$$

es decir

espacio muestral: contiene *resultados elementales* del experimento aleatorio \mathcal{E} .

espacio de sucesos: contiene *sucesos* “de interés” y sus combinaciones (**y**, **o**, y **no**).

ley de probabilidad: indica *cuán probable es cada* suceso contenido en \mathfrak{B} .

2.1. Probabilidad condicionada

¿Cómo varía el espacio de probabilidad, $(S, \mathfrak{B}, P(\cdot))$, cuando disponemos de información adicional?

Información adicional: $A =$ “el primer lanzamiento ha sido cara”

1. el nuevo espacio muestral es: $S_A = \{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star)\}$
2. el nuevo espacio de sucesos es:

$$\mathfrak{B}_A = \{S_A, \emptyset, (\ominus, \ominus), (\ominus, \star)\}$$

3. la nueva ley de probabilidad *condicionada*

$$P_A(\cdot) = \begin{cases} 1 & \text{para } S_A \\ 0 & \text{para } \emptyset \\ 1/2 & \text{para } B = \{(\ominus, \ominus)\} \\ 1/2 & \text{para } C = \{(\ominus, \star)\} \end{cases}$$

↑	<u>Probabilidad condicionada</u>	10
El nuevo espacio de probabilidad es		
$(S_A, \mathfrak{B}_A, P_A(\cdot))$		
¿Podemos derivar la nueva ley de probabilidad condicionada a partir de $(S, \mathfrak{B}, P(\cdot))$?		
$P_A(B) \equiv P(B A) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (2.2)$		
para $P(A) > 0$; donde $P(\cdot)$ es la ley de probabilidad original.		

De (2.1) tenemos que

$$P_A(\{(\ominus, \ominus)\}) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\{(\ominus, \ominus)\})}{P(\{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

tal como aparece más arriba.

↑	<u>Independencia</u>	11
Cuando el conocimiento del suceso A no afecta a las probabilidades del suceso B decimos que A y B son independientes.		
Decimos que los sucesos A y B son independientes si:		
$P(A B) = P(A) \quad (2.3)$		
Usando (2.2) podemos deducir que A y B son independientes si:		
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.4)$		

EJERCICIO 4. Demuestre que se verifica la Ecuación 2.4 cuando A y B son independientes.

EJERCICIO 5. Demuestre que

$$P(A|B) = P(A) \iff P(B|A) = P(B)$$

Leyes de probabilidad conjunta y marginales 12

Lanzamiento de dos monedas

- Espacio Muestral producto

$$S_{(2)} = \{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star), (\star, \ominus), (\star, \star)\}$$
- Leyes de probabilidad marginales

1ª moneda	\ominus	\star		2ª moneda	\ominus	\star
$P(\cdot)$	1/2	1/2		$P(\cdot)$	2/3	1/3
- Ley de probabilidad conjunta

(1ª moneda, 2ª moneda)	(\ominus, \ominus)	(\ominus, \star)	(\star, \ominus)	(\star, \star)
$P_{(2)}(\cdot, \cdot)$	2/6	1/6	2/6	1/6

Leyes de probabilidad conjunta, marginales y condicionadas 13

$P_{(2)}(\cdot, \cdot)$	2ª moneda		
	\ominus	\star	$P_1(\cdot)$
1º moneda	\ominus	2/6 1/6	1/2
	\star	2/6 1/6	1/2
$P_2(\cdot)$	2/3	1/3	1

¿Son independientes?

Probabilidad conjunta y marginal 14

renta \ edad	(18 – 35)	(36 – 55)	(56 – 70)	$P_1(\cdot)$
pobre	0.20	0.10	0.15	
mediana	0.10	0.25	0.05	
rico	0.01	0.06	0.08	
$P_2(\cdot)$				1

1. ¿Quién soy?
2. ¿Qué edad tengo?
3. ¿Qué renta tengo?

3. Variables aleatorias

0.6

Concepto de Vble. aleatoria 15

Variable aleatoria: función que asigna números a elementos del espacio muestral S , de manera tal que preserve la estructura de \mathfrak{B} (y, o, y no).

$$X(\cdot) : S \longrightarrow \mathbb{R}_X$$

$$X(s) \longrightarrow x; \quad \text{tal que } A_x \equiv \{s : \text{tales que } X(s) \leq x\} \in \mathfrak{B}$$

\mathbb{R}_X es el *soporte* de X .

Nota 1. Una *función continua de una variable aleatoria* también es *variable aleatoria*, pues $g(X(\cdot))$ es a su vez una función que asigna números a sucesos⁴, y verifica las condiciones de la transparencia anterior.

⁴Estrictamente se requiere que la función $g(X(\cdot))$ sea una *función del Borel* (Para más detalles véase Spanos, 1986, capítulo 6)

Por tanto podemos denotar $g(X(\cdot))$ como una nueva variable aleatoria:

$$Y(\cdot) = g(X(\cdot)) : S \longrightarrow \mathbb{R}_Y \text{ tal que } A_y \equiv \{s : \text{tales que } Y(s) \leq y\} \in \mathfrak{B},$$

3.1. Variables aleatorias discretas

Función de cuantía: es una ley de probabilidad. Se define como la función que asigna a cada valor del soporte \mathbb{R}_X la probabilidad de los sucesos que dan lugar a dicho valor del soporte.

$$\begin{aligned} P_X(\cdot) : \quad \mathbb{R}_X &\longrightarrow [0, 1] \\ P_X(x) &\longrightarrow P(s : X(s) = x) \end{aligned}$$

Función de distribución: es una ley de probabilidad. Se define como la función que asigna a cada valor b del soporte \mathbb{R}_X la probabilidad *acumulada*, es decir, la suma de las probabilidades que asigna la función de cuantía a todos los valores menores o iguales a b

$$\begin{aligned} F_X(\cdot) : \quad \mathbb{R}_X &\longrightarrow [0, 1] \\ F_X(b) &\longrightarrow \sum_{\substack{x \in \mathbb{R}_X \\ x \leq b}} P_X(x) = P(A_b) = P(X \leq b) \end{aligned}$$

↑↑	<u>Función de cuantía y función de distribución</u>	16
Función de cuantía:	$P_X(x) = P(s : X(s) = x)$	
Función de distribución:	$F_X(b) \equiv P(X \leq b) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{R}_X \\ x \leq b}} P_X(x) \tag{3.1}$	

Ejemplo 6.

Una variable aleatoria que toma los valores *uno* y *cero* con probabilidades p y q (donde $q = 1 - p$) respectivamente. Por tanto su función de cuantía es:

$$P_X(x; \theta) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{para } x = 0, 1 \\ 0 & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$

donde $0 \leq p \leq 1$;

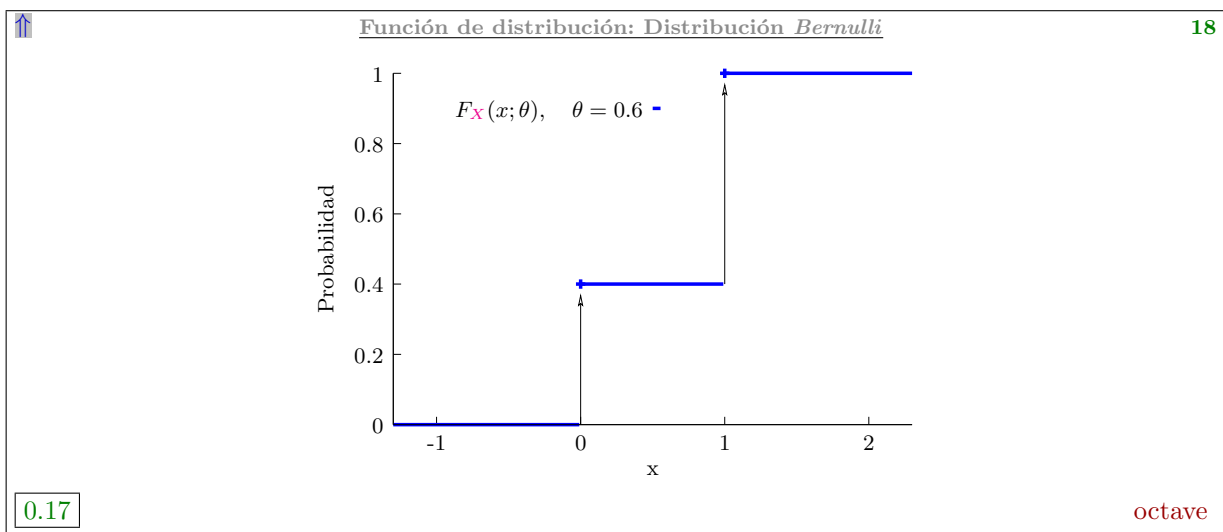
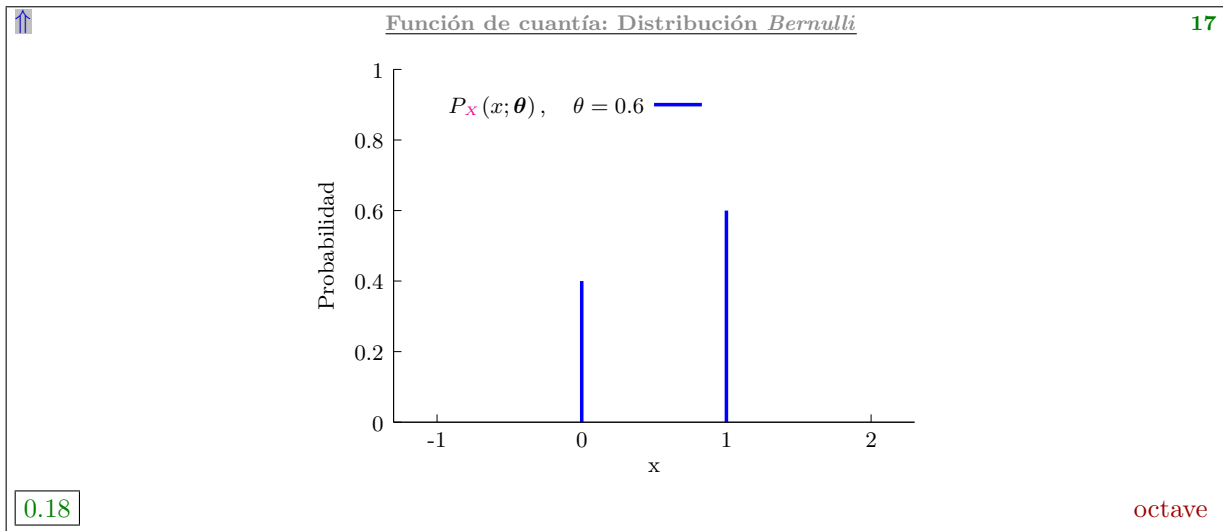
y su función de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

0.17

0.18

Una v.a. con esta ley de probabilidad se dice que tiene distribución de *Bernulli*, o que es una v.a de *Bernulli*.



3.2. Variables aleatorias continuas

Función de densidad (v.a. continuas) En el caso de v.a. continuas, la probabilidad de un punto es siempre cero (si no, la función de distribución daría saltos —una demostración formal aparece en 0.92).

Por ello la función de densidad tiene una interpretación “ligeramente” distinta a la de la función de cuantía. Valores elevados de la función de densidad en alguna región del soporte, indican una mayor densidad en la distribución de probabilidad en dicha región.

Análogamente a (3.1), acumulando la probabilidad sustituyendo el sumatorio por una integral tenemos

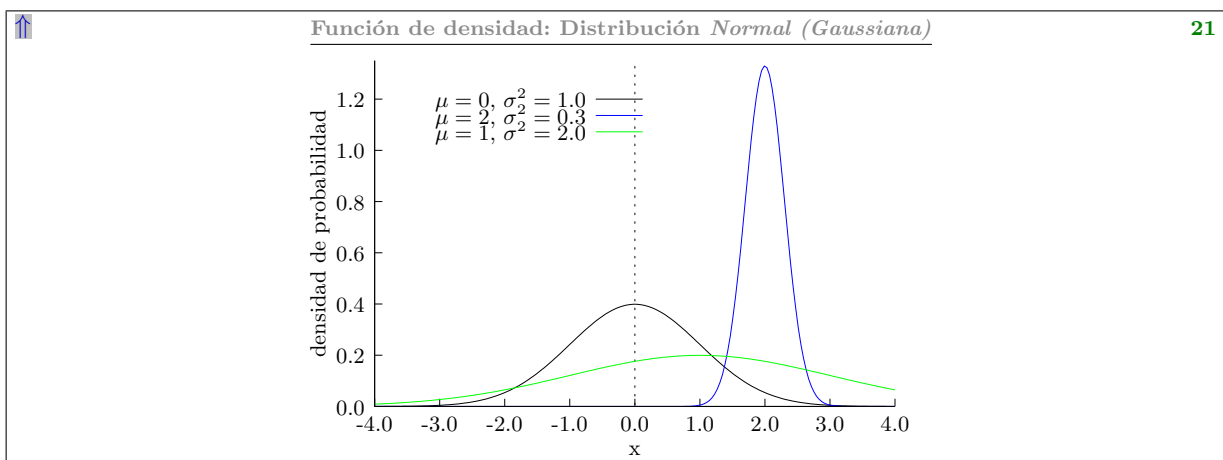
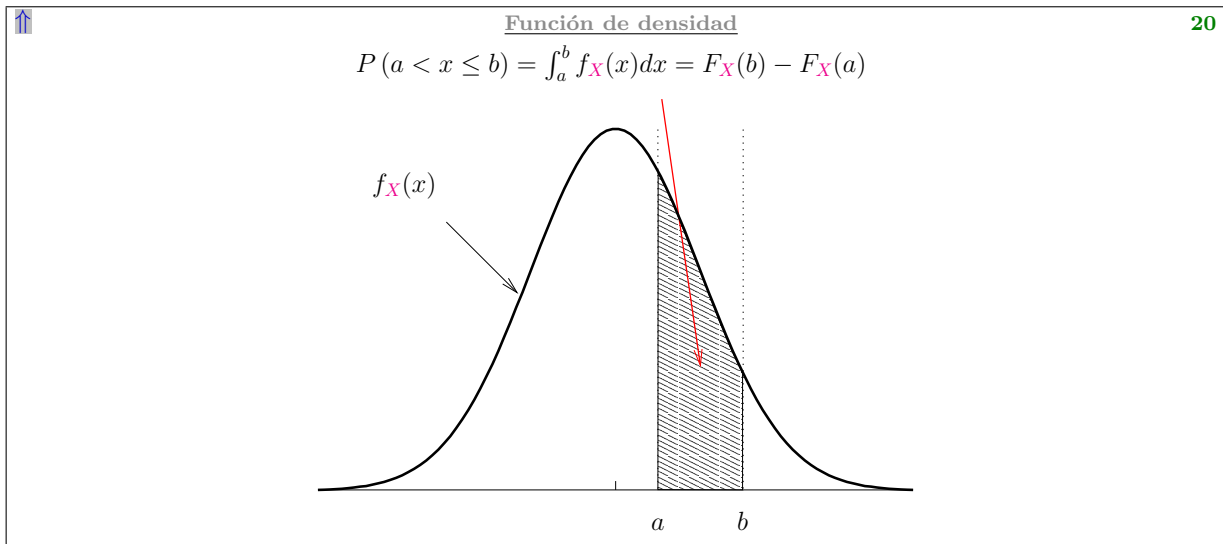
$$P(X \leq b) = \int_{\substack{x \in \mathbb{R}_X \\ x \leq b}} f_X(x) dx = F_X(b)$$

Función de densidad y función de distribución 19

Función de distribución: $F_X(b) = P(X \leq b)$
 Función de densidad: $f_X(x)$, es una función continua y positiva que verifica

$$P(X \leq b) \equiv F_X(b) = \int_{\substack{x \in \mathbb{R}_X \\ x \leq b}} f_X(x) dx \quad \text{para todo } b \in \mathbb{R}_X.$$

Ya que $f_X(x)$ continua, tenemos: $\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$



A resolver en clase

EJERCICIO 6. [Novales (1997, pp 159)] Sea $f_X(x) = \frac{1}{72}x^2$, $0 < x < 6$

- (a) verifique que $f_X(x)$ es una función de densidad
- (b) Calcule $P(X > 3)$
- (c) Calcule $P(X > 5)$
- (d) Si A es el suceso $X > 5$ y B es el suceso $X > 3$ calcule $P(A | B)$. Compare con la probabilidad anterior.

A resolver en clase

EJERCICIO 7. [Novales (1997, pp 167)] Tomado el ejercicio anterior, calcule la función de distribución.

Variables aleatorias: ¡Una gran simplificación! 22

Con las variables aleatorias hemos logrado una enorme simplificación

$$(S, \mathfrak{B}, P(\cdot)) \xrightarrow{X(\cdot): S \rightarrow \mathbb{R}_X} (\mathbb{R}_X, F_X(x))$$

o mejor...

$$(S, \mathfrak{B}, P(\cdot)) \xrightarrow{X(\cdot): S \rightarrow \mathbb{R}_X} (\mathbb{R}_X, f_X(x))$$

Preferimos la simplificación

$$(S, \mathfrak{B}, P(\cdot)) \xrightarrow{X(\cdot): S \rightarrow \mathbb{R}_X} (\mathbb{R}_X, f_X(x))$$

ya que podemos ver la función de densidad como la contrapartida teórica de los *histogramas* de la estadística descriptiva.

Por otra parte, la función de distribución estaría relacionada con el *diagrama acumulativo de frecuencias*.

↑
Variables aleatorias: ¡Una gran simplificación!
23

Ejemplo: (Tasa variación índ. NASDAQ) Pasamos de modelo tipo $(S, \mathfrak{B}, P(\cdot))$

- S (result 1: a compraría n acciones A a precio... cuando ayer...),
- \mathfrak{B} (que ocurra resultado 1 y 2 pero no 3, etc.)
- $P(\cdot)$ (la probabilidad de que ocurra 1 y 2 pero no 3 es ...)

(a través mercado de valores) a otro más sencillo: Tasa de Variación NASDAQ se **distribuye** Normal^a.

$$(S, \mathfrak{B}, P(\cdot)) \xrightarrow{X(\cdot): S \rightarrow \mathbb{R}_X} (\mathbb{R}_X, f_X(x; \theta)),$$

donde $\mathbb{R}_X = (-\infty, \infty)$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$ y

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

^aen realidad su distribución es más parecida a una t -Student

↑
De $(S, \mathfrak{B}, P(\cdot))$ a un modelo de probabilidad: historia en símbolos
24

$$S \rightarrow \mathbb{R}_X$$

$$(\mathfrak{B}, P(\cdot)) \rightarrow \{f_X(x; \theta), \theta \in \Theta\}$$

Llamamos **Soporte** al conjunto \mathbb{R}_X de posibles valores de la v.a.

Llamamos **Modelo de Probabilidad** a la familia o colección de funciones de densidad

$$\Phi = \{f_X(x; \theta), \theta \in \Theta, x \in \mathbb{R}_X\}$$

Llamamos **Espacio Paramétrico** al conjunto $\theta \in \Theta$ de posibles valores de los parámetros de las funciones de densidad.

↑
Modelado empírico
25

1. Postulamos a priori una familia de densidades como mecanismo estocástico subyacente.
 - a) debemos elegir aquella familia más adecuada a los datos
 - histograma sugiere func. dens. $f_X(x; \theta)$ 0.8
 - datos pueden restringir
 - espacio paramétrico, Θ
 - el soporte, \mathbb{R}_X \mathbb{R}_X (si porcentaje, soporte $[0, 1]$)
2. Elegimos una familia, no una función en particular

$$\Phi = \{f_X(x; \theta), \theta \in \Theta, x \in \mathbb{R}_X\}$$

los parámetros son desconocidos.
3. Inferencia estadística \Rightarrow valores de los parámetros Tema 4 y siguientes.

4. Variables aleatorias bivariantes

Vector aleatorio Sean X e Y dos variables aleatorias definidas sobre los espacios de probabilidad $(S_1, \mathfrak{B}_1, P_1(\cdot))$ y $(S_2, \mathfrak{B}_2, P_2(\cdot))$ respectivamente, i.e.,

$$X(\cdot) : S_1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ de manera que } X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathfrak{B}_1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$Y(\cdot) : S_2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ de manera que } Y^{-1}((-\infty, y]) \in \mathfrak{B}_2, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}$$

con funciones de distribución

$$P_1(s : X(s) \leq x) = F_X(x); \quad P_2(z : Y(z) \leq y) = F_Y(y)$$

Entonces, si definimos el conjunto de pares de sucesos (un suceso de \mathfrak{B}_1 junto con un suceso de \mathfrak{B}_2):

$$(s, z) \in \mathfrak{B}_{(2)} \equiv \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2;$$

la función que asigna un par de números reales (x, y) a cada par de sucesos (s, z) ; de manera que el primer número es $x = X(s)$ y el segundo $y = Y(z)$:

$$Z(\cdot, \cdot) \equiv (X(\cdot), Y(\cdot)) : \mathfrak{B}_{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

es un vector aleatorio (una v.a respecto a $\mathfrak{B}_{(2)}$); es decir una variable aleatoria bivalente con soporte: $\mathbb{R}_{XY}^2 \equiv \mathbb{R}_X \times \mathbb{R}_Y$

↑	<u>Vector aleatorio</u>	26
Sean X e Y definidas sobre $(S_1, \mathfrak{B}_1, P_1(\cdot))$ y $(S_2, \mathfrak{B}_2, P_2(\cdot))$		
Entonces, si definimos el conjunto de pares de sucesos:		
$(s, z) \in \mathfrak{B}_{(2)} \equiv \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2;$		
la función		
$Z(\cdot, \cdot) : \mathfrak{B}_{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^2,$		
$(s, z) \rightarrow (X(s), Y(z))$		
es un vector aleatorio (una v.a respecto a $\mathfrak{B}_{(2)}$); con soporte conjunto: $\mathbb{R}_{XY}^2 \equiv \mathbb{R}_X \times \mathbb{R}_Y$.		

Función de distribución: dadas X e Y definidas sobre $(S_1, \mathfrak{B}_1, P_1(\cdot))$ y $(S_2, \mathfrak{B}_2, P_2(\cdot))$, una la función de distribución conjunta es una ley de probabilidad que asigna a cada par (b, c) del soporte \mathbb{R}_{XY}^2 la probabilidad *acumulada*, es decir, la probabilidad de todos los pares tales que

$$F_{XY}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}_{XY}^2 \rightarrow [0, 1]$$

$$F_{XY}(x, y) \rightarrow \mathbf{P}_{(2)}((s, z) : \text{tales que } X(s) \leq x \text{ y que conjuntamente } Y(z) \leq y)$$

donde $\mathbf{P}_{(2)}(\cdot)$ es una función de probabilidad sobre la σ -álgebra $\mathfrak{B}_{(2)}$; y donde $(s, z) \in \mathfrak{B}_{(2)}$, y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

↑	<u>Vector aleatorio: función de distribución</u>	27
El vector aleatorio (v.a. bivalente)		
$Z(\cdot, \cdot) = (X(\cdot), Y(\cdot))$		
tiene función de distribución ^a :		
$F_{XY}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}_{XY}^2 \rightarrow [0, 1]$		
$F_{XY}(x, y) \rightarrow \mathbf{P}_{(2)}((s, z) : \text{donde } X(s) \leq x \text{ y } Y(z) \leq y)$		
^a función de distribución conjunta de X e Y		

En el caso de vectores aleatorios discretos, podemos definir la función de cuantía conjunta:

Función de cuantía conjunta: es una función que asigna a cada punto del soporte \mathbb{R}_{XY}^2 la probabilidad de los sucesos que dan lugar a dicho valor del soporte.

$$P_{XY}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}_{XY}^2 \rightarrow [0, 1]$$

$$P_{XY}(x, y) \rightarrow \mathbf{P}_{(2)}((s, z) : \text{tales que } X(s) = x \text{ y que conjuntamente } Y(z) = y)$$

↑	<u>Variables discretas: Función de cuantía conjunta</u>	28
En el caso univariante: $P_X(x) \equiv P(s; \text{tales que } X(s) = x)$		
En el caso bivalente:		
$P_{XY}(x, y) \equiv \mathbf{P}_{(2)}((s, z); \text{tales que } X(s) = x, Y(z) = y)$		

Función de cuantía: ejemplo 29

Lanzamiento de dos monedas:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \{\star, \ominus\} \\ S_2 &= \{\star, \ominus\} \end{aligned} \right\} \text{ y con } P(\star) = P(\ominus) = 1/2$$

Definamos las v.a.: “sale cara”, “sale cruz”:

$$\begin{aligned} X(\ominus, \ominus) &= X(\ominus, \star) = X(\star, \ominus) = 1 & X(\star, \star) &= 0 \\ Y(\star, \star) &= Y(\ominus, \star) = Y(\star, \ominus) = 1 & Y(\ominus, \ominus) &= 0 \end{aligned}$$

Las funciones de cuantía univariantes son:

x	0	1	y	0	1
$P_X(x)$	0.25	0.75	$P_Y(y)$	0.25	0.75

Función de cuantía conjunta: ejemplo 30

Sucesos que verifican: $(X = x, Y = y)$;
 donde $(x, y) \in \mathbb{R}_{XY}^2 \equiv \mathbb{R}_X \times \mathbb{R}_Y$

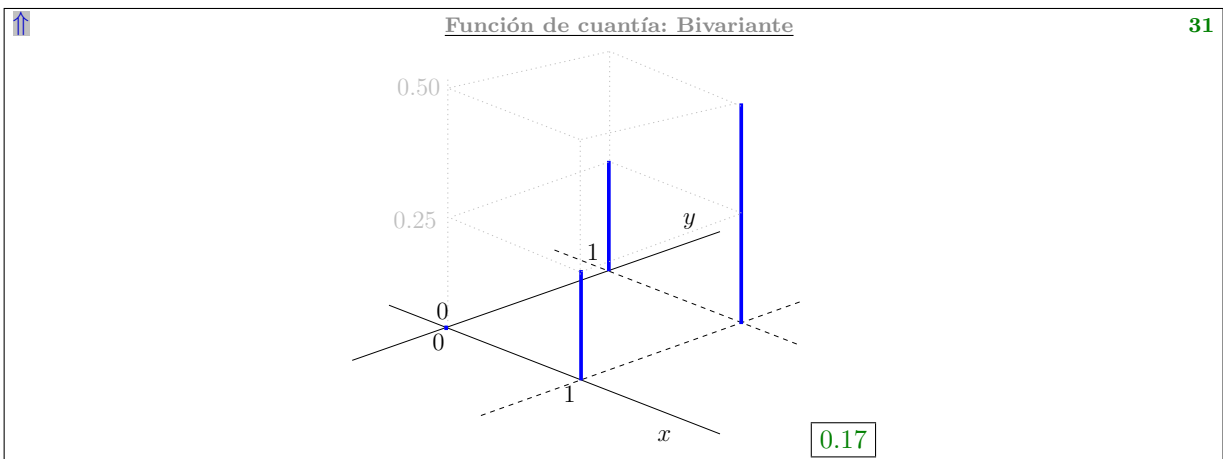
$$\begin{aligned} (X = 0, Y = 0) &\rightarrow \emptyset && \Rightarrow P_{XY}(0, 0) = 0, \\ (X = 0, Y = 1) &\rightarrow \{(\star, \star)\} && \Rightarrow P_{XY}(0, 1) = 0.25, \\ (X = 1, Y = 0) &\rightarrow \{(\ominus, \ominus)\} && \Rightarrow P_{XY}(1, 0) = 0.25, \\ (X = 1, Y = 1) &\rightarrow \{(\ominus, \star), (\star, \ominus)\} && \Rightarrow P_{XY}(1, 1) = 0.50 \end{aligned}$$

Es decir, función de cuantía conjunta:

$y \backslash x$	0	1
0	0	0.25
1	0.25	0.50

Función de cuantía conjunta refleja la dependencia (o independencia) entre las v.a.

EJERCICIO 8. Verifique si son independientes las variables aleatorias X Y de la transparencia anterior.



32

Función de distribución y función de cuantía conjuntas

$P_{XY}(x, y)$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	0/4	1/4
$X=1$	1/4	2/4

$$F_{XY}(a, b) = P(X \leq a, Y \leq b)$$

$$F_{XY}(1.5, 0.5) = P(X \leq 1.5, Y \leq 0.5)$$

$$= P_{XY}(0, 0) + P_{XY}(1, 0)$$

$$= 0 + 1/4 = 1/4$$

calcular otros puntos (por ejemplo (0,0), (1,1), (-1,1.5),...)

33

Función de distribución: Bivariante

0.18

A resolver en clase

EJERCICIO 9. Sean X e Y variables aleatorias discretas con función de cuantía conjunta

$$P_{XY}(x, y) = c(2x + y)$$

donde $\mathbb{R}_X = \{0, 1, 2\}$ e $\mathbb{R}_Y = \{0, 1, 2, 3\}$

- (a) Encuentre el valor de la constante c
- (b) Calcule $P_{XY}(2, 1)$
- (c) Calcule $P(X \geq 1, Y \leq 2)$
- (d) Calcule $P(X + Y = 1)$
- (e) Calcule $P(X + Y \leq 3)$

34

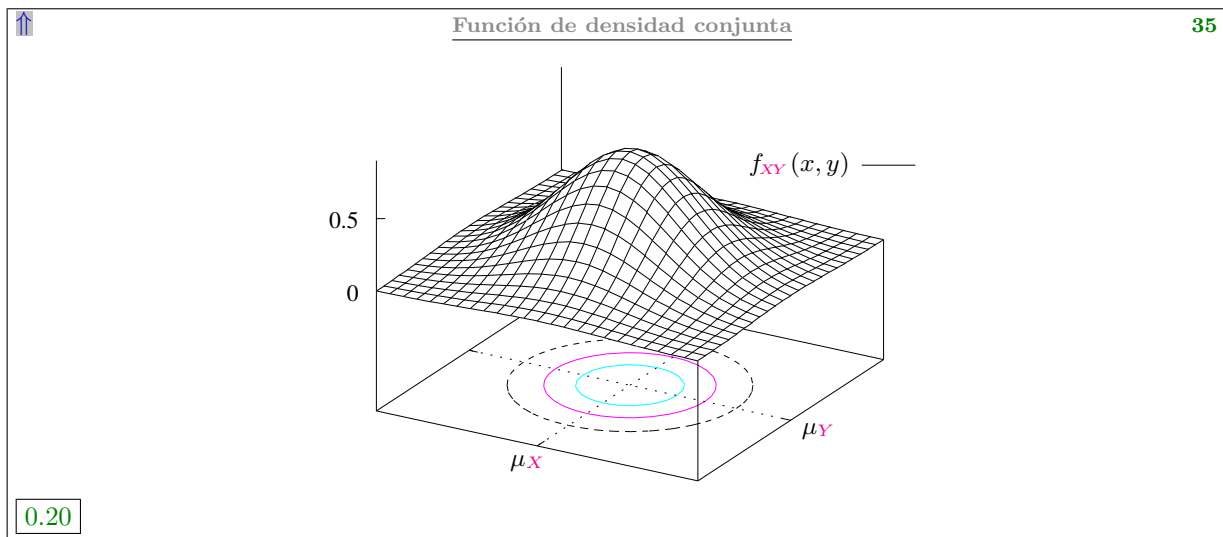
Variables continuas: Función de densidad conjunta

Función de densidad conjunta, $f_{XY}(x, y)$, de X e Y es la función continua y positiva que verifica

$$P(X \leq a, Y \leq b) \equiv F_{XY}(a, b) = \iint_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2 \\ x \leq a \\ y \leq b}} f_{XY}(x, y) dx dy$$

para todo $(a, b) \in \mathbb{R}_{XY}^2$.
Ya que $f_{XY}(x, y)$ continua, tenemos

$$\frac{\partial F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{XY}(x, y).$$



A resolver en clase

EJERCICIO 10. La función de distribución conjunta de una exponencial bivalente es:

$$F_{XY}(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, \quad x \geq 0, y \geq 0,$$

Calcule su función de densidad.

Solución:

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= \frac{d^2}{dx dy} (-e^{-y} + e^{-y-x} - e^{-x} + 1) \\ &= \frac{d}{dy} (e^{-x} - e^{-y-x}) = e^{-y-x}. \end{aligned}$$

Ejercicio 10

A resolver en clase

EJERCICIO 11.

(a) Dibuje la siguiente función de densidad conjunta uniforme

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < 4 \text{ y } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

(b) Cuanto vale la “altura” k

A resolver en clase

EJERCICIO 12. Sea la siguiente función de densidad

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < 2y < 4 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

(a) Calcule el valor de k

(b) Calcule $P(Y > 1)$.

Solución numérica con octave

A resolver en clase

EJERCICIO 13. Sea la función de densidad continua,

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < y < 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}.$$

Indique cómo calcularía la siguiente probabilidad: $P(X + Y \leq 1)$.

Calculo numérico de la probabilidad con octave

A resolver en clase

EJERCICIO 14. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ para algún valor concreto de k :

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } -1 < x < 1; -1 < y < 1 \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

Determine la probabilidad de los siguientes eventos:

(a) $2X - Y > 0$.

(b) $X^2 + Y^2 < 1$

Pista. $X^2 + Y^2 < r$ define un círculo de radio r centrado en $(0, 0)$, y con área igual a πr^2 .

(c) $X^2 + Y^2 < 1$, y simultáneamente $2X - Y > 0$.

Calculo numérico de la probabilidad con octave

A resolver en clase

EJERCICIO 15. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta $f_{XY}(x, y)$. La integral sobre su soporte conjunto \mathbb{R}_{XY} es:

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{x^2+1} f_{XY}(x, y) dy dx.$$

Dibuje el soporte \mathbb{R}_{XY} .

↑
Propiedades de las leyes de probabilidad bivalentes
36

caso continuo (función de densidad)

fb1. $f_{XY}(x, y) \begin{cases} \geq 0 \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}_{XY}^2 \\ = 0 \text{ en el resto de casos} \end{cases}$

fb2. $\iint_{\mathbb{R}_{XY}^2} f_{XY}(x, y) dy dx = 1$

fb3. $F_{XY}(a, b) = \iint_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2 \\ x \leq a; y \leq b}} f_{XY}(x, y) dy dx,$

caso discreto (función de cuantía)

fb1. $P_{XY}(x, y) \begin{cases} \geq 0 \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}_{XY}^2 \\ = 0 \text{ en el resto de casos} \end{cases}$

fb2. $\sum \sum_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} P_{XY}(x, y) = 1$

fb3. $F_{XY}(a, b) = \sum \sum_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2 \\ x \leq a; y \leq b}} P_{XY}(x, y)$

A resolver en clase

EJERCICIO 16. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta $f_{XY}(x, y)$. La integral sobre su soporte conjunto \mathbb{R}_{XY} es:

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f_{XY}(x, y) dy dx = 1.$$

Dibuje el soporte \mathbb{R}_{XY} .

5. Distribuciones marginales

Distribuciones conjuntas y marginales: ejemplo 37

Sea la siguiente función de cuantía conjunta:

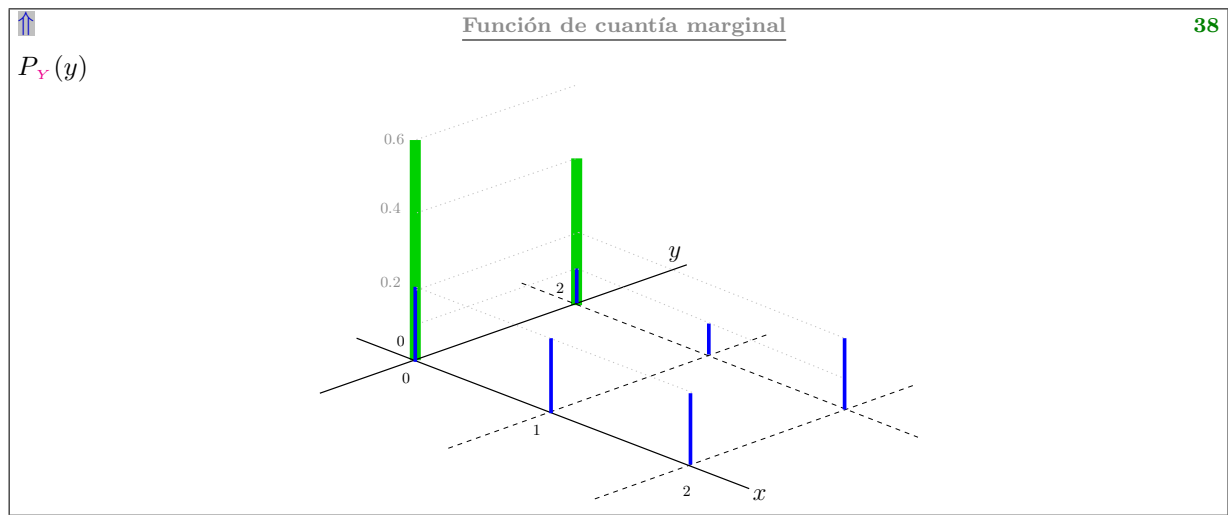
$y \backslash x$	0	1	2
0	0.2	0.2	0.2
2	0.1	0.1	0.2

Las funciones de cuantía marginales son:

x	0	1	2
$P_X(x)$	0.3	0.3	0.4

y	0	2
$P_Y(y)$	0.6	0.4

Nótese que funciones de cuantía marginales son leyes de probabilidad (suman 1)!



Distribuciones conjuntas y marginales 39

$P_{XY}(x, y)$ contiene información sobre la relación entre X e Y .
 Puesto que son posibles muchos tipos de relación entre X e Y ; en general, no es posible partiendo de $P_X(x)$ y $P_Y(y)$ obtener $P_{XY}(x, y)$
 (sería necesario decir, además, como se relacionan X e Y)

(lo mismo se puede decir en el caso continuo)

Análogamente, $f_{XY}(x, y)$ contiene información sobre la relación entre X e Y . Puesto que son posibles muchos tipos de relación entre X e Y ; en general, no es posible partiendo de $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ obtener $f_{XY}(x, y)$ (sería necesario decir, además, como se relacionan X e Y)

Distribuciones conjuntas y marginales 40

Siempre es posible deducir $P_X(x)$ y $P_Y(y)$ a partir de $P_{XY}(x, y)$:

Caso discreto:
 Función de cuantía marginal de X

$$P_X(x_i) = \sum_{y_j \in \mathbb{R}_Y} P_{XY}(x_i, y_j)$$

Función de cuantía marginal de Y

$$P_Y(y_i) = \sum_{x_i \in \mathbb{R}_X} P_{XY}(x_i, y_i)$$

Caso continuo:

$$f_X(x) = \int_{y \in \mathbb{R}_Y} f_{XY}(x, y) dy$$

También es posible deducir las funciones de distribución de X e Y a partir de la función de distribución conjunta:

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{XY}(x, y)$$

y

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{XY}(x, y).$$

A resolver en clase

EJERCICIO 17. [Continuación del Ejercicio 9 en la página ~18]

Calcule las funciones marginales de la siguiente función de cuantía conjunta

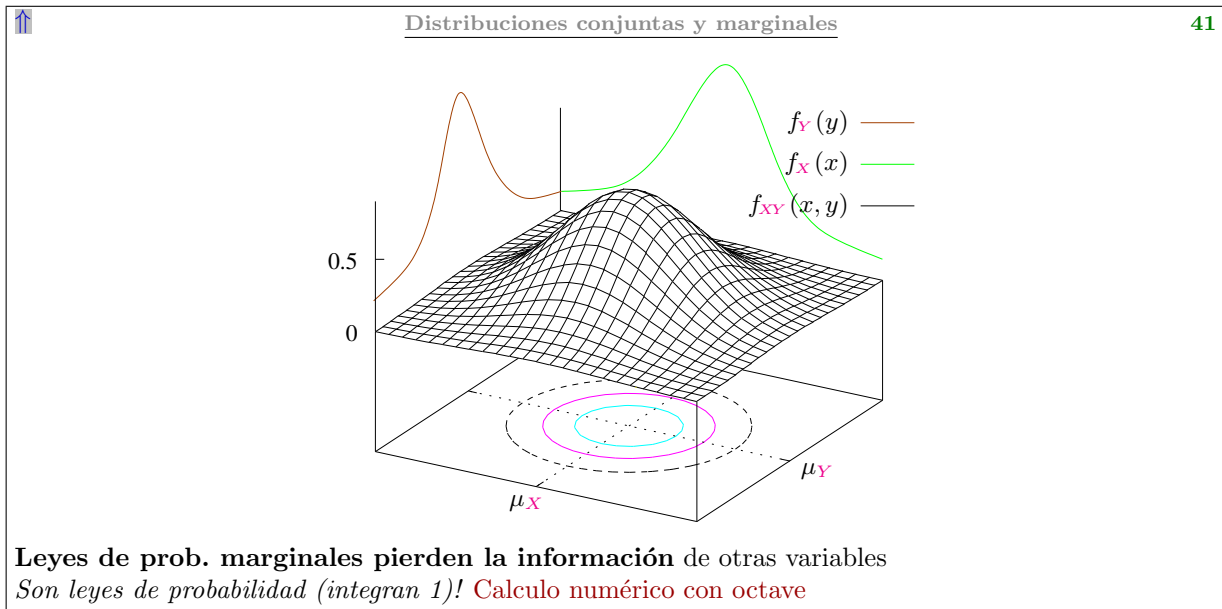
$y \backslash x$	0	1	2
0	0/42	2/42	4/42
1	1/42	3/42	5/42
2	2/42	4/42	6/42
3	3/42	5/42	7/42

A resolver en clase

EJERCICIO 18. [Continuación del Ejercicio 12 en la página ~19]

Calcule las funciones de densidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

Calculo numérico con octave



EJERCICIO 19. Sea $f_{XY}(x, y) = e^{-x-y}$, donde $x > 0$ e $y > 0$; es decir, $\mathbb{R}_X = (0, \infty)$ y $\mathbb{R}_Y = (0, \infty)$ (distrib. exponencial bivalente). Calcule las funciones de densidad marginales de X e Y .

6. Distribuciones condicionadas

La probabilidad del suceso A condicionada al suceso B es

$$P(A | B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{siempre que } P(B) > 0.$$

6.1. Caso discreto

Funciones de cuantía condicionadas 42

$$P(A|B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{siempre que } P(B) > 0.$$

$$P_x(x), \quad P_{xy}(x, y)$$

$$P_{yx}(y|b) \equiv \frac{P_{xy}(b, y)}{P_x(b)}$$

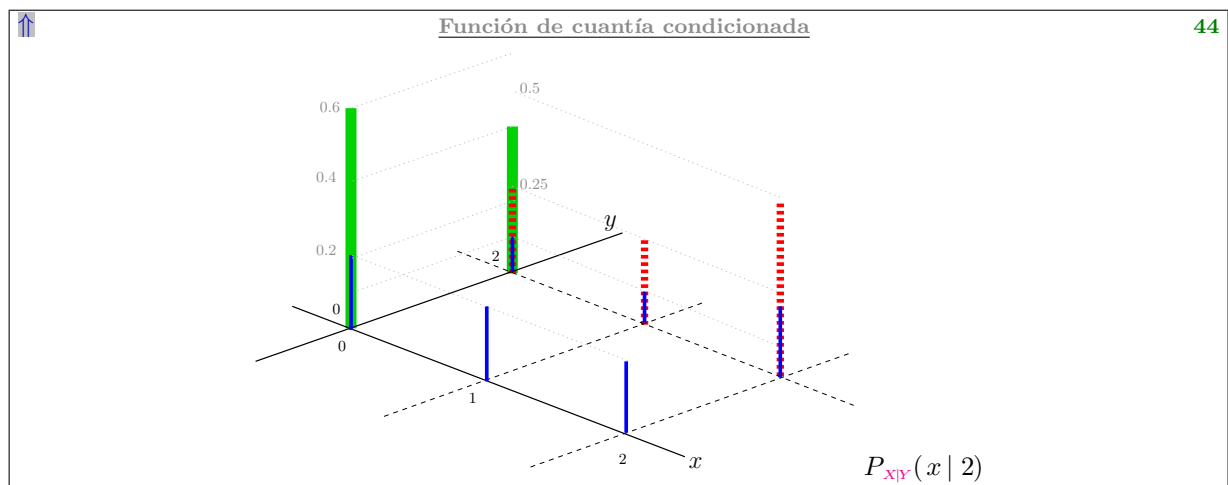
para un valor b fijo, y $P_x(b) \neq 0$
 $P_{yx}(y|b)$ es función de y .
 Funciones de cuantía condicionales son leyes de probabilidad (suman 1)!

Probabilidad conjunta, marginal y condicionada 43

$y \backslash x$	1	2	3	$P_Y(y)$
0	0.20	0.10	0.15	
1	0.10	0.25	0.05	
2	0.01	0.06	0.08	
$P_X(x)$				1

$X = 1 : (18 - 35)$ $X = 2 : (36 - 55)$ $X = 3 : (56 - 70)$
 $Y = 0 : \text{pobre}$ $Y = 1 : \text{renta intermedia}$ $Y = 2 : \text{rico}$

1. ¿Quién soy?
2. ¿Qué edad tengo?
3. ¿Qué edad tengo si conducía un Porsche?



A resolver en clase

EJERCICIO 20. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta, donde X e Y pueden tomar los valores 0,1,2,3. La variable aleatoria Y hace referencia a los cambios en los ingresos, mientras que X hace mención a los cambios en los gastos en publicidad. Definimos las variables de la siguiente manera: $Y = 0$ si las ventas caen, $Y = 1$ si las ventas se mantienen, $Y = 2$ si las ventas suben, pero menos de un 10%, $Y = 3$ si suben más de un 10%. De manera análoga definimos X . La ley de probabilidad conjunta viene dada por $P_{xy}(x, y) = k(3 - x + y)$.

- (a) Halle el valor de k para que $P_{xy}(x, y)$ sea una verdadera ley de probabilidad.
- (b) Para el correcto valor de k , represente en una tabla de doble entrada la función de cuantía de la variable aleatoria bidimensional.
- (c) Calcule las leyes de probabilidad marginales de X e Y . Según esta información, ¿es más probable que

las ventas bajen, se mantengan o suban?

- (d) Halle las leyes de probabilidad condicionadas de Y con respecto a los diferentes valores que pueda tomar X . ¿Varían entre ellas y con respecto a la ley de probabilidad marginal de Y ? ¿Que significa la respuesta a la pregunta anterior? Si $X = 0$, ¿cambiaría la respuesta cualitativa del apartado anterior? ¿Y si $X = 2$?
- (e) Según el apartado anterior, ¿para qué valor de X es más probable que las ventas aumenten más de un 10%? ¿Para qué valor de X es más probable que las ventas caigan? ¿Nos da esto alguna indicación del posible signo de la relación entre las dos variables?
- (f) Definamos $Z = Y - X$. ¿Cuál es la probabilidad de que $Z > 0$? ¿Y de que $Z = 0$? ¿Y de $Z < 0$?
- (g) ¿Cómo cambian las respuestas del apartado anterior si $X = 0$, ó $X = 1$, ó $X = 2$ ó $X = 3$ (use la información de las probabilidades condicionadas?)

6.2. Caso continuo

La probabilidad del suceso A condicionada al suceso B se define como

$$P(A|B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{siempre que } P(B) > 0.$$

El siguiente ejercicio puede resolverse aplicando lo anterior ya que la probabilidad de la condición es mayor que cero:

A resolver en clase

EJERCICIO 21. Sea la función de densidad bivalente

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2(x+y) & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto del plano} \end{cases}.$$

Calcule $P(0.2 \leq X \leq 0.4 \mid Y < 0.5)$.

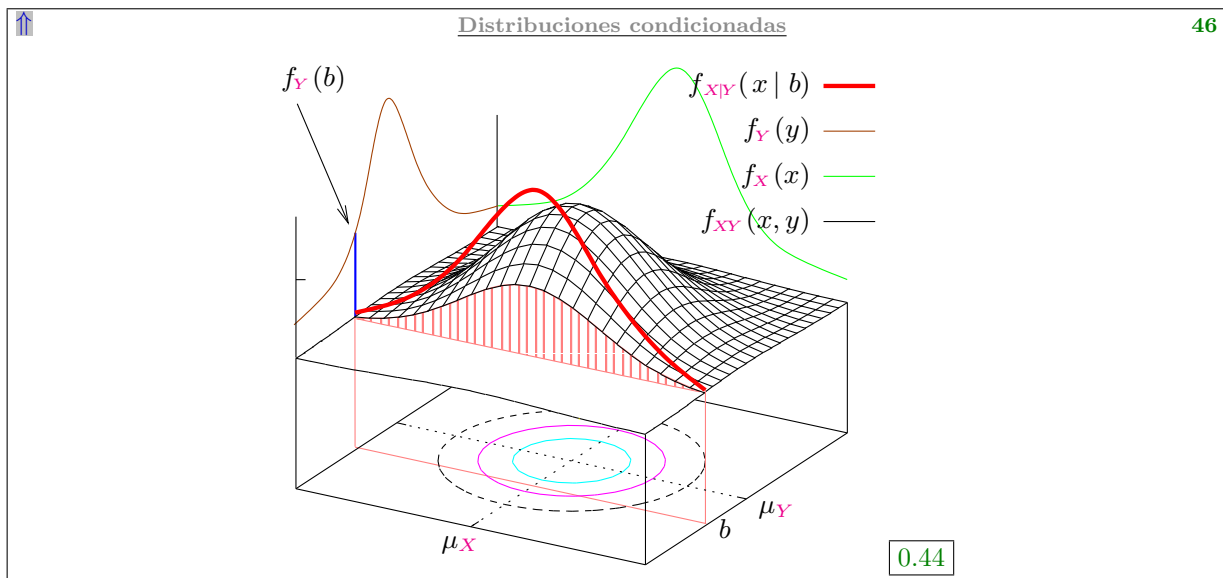
Sin embargo, si la pregunta al ejercicio anterior hubiera sido calcular

$$P(0.2 \leq X \leq 0.4 \mid Y = 0.5);$$

y puesto que Y es una función continua y por tanto $P(Y = 0.5) = 0$, entonces la estrategia anterior no hubiera sido posible ya que la probabilidad de la condición es cero.

En los casos similares a este, en los que la condición tiene probabilidad cero, es necesario definir una nueva ley de probabilidad que refleje la nueva distribución resultante cuando la condición es cierta (por ejemplo cuando la condición es $Y = 0.5$).

↑	<u>Distribuciones de probabilidad condicionadas: Caso continuo</u>	45
Función de densidad condicionada		
$f_{Y X}(y a) \equiv \frac{f_{XY}(a, y)}{f_X(a)}$		
Función de distribución condicionada		
$F_{Y X}(b a) \equiv \int_{\substack{(a,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2 \\ y < b}} f_{Y X}(y a) dy = \int_{\substack{(a,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2 \\ y < b}} \frac{f_{XY}(a, y)}{f_X(a)} dy$		
para un valor a fijo, y $f_X(a) \neq 0$		
<i>Funciones de densidad condicionales son leyes de probab. (integran 1)!</i>		



A resolver en clase

EJERCICIO 22. Sean X e Y con función de densidad uniforme igual a 2 en el triángulo $0 \leq x \leq y \leq k$, es decir,

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{para } 0 \leq x \leq y \leq k \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcule lo siguiente:

- (a) El valor de k para que $f_{XY}(x, y)$ sea un función de densidad
- (b) Las funciones marginales de X e Y
- (c) Las funciones de densidad condicionadas $f_{YX}(y | a)$ y $f_{XY}(x | b)$
- (d) $P(Y > \frac{1}{2} | X = a)$ para cualquier valor factible $a \in \mathbb{R}_X$
- (e) $P(X > \frac{1}{2} | Y = b)$ para cualquier valor factible $b \in \mathbb{R}_Y$
- (f) $P(Y > X^2, X > Y^2)$
- (g) Sin realizar más cálculos, podría decir cual es la probabilidad de

$$P(Y > X^2, X > Y^2, Y > 1 - X)$$

(con decir en que proporción es mayor, menor (o igual) a la anterior probabilidad es suficiente) ¿Y si $f_{XY}(x, y)$ no fuera uniforme? Continuación en el **EJERCICIO 50 en la página 35**.

A resolver en clase

EJERCICIO 23. Sea la siguiente función de densidad

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x + y) & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

¿Cómo calcularía la probabilidad condicionada $P(Y > 0.5 | X \in (0.25, 0.75))$? (NO lo calcule, pero indique correctamente los órdenes de integración)

7. Independencia

Independencia 47

$$\left. \begin{array}{l} P(A|B) = P(A); \quad P(B) \neq 0 \\ P(B|A) = P(B); \quad P(A) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Caso discreto:

$$P_{Y|X}(y|x) = P_Y(y) \text{ para cualquier } x;$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{P_{XY}(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)}$$

Caso continuo:

$$f_{Y|X}(Y|x) = f_Y(y) \text{ para cualquier } x;$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)}$$

A resolver en clase convertir test en ejercicio

Test. Conteste a la siguiente cuestión.

1. Sean X e Y con $f_{XY}(x, y) = e^{-x-y}$ donde x e y son mayores que cero (exponencial bivalente).
- (a) X e Y son independientes (b) X e Y NO son independientes

EJERCICIO 24. Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con densidad:

$$f_{XY}(x, y) = 1; \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < a,$$

y cero en los demás casos.

- (a) hallar el valor de a
- (b) Hallar las densidades marginales de X e Y .
- (c) ¿Son las variables independientes?
- (d) Suponga que la función de densidad anterior no está definida en un cuadrado, sino en el siguiente recinto:

$$0 < x < \frac{y}{2}; \quad 0 < y < 2.$$

Hallar las distribuciones marginales de X e Y bajo este nuevo recinto. ¿Son distintas a las calculadas en el apartado b)?

- (e) ¿Son independientes las variables aleatorias X e Y del apartado d)?

A resolver en clase

EJERCICIO 25. Sean dos variables aleatorias discretas, (X, Y) , que reflejan la siguiente información: $X = 1$ si se da un shock positivo de demanda en la economía y $X = -1$ si el shock es negativo; $Y = 1$ si el salario real sube, $Y = -1$ si el salario real baja e $Y = 0$ si se mantiene. La rigidez salarial implica que los salarios reales no se ven afectados por shocks de demanda. Según la siguiente tabla de probabilidades conjuntas, ¿podríamos afirmar que los salarios reales son rígidos en esta economía?

$P_{XY}(x, y)$		Y		
		-1	0	1
X	-1	1/18	3/18	2/18
	1	2/18	6/18	4/18

8. Momentos conjuntos

Momentos conjuntos: caso discreto 48

$$E(g(X, Y)) = \sum \sum_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} g(x, y) \cdot P_{XY}(x, y)$$

Respecto al origen:

$$a_{rm} = E_{XY}(X^r Y^m) = \sum \sum_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} x^r y^m \cdot P_{XY}(x, y)$$

para $r, m = 0, 1, 2, \dots$

Respecto al valor esperado:

$$\begin{aligned} \mu_{rm} &= E_{XY}([X - E_X(X)]^r [Y - E_Y(Y)]^m) \\ &= \sum \sum_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} (x - \mu_X)^r (y - \mu_Y)^m \cdot P_{XY}(x, y) \end{aligned}$$

para $r, m = 0, 1, 2, \dots$

Momentos conjuntos: caso continuo 49

$$E(g(X, Y)) = \iint_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} g(x, y) \cdot f_{XY}(x, y; \boldsymbol{\theta}) dx dy$$

Respecto al origen:

$$a_{rm} = E_{XY}(X^r Y^m) = \iint_{\mathbb{R}_{XY}^2} x^r y^m f_{XY}(x, y) dy dx$$

para $r, m = 0, 1, 2, \dots$

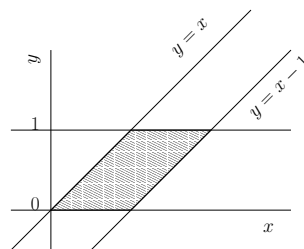
Respecto al valor esperado:

$$\begin{aligned} \mu_{rm} &= E_{XY}([X - E_X(X)]^r [Y - E_Y(Y)]^m) \\ &= \iint_{\mathbb{R}_{XY}^2} (x - \mu_X)^r (y - \mu_Y)^m f_{XY}(x, y) dy dx \end{aligned}$$

para $r, m = 0, 1, 2, \dots$

A resolver en clase

EJERCICIO 26. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta $f_{XY}(x, y)$; y cuyo soporte conjunto \mathbb{R}_{XY} aparece en la siguiente figura:



Indique cómo calcularía $E(X)$ (indique correctamente los límites de integración).

EJERCICIO 27. Demuestre que

- (a) $a_{10} = E(X)$; $a_{01} = E(Y)$
- (b) $a_{20} = [E(X)]^2 + \text{Var}(X)$
- (c) $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$
- (d) $\mu_{20} = \text{Var}(X)$; $\mu_{02} = \text{Var}(Y)$;

8.1. Propiedades de los momentos bivariantes

↑	Momentos teóricos bivariantes: propiedades	50
$E_{XY}(X + Y) = E_X(X) + E_Y(Y)$ $E_{XY}(X - Y) = E_X(X) - E_Y(Y)$ $E_X(aX) = a \cdot E_X(X)$		
<p>y si X e Y son independientes</p> $E_{XY}(X \cdot Y) = E_X(X) \cdot E_Y(Y)$		

Proposición 8.1. $E_{XY}(g(X)) = E_X(g(X))$ donde $f_{XY}(x, y) \neq 0$ para $(x, y) \in \mathbb{R}_{XY}^2$ y $f_{XY}(x, y) = 0$ en el resto de casos.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 E_{XY}(g(X)) &= \iint_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} g(x) f_{XY}(x, y) dy dx = \iint_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} g(x) f_{Y|X}(Y | x) \cdot f_X(x) dy dx \\
 &= \int_{x \in \mathbb{R}_X} g(x) f_X(x) \left[\int_{\substack{(a,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2 \\ a \in \mathbb{R}_X}} f_{Y|X}(y | a) dy \right] dx \\
 &= \int_{x \in \mathbb{R}_X} g(x) f_X(x) dx = E_X(g(X))
 \end{aligned}$$

□

Por esto cuando escribimos $E(X)$ nos referimos indistitamente tanto a $E_X(X)$ como a $E_{XY}(X)$

A resolver en clase

EJERCICIO 28. Teniendo en cuenta lo anterior:

- (a) demuestre la primera y segunda propiedad de la transparencia anterior .
- (b) demuestre la tercera propiedad de la transparencia anterior .
- (c) Demuestre también la cuarta propiedad

A resolver en clase

EJERCICIO 29. Sean X e Y con función de densidad $f_{XY}(x, y)$ y como soporte \mathbb{R}_{XY}^2 el triángulo $0 \leq 1 - x \leq y \leq 1$. ¿Cuál (o cuales) de las siguientes expresiones es (o son) correcta (correctas)?

1. $E(X) = \int_0^1 x \int_{1-x}^1 f_{XY}(x, y) dy dx$
2. $E(X) = \int_0^1 x \int_0^1 f_{XY}(x, y) dy dx$
3. $E(X) = \int_0^1 x \int_{1-x}^y f_{XY}(x, y) dy dx$
4. $1 = \int_0^1 \int_0^1 f_{XY}(x, y) dy dx$

Covarianza 51

El momento conjunto más empleado es la **covarianza**:

$$\text{Cov}(X, Y) \equiv \mu_{11} = E_{XY}([X - E_X(X)][Y - E_Y(Y)]) \equiv \sigma_{XY}$$

Propiedades de la covarianza:

C1. $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
 C2. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
 C3. $\text{Cov}(aX, Y) = a\text{Cov}(X, Y)$ para $a \in \mathbb{R}$
 C4. $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$

Empleando la covarianza podemos extender la propiedad V2 en la página ~56 a v.a. *no independientes*:
 V1'. $\text{Var}(aX_1 + bX_2) = a^2 \text{Var}(X_1) + b^2 \text{Var}(X_2) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$

EJERCICIO 30. Demuestre las propiedades de la transparencia anterior.

Solución: Véase los teoremas 7.1, 7.2 y 7.5 de **Novales (1997)**.

Ejercicio 30

La covarianza mide el grado de asociación lineal entre dos v.a.

A resolver en clase

EJERCICIO 31. Calcular $\text{Cov}(X, Y)$ dada la siguiente función de cuantía conjunta

$y \backslash x$	0	1	2	$P_Y(y)$
0	0.2	0.2	0.2	0.6
2	0.1	0.1	0.2	0.4
$P_X(x)$	0.3	0.3	0.4	1

Coeficiente de correlación 52

Una debilidad de la covarianza es que depende de las unidades de medida. Para evitar este problema empleamos una versión *estandarizada*:

$$\text{Corr}(X, Y) = \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Propiedades del coef. correlación:

$\rho 1.$ $-1 \leq \text{Corr}(X, Y) \leq 1$
 $\rho 2.$ $\text{Corr}(aX + b, cY + d) = \text{Corr}(X, Y)$, para $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, y $(a \cdot b) > 0$
 $\rho 3.$ $\text{Corr}(X, Y) = \pm 1$ si y sólo si $Y = a + bX$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Es una medida del grado de relación lineal entre X e Y

Si X e Y son indep., $\implies \rho_{XY} = 0$ (pero \nleftarrow).

Añadir caso n-dimensional

EJERCICIO 32. Demuestre la propiedad $\rho 1$ de la transparencia anterior para el caso de v.a. tipificadas.

EJERCICIO 33. Demuestre la propiedad $\rho 2$ de la transparencia anterior.

Perfecta correlación ($\rho 3$): X e Y están perfectamente correlacionadas, i.e., $\text{Corr}(X, Y) = \pm 1$, si y sólo si una v.a. es función lineal de la otra v.a.

Demostración. Véase la demostración de la proposición B.1 en la página ~60 en el apéndice. □

A resolver en clase

EJERCICIO 34. Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: Si dos variables X, Y poseen un coeficiente de correlación lineal muy próximo a cero, debemos concluir que prácticamente no existe

ninguna relación entre las dos variables.

A resolver en clase

EJERCICIO 35. (Consta de 5 apartados)

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta, donde X e Y pueden tomar los valores 0, 1 ó 2. La variable aleatoria X hace referencia al volumen de venta de bebidas alcohólicas en un chiringuito de playa en un día cualquiera, mientras que Y hace mención al volumen de ventas de refrescos el mismo día en el mismo establecimiento. Definimos las variables de la siguiente manera: $X = 0$ si se vende poco, $X = 1$ si el volumen de ventas es medio y $X = 2$ si se vende mucho. De manera análoga definimos Y . La ley de probabilidad conjunta viene dada por la siguiente función de cuantía:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.12	0.16	0.12
1	0.08	0.12	0.16
2	0.04	0.08	0.12

- Calcule las leyes de probabilidad marginales de X e Y . Según esta información, ¿que situación es más probable respecto a las ventas de alcohol?
- Halle las leyes de probabilidad condicionadas de X con respecto a los diferentes valores que pueda tomar Y . ¿Varían entre ellas y con respecto a la ley de probabilidad marginal de X ? ¿Que significa la respuesta a la pregunta anterior? Si $Y = 0$, ¿cambiaría la respuesta cualitativa del apartado anterior? ¿Y si $Y = 2$?
- Calcule la correlación entre la venta de refrescos y la de bebidas alcohólicas. Interprete el resultado.
- El dueño del chiringuito considera “mal día” a aquel en el que las ventas bajas de un tipo de bebida, no son compensadas con ventas elevadas del otro tipo de bebida (es decir si $X + Y < 2$). ¿Cuál es la probabilidad de que se dé un “mal día”?
- ¿Cómo cambian las respuestas del apartado anterior si se sabe con anterioridad que $Y = 0$, que $Y = 1$, ó que $Y = 2$ (use la información de las probabilidades condicionadas?)

9. Momentos condicionados

⬆
Momentos condicionados: caso discreto
53

Esperanza condicionada:

$$E_{Y|X}(Y | a) = \sum_{y \in \mathbb{R}_Y} y P_{Y|X}(y | a)$$

Varianza condicionada:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{Y|X}(Y | a) &= \sum_{y \in \mathbb{R}_Y} [y - E_{Y|X}(Y | a)]^2 P_{Y|X}(y | a) \\ &= E_{Y|X}(Y^2 | a) - [E_{Y|X}(Y | a)]^2 \end{aligned}$$

A resolver en clase

EJERCICIO 36. Sea la siguiente función de cuantía conjunta para X e Y

$P_{XY}(x, y)$	y=0	y=1	y=2
x=0	0.33	0.12	0.05
x=1	0	0.25	0.25

Calcule $E_{XY}(X | 2)$.

↑	<u>Momentos condicionados: caso continuo</u>	54
Esperanza condicionada:		
$E_{Y X}(Y a) = \int_{y \in \mathbb{R}_Y} y f_{Y X}(y a) dy$		
Varianza condicionada:		
$\begin{aligned} \text{Var}_{Y X}(Y a) &= \int_{y \in \mathbb{R}_Y} [y - E_{Y X}(Y a)]^2 f_{Y X}(y a) dy \\ &= E_{Y X}(Y^2 a) - [E_{Y X}(Y a)]^2 \end{aligned}$		

A resolver en clase

EJERCICIO 37. Sea la siguiente función de densidad condicionada

$$f_{Y|X}(Y|x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 < y < x, \text{ para } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}.$$

¿Cómo calcularía el valor esperado de Y condicionado a que X tomase un valor arbitrario en el intervalo $(0, 1)$?

(NO lo calcule, pero indique correctamente los órdenes de integración).

9.1. Propiedades de la esperanza condicional

↑	<u>Propiedades de la esperanza condicional</u>	55
Para X, Y y Z v.a. y a y b constantes; $E_{\cdot}(\cdot \cdot)$ satisface las siguientes propiedades:		
EC1. [Linealidad] $E_{X YZ}(aX + bY z) = a \cdot E_{X YZ}(X z) + b \cdot E_{Y YZ}(Y z)$		
EC2. [“Sustituyendo lo conocido”]		
$E_{Y X}(h(X, Y) x) = E_{Y X}(h(x, Y) x)$		
EC3. Si X e Y independientes: $E_{Y X}(g(Y) x) = E(g(Y))$		

EJERCICIO 38. Suponga que X e Y son independientes:

(a) Demuestre que entonces necesariamente las esperanzas condicionales son iguales a las incondicionales; es decir

$$X, Y \text{ independientes} \Rightarrow E_{Y|X}(Y|x) = E(Y).$$

Nótese que implicación es cierta únicamente de izquierda a derecha, y no al contrario.

(b) Demuestre que, de hecho, cualquier momento condicional coincide con el correspondiente momento incondicional; es decir

$$X, Y \text{ independientes} \Rightarrow E_{Y|X}(g(Y)|x) = E(g(Y)).$$

A resolver en clase

EJERCICIO 39. La variable aleatoria bidimensional (X, Y) tiene función bidimensional conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < y < 1 - x < 1 \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$

- Calcule k para que $f_{XY}(x, y)$ sea una verdadera función de densidad
- $P(X < 0.1, Y > 0.8)$.
- Calcule las funciones de densidad marginales, así como sus esperanzas.
- Calcule $E_{X|Y}(X|y)$. ¿Es igual a la esperanza incondicional de X ?
- Para que valor de Y la esperanza condicional, $E_{X|Y}(X|y)$, es igual a $E(X)$.
- ¿Son X e Y independientes?
- Calcule la covarianza entre X e Y . Comente el resultado.

(h) Calcule $\text{Var}_{XY}(X | y)$

A resolver en clase

EJERCICIO 40. Sean X e Y dos variables aleatorias discretas. Si $E_{YX}(Y | 1) = 1$ y además $\text{Var}_{YX}(Y | 1) = 0$. ¿Cuál es el valor de $P_{YX}(1 | 1)$? ¿y el valor de $P_{YX}(2 | 1)$? Justifique su respuesta.

EJERCICIO 41. La variable aleatoria Z es combinación lineal de Y (es decir, $Z = a + bY$, donde a, b son constantes no nulas). Considere además, que hay otra variable X . Demuestre que si X e Y son independientes, entonces $E_{ZX}(Z | x) = E(Z)$.

EJERCICIO 42. Sean dos variables aleatorias, (X, Y) , discretas que reflejan la siguiente información: $X = 1$ si se da un shock positivo de oferta en la economía (por ejemplo, el precio del petróleo baja por debajo de los 35-30\$/barril), $X = 0$ si la economía no sufre ningún shock (por ejemplo, el precio del petróleo se mantiene en torno a los 35\$/barril) y $X = -1$ si el shock es negativo (por ejemplo, el precio del petróleo se coloca por encima de los 35-40\$/barril); $Y = 1$ si el nivel de empleo aumenta, $Y = 0$ si se mantiene e $Y = -1$ si disminuye. La siguiente tabla refleja su ley de probabilidades conjuntas:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	5/24	3/24	0
0	2/24	6/24	2/24
1	1/24	2/24	3/24

- Sin tener información acerca del shock económico, ¿qué es más probable, que aumente o que disminuya el nivel de empleo?
- Suponga, que apreciamos que el shock ha sido negativo, ¿Cambiaría la respuesta del apartado anterior? ¿Cuál sería ahora la probabilidad de que el empleo caiga, que se mantenga o que suba?
- Sin tener información acerca del shock de la economía, ¿Cuál es el valor esperado de la variable que describe la evolución del empleo?
- ¿Cuál sería el valor esperado de la variable que representa el movimiento del empleo si el shock ha sido negativo? ¿y su varianza?
- Comparando las respuestas de los apartados anteriores, ¿podría decir algo acerca de la existencia o no de dependencia de las variables? Dé una medida del grado de relación lineal entre las variables. ¿Que signo tiene?

A resolver en clase

EJERCICIO 43. [Ejemplo 7.1 (Novales, 1997, pp. 247)] Sea X e Y con una función de cuantía conjunta definida sobre el soporte $\mathbb{R}_{XY} = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ que asigna a cada punto una probabilidad de $1/5$.

- Comprobar si X y Y son independientes.
- Calcular $\text{Cov}(X, Y)$
- (añadido) Calcular
 - la función de cuantía de X condicionada a $Y = 0$
 - la función de cuantía de X condicionada a $Y = 1$
 - la función de cuantía de X condicionada a $Y = 4$
- (añadido) Calcular la función de cuantía de Y condicionada a $X = 0$.
- (añadido) Calcular
 - $E_{XY}(X | 0)$
 - $E_{XY}(X | 1)$
 - $E_{XY}(X | 4)$
- (añadido) Calcular $E_{YX}(Y | 0)$.
- (añadido) Calcular
 - $\text{Var}_{XY}(X | 0)$
 - $\text{Var}_{XY}(X | 1)$
 - $\text{Var}_{XY}(X | 4)$

Continuación en EJERCICIO 44 en la página siguiente.

10. Función de regresión y función cedástica. Esperanzas y varianzas condicionales estocásticas

↑	<u>Esperanza condicional como función de x: $E_{Y X}(Y x)$</u>	56
Función de regresión ^a es $E_{Y X}(Y x_j)$ interpretada como función de x_j para $x_j \in \mathbb{R}_X$:		
$h(x) = E_{Y X}(Y x), \quad x \in \mathbb{R}_X$		
<hr style="width: 30%; margin-left: 0;"/>		
^a de Y sobre X		

↑	<u>Esperanza condicional como v.a.: $E(Y X)$</u>	57
Esperanza condicional estocástica: v.a. que toma los valores		
$h(x) = E_{Y X}(Y x_j), \quad x_j \in \mathbb{R}_X$		
con probabilidades determinadas por la ley de probabilidad de X :		
$E(Y X) = E_{Y X}(Y x_j) \text{ con probabilidades provenientes de } F_X(x_j)$		
para todo $x_j \in \mathbb{R}_X$		
Es decir, si $h(x) = E_{Y X}(Y x)$ es la función de regresión, entonces		
$h(X) \equiv E(Y X)$		
es la <i>esperanza condicional estocástica</i> .		

A resolver en clase

EJERCICIO 44.

(a) Represente la función de regresión $E_{X|Y}(X|y)$ del EJERCICIO 43.

(b) ¿Cual es la función de cuantía de $E(X|Y)$?

Proposición 10.1. Si $E_{Y|X}(Y|x) = E(Y)$, entonces necesariamente $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Demostración. Puesto que $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$, basta con probar que si $E_{Y|X}(Y|x) = E(Y)$, entonces $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \int \int xy f_{XY}(x, y) dy dx \\
 &= \int \int xy f_{Y|X}(Y|x) f_X(x) dy dx \\
 &= \int x \left[\int y f_{Y|X}(Y|x) dy \right] f_X(x) dx \\
 &= \int x [E_{Y|X}(Y|x)] f_X(x) dx \\
 &= \int x E(Y) f_X(x) dx && \text{por la condición impuesta} \\
 &= E(Y) \int x f_X(x) dx = E(Y) \cdot E(X)
 \end{aligned}$$

□

La implicación inversa en general no es cierta, i.e., en general $\text{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow E_{Y|X}(Y|x) = E(Y)$; véase el EJERCICIO 43 por ejemplo.

EJERCICIO 45. Compruebe que pese a que en el EJERCICIO 43, $\text{Cov}(X, Y) = 0$, sin embargo la $E_{Y|X}(Y|x)$ no es constante (aunque hemos visto que $E_{X|Y}(X|y)$ si lo es).

EJERCICIO 46. Demuestre la Proposición 10.1 para el caso de variables discretas.

↑ Varianza condicional como función de x : $\text{Var}_{Y|X}(Y|x)$ 58

Función cedástica^a es $\text{Var}_{Y|X}(Y|x)$ interpretada como función de x :

$$g(x) = \text{Var}_{Y|X}(Y|x), \quad x \in \mathbb{R}_X$$

$\text{Var}_{Y|X}(Y|x) = cte \Rightarrow$ Var. cond. *homocedástica*.

$\text{Var}_{Y|X}(Y|x) = g(x) \neq cte \Rightarrow$ Var. cond. *heterocedástica*.

^ade Y sobre X

Definición 1. Cuando la varianza condicional no depende de la variable que condiciona, i.e.,

$$g(x) = \text{Var}_{Y|X}(Y|x) = cte; \quad x \in \mathbb{R}_X$$

se dice que la varianza condicional es *homocedástica*.

Por el contrario, cuando la varianza condicional si depende de la variable que condiciona, i.e.,

$$\text{Var}_{Y|X}(Y|x) = g(x); \quad x \in \mathbb{R}_X$$

se dice que la varianza condicional es *heterocedástica*.

↑ Varianza condicional como v.a.: $\text{Var}(Y|X)$ 59

Varianza condicional estocástica: v.a. que toma los valores

$$\text{Var}_{Y|X}(Y|x_j), \quad x_j \in \mathbb{R}_X$$

con probabilidades determinadas por la ley de probabilidad de X :

$$\text{Var}(Y|X) = \text{Var}_{Y|X}(Y|x_j) \text{ con probabilidades provenientes de } F_X(x_j)$$

para todo $x_j \in \mathbb{R}_X$

Es decir, si $g(x) = \text{Var}_{Y|X}(Y|x)$ es la función cedástica, entonces

$$g(X) = \text{Var}(Y|X) = E(Y^2|X) - [E(Y|X)]^2$$

es la varianza condicional estocástica.

A resolver en clase

EJERCICIO 47.

(a) Represente la función cedástica $E_{X|Y}(X|y)$ del EJERCICIO 43.

(b) ¿Cual es la función de cuantía de $\text{Var}(X|Y)$?

10.1. Esperanzas iteradas

↑ Teorema de las esperanzas iteradas 60

$$\begin{aligned} E_X(E(Y|X)) &= \sum h(x)P_X(x) \\ &= \sum [E_{Y|X}(Y|x)] P_X(x) \\ &= \sum [\sum y P_{Y|X}(y|x)] P_X(x) \\ &= \sum \sum y \cdot P_{Y|X}(y|x) P_X(x) \\ &= \sum \sum y \cdot P_{XY}(x,y) = E(Y) \end{aligned}$$

EJERCICIO 48. Demuestre el teorema anterior para el caso de variables continuas.

EJERCICIO 49. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy & 0 < x < 1; 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

- Calcule el valor de k , $f_X(x)$ y $f_Y(y)$
- Calcule $\text{Var}(Y)$
- Calcule $E(9(X-1)Y^2)$
- Calcule $E_{Y|X}(Y|x)$, y verifique para este caso el “Teorema de las esperanzas iteradas”, es decir, *que la esperanza de la esperanza condicional, $E_X(E(Y|X))$, es igual a $E(Y)$* .
- Calcule las siguientes tres probabilidades: $P(Y > X)$, $P(Y > X | X = 0.5)$, y $P(Y > X | X > 0.5)$,

10.2. Identidad de la varianza condicional

↑	<u>Identidad de la varianza condicional</u>	61
$\text{Var}(Y) = E(\text{Var}(Y X)) + \text{Var}(E(Y X))$		
que implica		
$\text{Var}(Y) \geq \text{Var}(E(Y X))$		

Teorema 10.2. Para cualquier par de v.a.s X e Y se verifica que

$$\text{Var}(Y) = E_X(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(E(Y|X))$$

Demostración. Por una parte

$$\text{Var}(Y) - \text{Var}(E(Y|X)) = \left(E(Y^2) - [E(Y)]^2 \right) - \left(E(E(Y|X)^2) - [E(E(Y|X))]^2 \right) \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 - E\left([E(Y|X)]^2\right) + [E(Y)]^2 \\ &= E(Y^2) - E\left([E(Y|X)]^2\right); \end{aligned} \quad (10.2)$$

por otra parte $\text{Var}(Y|X) = E(Y^2|X) - [E(Y|X)]^2$; y calculando su esperanza tenemos:

$$\begin{aligned} E(\text{Var}(Y|X)) &= E(E(Y^2|X)) - E\left([E(Y|X)]^2\right) \\ &= E(Y^2) - E\left([E(Y|X)]^2\right) \quad \text{por T}^a \text{ esperanzas iteradas} \\ &= \text{Var}(Y) - \text{Var}(E(Y|X)). \end{aligned}$$

Así pues, ambas partes son iguales, es decir $\text{Var}(Y) - \text{Var}(E(Y|X)) = E(\text{Var}(Y|X))$; y consecuentemente

$$\text{Var}(Y) = E(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(E(Y|X));$$

donde los dos sumandos de la derecha son semi-definidos positivos (Rao, 2002). □

EJERCICIO 50. Continuación de EJERCICIO 22 en la página ~25.

- La esperanza y varianza de X
- La función de regresión $E_{Y|X}(Y|x)$
- ¿Cuál es el soporte de la esperanza condicionada, $E(Y|X)$?

EJERCICIO 51. Sea la función

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < y < 3 \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

- Dibuje el soporte de la función
- Calcular k para que $f_{XY}(x, y)$ sea función de densidad.
- Calcular las distribuciones marginales, y los momentos hasta segundo orden de X
- Calcular las distribuciones marginales, y los momentos hasta segundo orden de Y

- (e) ¿Son X e Y independientes?
 (f) Calcular la correlación entre X y Y
 (g) Calcular $f_{Y|X}(Y|x)$ y $E_{Y|X}(Y|x)$
 (h) Comprobar que $E_x(E(Y|X)) = E(Y)$

Continúa en EJERCICIO 53 en la página 40.

A resolver en clase

EJERCICIO 52. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua con la siguiente función de densidad:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2/3 & \text{si } x \in [0, 1]; \quad y \in [0, 2]; \quad y > x \\ 0 & \text{en los restantes casos} \end{cases}$$

- (a) Dibuje el recinto en el que $f_{XY}(x, y)$ toma valores distintos de cero. Especifique claramente los rangos de definición (incondicionales y condicionales) de las variables aleatorias X e Y . (¿valores tomados por y restringen en cualquier caso los posibles valores que puede tomar x ?)
 (b) Verifique que $f_{XY}(x, y) = 2/3$ es efectivamente una función de densidad definida en el recinto especificado.
 (c) Calcule las funciones de densidad marginal de X e Y . Indique explícitamente sus dominios de definición. Calcule el valor esperado de X e Y .
 (d) Verifique que la probabilidad de que Y sea mayor que 1 es dos tercios, y la probabilidad de que sea menor o igual que 1 un tercio.
 (e) Calcule la función de regresión de Y sobre X (esperanza de Y condicionada a X) y la función de regresión de X sobre Y (la esperanza de X condicionada a Y). Deje bien claro los dominios de definición de las dos esperanzas condicionadas. Dibuje ambas esperanzas condicionadas.
 (f) ¿Son lineales las funciones de regresión (las esperanzas condicionadas) calculadas en el apartado anterior?

Añadir demostración de que la esperanza es predictor óptimo:

$E(X)$ predictor de X (o generalizando $E(g(X))$ predictor de $g(X)$)

10.3. Propiedades de la esperanza condicional estocástica

↑	<u>Propiedades de la esperanza condicional estocástica</u>	62
Para X, Y y Z v.a. y a y b constantes; $E(\cdot \cdot)$ satisface las siguientes propiedades:		
ECS1. [Linealidad]	$E(aX + bY Z) = aE(X Z) + bE(Y Z)$	
ECS2. [Ley de esperanzas iteradas]	$E(E(g(X, Y) X)) = E(g(X, Y))$	
ECS3. [“Sacando fuera lo conocido”]	$E(h(X) \cdot g(Y) X) = h(X) \cdot E(g(Y) X)$	
ECS4. [Predictor óptimo]	$E\left([Y - E(Y X)]^2\right) \leq E\left([Y - g(X)]^2\right)$ para cualquier $g(X)$	

↑	<u>Esperanza condicional como predictor óptimo</u>	63
Buscamos una función de X , digamos $h(X)$, tal que $E_{XY}\left([Y - h(X)]^2\right)$ sea mínimo.		
$E_{XY}\left([Y - h(X)]^2\right) = \sum \sum [y - h(x)]^2 P_{XY}(x, y)$ $= \sum \left[\sum [y - h(x)]^2 P_{Y X}(y x) \right] P_X(x).$ $= E_X\left(E_{Y X}\left([Y - h(x)]^2 \mid x\right)\right)$		
Si $h(x)$ hace $E_{Y X}\left([Y - h(x)]^2 \mid x\right)$ mínimo para todo $x \in \mathbb{R}_X$, entonces $h(x)$ es la función buscada.		

Caso continuo: Buscamos una función de X , digamos $h(X)$, tal que $E\left([Y - h(X)]^2\right)$ sea mínimo.

$$\begin{aligned} E\left([Y - h(X)]^2\right) &= \iint [y - h(x)]^2 f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int \left[\int [y - h(x)]^2 f_{Y|X}(Y | x) dy \right] f_X(x) dx. \\ &= E_X \left(E_{Y|X} \left([Y - h(x)]^2 \mid x \right) \right) \end{aligned}$$

Si $h(x)$ hace $E_{Y|X} \left([Y - h(x)]^2 \mid x \right)$ mínimo para todo $x \in \mathbb{R}_X$, entonces $h(x)$ es la función buscada.



Esperanza condicional como predictor óptimo

64

$$\begin{aligned} E_{Y|X} \left([Y - h(x)]^2 \mid x \right) &= \sum [y - h(x)]^2 P_{Y|X}(y | x) \\ &= \sum \left[y^2 + (h(x))^2 - 2h(x)y \right] P_{Y|X}(y | x) \\ &= \sum y^2 P_{Y|X}(y | x) + (h(x))^2 - 2h(x) \sum y P_{Y|X}(y | x) \\ &= E_{Y|X} (Y^2 | x) + (h(x))^2 - 2h(x) E_{Y|X} (Y | x) \\ &= \left[h(x) - E_{Y|X} (Y | x) \right]^2 + E_{Y|X} (Y^2 | x) - \left[E_{Y|X} (Y | x) \right]^2 \\ &= \left[h(x) - E_{Y|X} (Y | x) \right]^2 + \text{Var}_{Y|X} (Y | x) \end{aligned}$$

que es mínimo cuando $h(x) = E_{Y|X} (Y | x)$.

Caso continuo:

$$\begin{aligned} E_{Y|X} \left([Y - h(x)]^2 \mid x \right) &= \int [y - h(x)]^2 f_{Y|X}(Y | x) dy \\ &= \int \left[y^2 + (h(x))^2 - 2h(x)y \right] f_{Y|X}(Y | x) dy \\ &= \int y^2 f_{Y|X}(Y | x) dy + (h(x))^2 - 2h(x) \int y f_{Y|X}(Y | x) dy \end{aligned}$$

La cuarta línea y siguientes coinciden con las de la transparencia anterior.

10.4. Esperanza condicional cuando es una función lineal

Sea $E(Y | X)$ una función lineal de X , es decir,

$$E(Y | X) = a + bX$$

¿Cómo son en este caso a y b en relación a los momentos teóricos de $f_{XY}(x, y)$?

De ECS1 y ECS2 sabemos que

$$E(Y) = E_X(E_{Y|X}(Y | x)) = E(a + bX) = a + bE(X);$$

por tanto,

$$a = E(Y) - b \cdot E(X) \tag{10.3}$$

De ECS2 y ECS3

$$E(XY) = E_X(E(XY | X)) = E(X \cdot E(Y | X))$$

por tanto

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(X \cdot [a + bX]) \\ &= E\left(X \cdot \left[(E(Y) - b \cdot E(X)) + bX \right]\right) && \text{de 10.3} \\ &= E(XE(Y)) + b[E(X^2) - E(X)E(X)] \\ &= E(Y)E(X) + b \cdot \text{Var}(X); \end{aligned}$$

despejando $b \cdot \text{Var}(X)$:

$$b \cdot \text{Var}(X) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$b = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}. \quad (10.4)$$

10.5. Aproximación lineal de la esperanza condicional. Recta de regresión



Aproximación lineal a la esperanza condicional: Recta de regresión

65

- $E(Y)$ es un predictor de Y
- $h(x) = E_{Y|X}(Y|x)$ es predictor preferido (incorpora información relevante cuando Y y X dependientes)
- Si conocemos $f_{XY}(x, y)$ podemos deducir $h(x) = E_{Y|X}(Y|x)$
- En general desconocemos tanto $f_{XY}(x, y)$ como $h(x) = E_{Y|X}(Y|x)$ (aunque con frecuencia conocemos realizaciones de X)
- Una solución es buscar una función $g^*(x)$ alternativa a la función $h(x)$ desconocida, pero que se “parezca a” $h(x)$ en algún sentido.



Aproximación lineal a la esperanza condicional: Recta de regresión

66

Buscamos la aproximación mínimo cuadrática (que minimiza la suma ponderada de la distancia al cuadrado):

$$\min_{g^*} \sum_{\mathbb{R}_X} [g^*(x) - h(x)]^2 P_X(x),$$

donde $f_X(x)$ y $h(x) = E_{Y|X}(Y|x)$ son funciones desconocidas. Si suponemos $g^*(x) = a + bx$:

$$\min_{g^*} \sum_{\mathbb{R}_X} [(a + bx) - h(x)]^2 P_X(x)$$

Caso continuo: Buscamos la aproximación mínimo cuadrática (que minimiza la suma ponderada de la distancia al cuadrado):

$$\min_{g^*} \int_{\mathbb{R}_X} [g^*(x) - h(x)]^2 f_X(x) dx,$$

donde $f_X(x)$ y $h(x) = E_{Y|X}(Y|x)$ son funciones desconocidas.

Si suponemos $g^*(x) = a + bx$:

$$\min_{g^*} \int_{\mathbb{R}_X} [(a + bx) - h(x)]^2 f_X(x) dx,$$



Aproximación lineal a la esperanza condicional: Recta de regresión

67

Condiciones de primer orden (parámetro a):

$$2 \sum_{\mathbb{R}_X} [a + b \cdot x - h(x)] P_X(x) = 0$$

$$a \sum_{\mathbb{R}_X} P_X(x) + b \sum_{\mathbb{R}_X} x P_X(x) - \sum_{\mathbb{R}_X} E_{Y|X}(Y|x) P_X(x) = 0$$

$$a + b \cdot E(X) - E(Y) = 0$$

$$a = E(Y) - b \cdot E(X)$$

Caso continuo: **Condiciones de primer orden** (parámetro a):

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}_X} [a + b \cdot x - h(x)] f_X(x) dx &= 0 \\ a \int_{\mathbb{R}_X} f_X(x) dx + b \int_{\mathbb{R}_X} x f_X(x) dx - \int_{\mathbb{R}_X} E_{Y|X}(Y|x) f_X(x) dx &= 0 \\ a + b \cdot E(X) - E(Y) &= 0 \end{aligned}$$

$$a = E(Y) - b \cdot E(X),$$



Aproximación lineal a la esperanza condicional: Recta de regresión

68

Condiciones de primer orden (parámetro b):

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\mathbb{R}_X} [a + b \cdot x - h(x)] x P_X(x) &= 0 \\ aE(X) + bE(X^2) - E(X \cdot E(Y|X)) &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$E(X \cdot E(Y|X)) = \sum_{\mathbb{R}_X} x \sum_{\mathbb{R}_{Y|X}} y \frac{P_{XY}(x, y)}{P_X(x)} P_X(x) = E(XY)$$

y sustituyendo el valor de a que obtuvimos anteriormente,

$$\begin{aligned} b &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}, \\ a &= E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)}. \end{aligned}$$

Caso continuo: **Condiciones de primer orden** (parámetro b):

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}_X} [a + b \cdot x - h(x)] x f_X(x) dx &= 0 \\ aE(X) + bE(X^2) - E_X(X \cdot E(Y|X)) &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$E_X(X \cdot E(Y|X)) = \int_{\mathbb{R}_X} x \int_{\mathbb{R}_{Y|X}} y \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} f_X(x) dy dx = E(XY)$$

y sustituyendo el valor de a que obtuvimos anteriormente,

$$\begin{aligned} b &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}, \\ a &= E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)}. \end{aligned}$$



Aproximación lineal a la esperanza condicional: Recta de regresión

69

$$g^*(x) = \overbrace{E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)}}^a + \overbrace{\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}}^b \cdot x; \quad \forall x \in \mathbb{R}_X, \quad (10.5)$$

y puesto que $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$; entonces $\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ y tenemos una expresión alternativa:

$$g^*(x) = E(Y) + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - E(X)); \quad \forall x \in \mathbb{R}_X, \quad (10.6)$$

de la **recta de regresión**^a.

^a¡pero que depende de **momentos** que en general son **desconocidos**!

EJERCICIO 53. Continuación del **EJERCICIO 51** en la página 35:

(a) Comprobar que

$$E_{Y|X}(Y|x) = E(Y) + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - E(X))$$

Continúa en **EJERCICIO 57** en la página 44.

Ejemplo 7. Sean las siguientes v.a. referentes a una empresa

- Y tasa de variación de los beneficios
- X tasa de variación de los gastos en personal
- Z tasa de variación de los gastos en publicidad

Conocemos los siguientes momentos de dichas variables

$$\begin{array}{lll} E(Y) = 0.04 & \sigma_Y = 0.01 & \\ E(X) = 0.03 & \sigma_X = 0.015 & \rho_{XY} = 0.5 \\ E(Z) = 0.035 & \sigma_Z = 0.025 & \rho_{ZY} = 0.6 \end{array}$$

Podemos incrementar en un 5% una de las dos vbles de control (bien X , o bien Z) ¿Que decisión es preferible?

Empleando la aproximación lineal a la esperanza condicional (regresión lineal) vemos que, por una parte:

$$E_{Y|X}(Y|x) \approx a_x + b_x \cdot x,$$

donde $b_x = \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = 0.5 \frac{0.01}{0.015} = 0.333$ (que es la pendiente) y $a_x = E(Y) - E(X) \cdot b_x = 0.04 - 0.03 \cdot 0.333 = 0.03$.

Por lo tanto

$$E_{Y|X}(Y|x) \approx 0.03 + 0.333 \cdot x,$$

por lo que el incremento esperado en los beneficios condicionado a un incremento del 5% en el gasto en personal es: $E_{Y|X}(Y|0.05) \approx 0.03 + 0.333 \cdot 0.05 = 0.0466$,

Por otra parte

$$E_{Y|Z}(Y|z) \approx a_z + b_z \cdot z,$$

donde $b_z = \rho_{ZY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_Z} = 0.6 \frac{0.01}{0.025} = 0.24$ (que es la pendiente) y $a_z = E(Y) - E(Z) \cdot b_z = 0.04 - 0.035 \cdot 0.24 = 0.0316$.

Por lo tanto

$$E_{Y|Z}(Y|z) \approx 0.0316 + 0.24 \cdot z,$$

por lo que el incremento esperado en los beneficios condicionado a un incremento del 5% en el gasto en publicidad es: $E_{Y|Z}(Y|0.05) \approx 0.0316 + 0.24 \cdot 0.05 = 0.0436$,

Pese a que $\rho_{ZY} > \rho_{XY}$, la pendiente de la función de regresión de Y sobre X es mayor que la pendiente de la función de regresión de Y sobre Z ; por lo que un incremento del gasto del 5% en personal arroja un mayor beneficio esperado que en el caso de que dicho incremento se produzca en publicidad.

A resolver en clase

EJERCICIO 54. (Consta de 9 apartados)

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) \text{ definida sobre el soporte } -1 \leq y \leq x; \quad 0 \leq x \leq 1$$

Deje indicado cómo calcularía las siguientes cuestiones:

(En este ejercicio no se le pide realizar cálculos, tan sólo plantear y/o expresar adecuadamente lo requerido en cada apartado; por ello *preste especial atención en indicar claramente los límites de integración y dominio de las funciones de densidad en cada caso; ¡no hacerlo significará no haber respondido a la pregunta!*)

(a) Dibuje el soporte de $f_{XY}(x, y)$.

(b) ¿Cómo verificaría que $f_{XY}(x, y)$ es función de densidad?

1. Primero integrando respecto de y y después respecto de x
2. Primero integrando respecto de x y después respecto de y

- (c) Las funciones de densidad marginales de X y Y , especificando explícitamente sus soportes (dominio de cada función de densidad).
- (d) ¿Cómo verificaría si X e Y son independientes o no?
- (e) La Varianza de X
- (f) La esperanza de Y condicionada a $X = x$.
- (g) Cual sería la expresión exacta de la anterior esperanza condicional en el caso de ser una función lineal de x .
- (h) $P(Y > d | X = 0.5)$, donde $-1 \leq d \leq 1$.
- (i) $P(Y > d | X > 0.5)$, donde $-1 \leq d \leq 1$.

A resolver en clase

EJERCICIO 55. Un inversor desea saber si le intreresa invertir en bolsa. Este inversor sabe que la ley de probabilidades conjunta de las rentabilidades del IBEX35 (X) y del tipo de interés de los bonos a un año (Y) es

$$P_{XY}(x, y) = k(1 - XY);$$

donde $x \in \{-1, 0, 1\}$ es una variable que toma el valor -1 si la rentabilidad es negativa (pérdidas), 0 si la rentabilidad es nula y 1 hay rentabilidades positivas; y por otra parte $y \in \{-1, 0, 1\}$ es una variable que vale -1 si hay una bajada de tipos de interés, 0 si los tipos se mantienen y 1 si los tipos suben

- (a) Encuentre el valor de k para que $P_{XY}(x, y)$ sea una función de cuantía.
- (b) Calcular la rentabilidad esperada independientemente de lo que ocurra con los tipos de interés.
- (c) Calcule la rentabilidad esperada si el tipo de interés cae.
- (d) Calcule el coeficiente de correlación
- (e) Si definimos la prima al riesgo del mercado como el diferencial de rentabilidad respecto a los tipos: $Z = X - Y$, calcule la prima esperada.
- (f) Si definimos la prima al riesgo del mercado como el diferencial de rentabilidad respecto a los tipos: $Z = X - Y$, calcule la prima esperada en un escenario de bajada de tipos de interés.
- (g) Calcule el valor de a y b tales que

$$E_{Y|X}(Y | x) \approx a + bx$$

EJERCICIO 56. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} ky^2 & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

- (a) Dibuje el soporte y calcule el valor de k
- (b) Calcule $\text{Var}(Y)$
- (c) Calcule $E_{X|Y}(X | y)$
- (d) Empleando el T^a de las esperanzas iteradas, calcule $E(X)$; es decir, emplee la propiedad de que *la esperanza de la esperanza condicional es la esperanza incondicional*
- (e) Obtenga la expresión general $E(X^r Y^s)$ (donde r y s son números enteros positivos).
- (f) Empleando la expresión obtenida en el apartado anterior calcule $\text{Corr}(X, Y)$ (tendrá que sustituir r y s por los números enteros que necesite para cada momento calculado, por ejemplo $E(XY) = E(X^1 Y^1)$, es decir $r = 1$ y $s = 1$).
- (g) Calcule $P(2X > Y | Y < 1/2)$

11. Transformación de variables

↑ Transformación de una v.a. unidimensional 70

Sea X con $f_x(x)$ sobre \mathbb{R}_x .
 Sea la función $h(\cdot)$ continua, diferenciable (y monótona^a)
 Deseamos conocer la distribución de la v.a. definida como

$$Y = h(X)$$

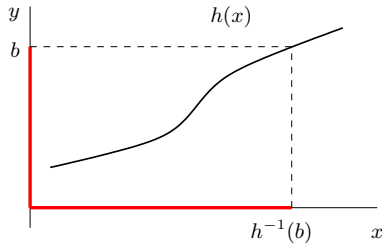
^asi no es monótona, el problema es muy similar pero ligeramente más complejo (Papoulis, 1991, cap. 5)

↑ Transformación de una v.a. unidimensional 71

Sea $Y = h(X)$; entonces

$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = P(h(X) \leq b)$$

si $h(\cdot)$ es monótona creciente, y aplicando $h(\cdot)^{-1}$;

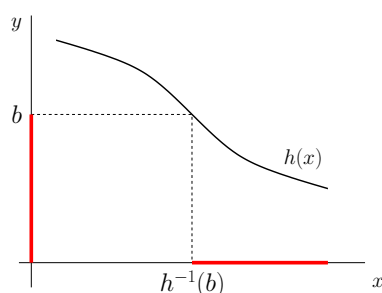
$$F_Y(b) = P(X \leq h^{-1}(b)) = F_X(h^{-1}(b))$$


↑ Transformación de una v.a. unidimensional 72

Sea $Y = h(X)$; entonces

$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = P(h(X) \leq b)$$

si $h(\cdot)$ es monótona decreciente, y aplicando $h(\cdot)^{-1}$;

$$F_Y(b) = P(X \geq h^{-1}(b)) = 1 - P(X \leq h^{-1}(b)) = 1 - F_X(h^{-1}(b))$$


↑ Transformación de una v.a. unidimensional 73

Si $h(\cdot)$ es creciente la función de densidad de la v.a. transformada es

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = f_Y(y) = \frac{dF_X(h^{-1}(y))}{dy} = f_X(h^{-1}(y)) \cdot \frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

y si $h(\cdot)$ es decreciente

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = f_Y(y) = -\frac{d(1 - F_X(h^{-1}(y)))}{dy} = -f_X(h^{-1}(y)) \cdot \frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

En general

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

nota: en Novales (1997) se sustituye $h^{-1}(y)$ por x .



Transformación de una v.a.: ejemplo

74

Sea $f_X(x) = 1$ en el intervalo $x \in (0, 1)$ y cero en el resto.

Sea $Y = 3X - 1$; entonces

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(3X - 1 \leq y) = P(X \leq \frac{y+1}{3}) \\ &= F_X\left(\frac{y+1}{3}\right); \end{aligned}$$

y por tanto

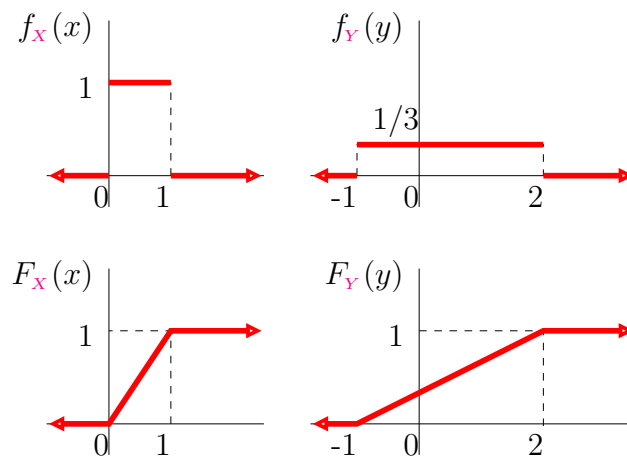
$$f_Y(y) = \frac{dF_X(h^{-1}(y))}{dy} = f_X(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| = 1 \cdot \frac{1}{3}$$

en el intervalo $y \in (h(0), h(1)) = (-1, 2)$, y cero en el resto.



Transformación de una v.a.: ejemplo

75



Esp. condicional como función de regresión o como v.a.: utilidad

76

- El BCE desea conocer la probabilidad de que la inflación, π supere el 2%.
- El BCE sabe que la inflación depende del nivel de los tipos de interés o del volumen de ALPs.



Esp. condicional como función de regresión o como v.a.: utilidad

77

El BCE puede fijarse en lo siguiente

1. Calcular $P(\pi > 0.02)$
 - (cálculo pobre, poca información en la distribución marginal)
2. Puede intentar emplear la función de distribución condicional
 - (pero necesita la función de densidad conjunta que en general es desconocida)
3. Puede emplear la aproximación lineal a la esperanza condicional (solo necesita estimar algunos parámetros)
 - Pero le dá valores para un nivel de ALP dado (que en general es desconocido)
4. Puede (alternativamente) calcular $P(\mathbf{E}(\pi | ALP) > 0.02)$
 - Necesito suponer alguna dist. sobre ALP y el tipo funcional de $\mathbf{E}_{\pi|ALP}(\pi | alp)$. (generalmente supondremos linealidad)

↑	Fun. de densidad de la esperanza condicional: suponiendo linealidad	78
Supongamos que $E_{Y X}(Y x)$ es función lineal de x		
$E_{Y X}(Y x) = a + bx = h(x)^a;$		
entonces la función de densidad de $E(Y X) = h(X)$ es		
$f_{E(Y X)}(y) = \left \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right \cdot f_X(h^{-1}(y)) = \left \frac{1}{b} \right \cdot f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$		
ya que de $y = a + bx$ se deduce que $x = \frac{y-a}{b}$.		
^a por lo que $h^{-1}(y) = \frac{y-a}{b}$		

EJERCICIO 57. Continuación del **EJERCICIO 53** en la página 40:

- Calcular la función de densidad de $E(Y|X)$
- Comprobar que $f_{E(Y|X)}(y)$ es función de densidad.
- Calcular $P(E(Y|X) > 2)$, y comprobar que es distinta de $P(Y > 2)$.
- Comprobar $E(E(Y|X)) = E(Y)$
- Comprobar que $\text{Var}(Y) \geq \text{Var}(E(Y|X))$.

A resolver en clase

EJERCICIO 58. Sea $X \sim \text{Uniforme}(0, 1)$. Sea $Z = E(Y|X) = 2 + 3X$. Halle la función $f_Z(z)$ (explicitando su soporte \mathbb{R}_Z). Halle $E(Z)$. ¿Qué probabilidad hay de que el valor esperado de Y condicionado a X sea mayor que 3?

Pista. la función de densidad de $X \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ es $f_X(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$.

A resolver en clase

EJERCICIO 59. Sea la función de densidad bivalente

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{32} & \text{si } 0 < y < x < 4 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

- Dibuje el soporte de la distribución.
- Calcule las funciones de densidad condicionadas de X e Y .
- Calcule el valor esperado de Y .
- Calcule y represente gráficamente $E_{Y|X}(Y|x)$. Cuando $X = 2$, ¿cuál es el valor esperado de Y ? ¿Coincide con la esperanza incondicional?
- ¿Son X e Y independientes?
- A partir de qué valor de X , el valor esperado de Y condicionado a X es mayor que el valor esperado de Y incondicional.
- Calcule, por tanto, la probabilidad $P(E(Y|X) > E(Y))$.
- Calcule la función de densidad de $E(Y|X)$
- Con la nueva información verifique que $P(E(Y|X) > E(Y)) = 0.59$

↑
Transformación de una v.a. bidimensional
79

Transformación de una v.a. bidimensional Sean X e Y con $f_{XY}(x, y)$.

Y sean las variables aleatorias $U = g_1(X, Y)$ y $V = g_2(X, Y)$, con inversas $X = h_1(U, V)$ e $Y = h_2(U, V)$.
Entonces

$$f_{UV}(u, v) = |J| f_{XY}(h_1(U, V), h_2(U, V)),$$

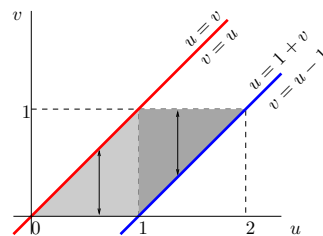
donde

$$J \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

y donde $\frac{\partial x}{\partial u} \equiv \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v} \equiv \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v}$, ...

Ejemplo 8. Sea $f_{XY}(x, y) = 4xy$; $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
Sean $U = X + Y$; $V = Y$; entonces

$$0 \leq v \leq 1, \quad 0 \leq v \leq u \leq 1 + v \leq 2.$$



Las funciones inversas son $Y = V$; $X = U - Y = U - V$. Por tanto

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad f_{UV}(u, v) = |J| f_{XY}(x, y) = 4(u - v)v;$$

donde $0 \leq v \leq 1$, y $v \leq u \leq 1 + v$.

La función de densidad de $X + Y$ es la marginal de U ; por tanto (véase la figura):

$$f_U(u) = \begin{cases} 4 \int_0^u v(u - v)dv = 4 \left[u \frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3} \right]_0^u = \frac{2}{3}u^3; & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 4 \int_{u-1}^1 v(u - v)dv = 4 \left[u \frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3} \right]_{u-1}^1 = \frac{1}{3}(12u - 2u^3 - 8); & \text{si } 1 \leq u \leq 2 \end{cases}$$

En *Novales (1997, sección 7.5)* puede encontrar, para la misma distribución conjunta, los ejemplos:

1. $U = X - Y$; $V = Y$;
2. $U = X \cdot Y$; $V = Y$;
3. $U = X/Y$; $V = Y$;

Ejemplo 9. Sean X_1 y X_2 indep \sim Exponencial (λ), es decir, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; $x > 0$.
Demostrar que $Y_1 = X_1 + X_2$ y $Y_2 = X_1/X_2$ son variables independientes:

$$T : (x_1, x_2) \longrightarrow (y_1, y_2); \quad \text{donde} \quad y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = \frac{x_1}{x_2}$$

Por tanto T^{-1} será:

$$\begin{aligned} x_2 &= y_1 - x_1; & \text{y } x_1 &= y_2 \cdot x_2 \\ x_2 &= y_1 - x_2 \cdot y_2 & & \text{sustituyendo } x_1 \\ x_2(1 + y_2) &= y_1 \\ x_2 &= \frac{y_1}{1 + y_2}; & x_1 &= \frac{y_1 y_2}{1 + y_2}, \end{aligned} \quad \text{que es } T^{-1} : (y_1, y_2) \longrightarrow (x_1, x_2)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y_2}{1+y_2} & \left(\frac{y_1}{1+y_2} - \frac{y_1 y_2}{(1+y_2)^2} \right) \\ \frac{1}{1+y_2} & -\frac{y_1}{(1+y_2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{y_1}{(1+y_2)^2}.$$

Entonces

$$f_{y_1 y_2}(y_1, y_2) = \left| -\frac{y_1}{(1+y_2)^2} \right| f_{x_1 x_2} \left(\frac{y_1 y_2}{1+y_2}, \frac{y_1}{1+y_2} \right);$$

donde $y_1, y_2 > 0$; y donde $f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2}$.

Por tanto, la función de densidad conjunta buscada es:

$$f_{y_1 y_2}(y_1, y_2) = \left[\frac{y_1}{(1+y_2)^2} \right] (\lambda^2 y_1 e^{-\lambda y_1})$$

Así pues, las distribuciones marginales son:

$$f_{y_1}(y_1) = \int_0^\infty f_{y_1 y_2}(y_1, y_2) dy_2 = \lambda^2 y_1 e^{-\lambda y_1}, \quad y_1 > 0$$

y

$$f_{y_2}(y_2) = \int_0^\infty f_{y_1 y_2}(y_1, y_2) dy_1 = \frac{y_1}{(1+y_2)^2}, \quad y_2 > 0.$$

Y puesto que $f_{y_1}(y_1) \cdot f_{y_2}(y_2) = f_{y_1 y_2}(y_1, y_2)$; Y_1 e Y_2 son independientes.

12. Distribuciones multivariantes

⬆
Distribuciones conjuntas multivariantes
80

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n); \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{\mathbf{x}}^n \equiv \mathbb{R}_{x_1} \times \dots \times \mathbb{R}_{x_n}$$

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{b}) \equiv F_{x_1, \dots, x_n}(b_1, \dots, b_n) = P(X_1 \leq b_1, X_2 \leq b_2, \dots, X_n \leq b_n)$$

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \equiv f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n)$$

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{\partial x_1 \dots \partial x_n}; \quad F_{\mathbf{x}}(b_1, \dots, b_n) = \int_{-\infty}^{b_1} \dots \int_{-\infty}^{b_n} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) dx_n \dots dx_1$$

⬆
Distribuciones marginales y marginales conjuntas
81

$$F_{x_j}(x_j) = F_{x_1, \dots, x_n}(\infty, \dots, \infty, x_j, \infty, \dots, \infty)$$

$$f_{x_j}(x_j) = \int_{\mathbb{R}_{x_1}} \dots \int_{\mathbb{R}_{x_{(j-1)}}} \int_{\mathbb{R}_{x_{(j+1)}}} \int_{\mathbb{R}_{x_n}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) dx_n \dots dx_{(j+1)} dx_{(j-1)} \dots dx_1$$

$$f_{x_2 \dots x_n}(x_2, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}_{x_1}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) dx_1$$

Distribuciones condicionales y esperanza condicional 82

Función de densidad condicionada de X_1

$$f_{X_1|X_2 \dots X_n}(x_1 | b_2 \dots b_n) = \frac{f_{\mathbf{X}}(x_1, b_2, \dots, b_n)}{f_{X_2 \dots X_n}(b_2 \dots b_n)}$$

Función de regresión de X_1 sobre $X_2 \dots X_n$

$$E_{X_1|X_2 \dots X_n}(x_1 | x_2 \dots x_n) = h(x_2, \dots, x_n)$$

Independencia 83

por tanto

$$f_{X_1|X_2 \dots X_n}(x_1 | x_2 \dots x_n) = f_{X_1}(x_1);$$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i).$$

13. Función generatriz de momentos

Función generatriz de momentos: caso univariante 84

Llamamos *función generatriz de momentos* de X a:

$$M_X(t) \equiv E(e^{tX})$$

Caso discreto

$$M(t) = \sum_{x \in \mathbb{R}_X} e^{tx} P_X(x)$$

Caso continuo

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}_X} e^{tx} f_X(x) dx$$

siempre que dicha esperanza exista para $t \in (-h, h)$, donde $h > 0$.

Función generatriz de momentos: caso univariante 85

Puesto que

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt} E(e^{tX}) = E\left(\frac{d}{dt} e^{tX}\right) = E(X e^{tX})$$

entonces

$$\left. \frac{dM(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(X)$$

Del mismo modo

$$\left. \frac{dM^2(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = E(X^2); \quad \left. \frac{dM^3(t)}{dt^3} \right|_{t=0} = E(X^3); \dots$$

Ejemplo 10. Sea $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0$ entonces

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot f_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{(t-1)x} dx = \frac{1}{t-1} e^{(t-1)x} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{t-1} = (1-t)^{-1} \end{aligned}$$

donde t debe ser **menor que uno** para que la integral esté definida.

Por lo tanto su esperanza es

$$M'_X(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \rightarrow M'_X(0) = 1 = E(X)$$

y

$$M_X''(t) = \frac{2}{(1-t)^3} \rightarrow M_X''(0) = 2 = E(X^2)$$

sí pues, su varianza es $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 1^2 = 1$.

A resolver en clase

EJERCICIO 60. La función generatriz de momentos de una Chi-cuadrado de r grados de libertad es: $M(t) = (1 - 2t)^{-r/2}$. Use su función generatriz de momentos para calcular la varianza de una Chi-cuadrado de r grados de libertad.

A resolver en clase

EJERCICIO 61. [Función generatriz de momentos de transformaciones lineales:] Sea X con $M_X(t)$, y sea $Y = aX + b$.

- (a) Demuestre que $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$.
- (b) Empleando el resultado anterior demuestre que $E(Y) = b + aE(X)$.
- (c) Sea $Z \sim N(0, 1)$, su función generatriz de momentos es

$$M_Z(t) = e^{t^2/2}$$

(véase [Novales, 1997](#), pp. 223); y sea $Y = \mu + \sigma Z$. Demuestre que

$$M_Y(t) = e^{t\mu + t^2\sigma^2/2}.$$

EJERCICIO 62. La función generatriz de momentos de una Gamma (λ, a) es $M(t) = \frac{1}{(1-\frac{1}{\lambda}t)^a}$, definida para $t < \lambda$. Demuestre que $E(X) = a/\lambda$ y que $\text{Var}(X) = a/\lambda^2$.

EJERCICIO 63. La función generatriz de momentos de una exponencial con parámetro λ es: $M_X(t) = \frac{1}{1-\lambda t}$. Demuestre que su esperanza es λ y su varianza λ^2 .

⬆
Función generatriz de momentos multivariante
86

Llamamos *función generatriz de momentos* de $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ evaluada en $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)$ a:

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = M_{\mathbf{X}}(t_1, t_2, \dots, t_N) = E(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_N X_N})$$

discreto

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \sum_{x_1 \in \mathbb{R}^{X_1}} \dots \sum_{x_N \in \mathbb{R}^{X_N}} e^{t_1 x_1 + \dots + t_N x_N} P_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N)$$

continuo

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^{X_1}} \dots \int_{\mathbb{R}^{X_N}} e^{t_1 x_1 + \dots + t_N x_N} f_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N) dx_N \dots dx_1$$

⬆
Función generatriz de momentos
87

Los momentos son

$$\frac{\partial^{r+s} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{0})}{\partial t_i^r \partial t_j^s} = E(X_i^r X_j^s)$$

La función generatriz **marginal** es

$$M_{X_j}(t_j) = M_{\mathbf{X}}(0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0)$$

Además, si (X_1, X_2, \dots, X_N) son independientes, entonces

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^N M_{X_i}(t_i)$$

⬆
Función generatriz de momentos: T^a de la unicidad
88

Teorema 13.1. Dos conjuntos de v.a., \mathbf{X} e \mathbf{Y} , tienen idéntica distribución de probabilidad, si sus funciones generatrices de momentos coinciden (siempre que éstas existan) y viceversa.

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \iff M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t})$$



Función generatriz de momentos: Suma de dos v.a. indep.

89

Sean X e Y independientes con $M_X(t)$ y $M_Y(t)$ respectivamente. Entonces $Z = X + Y$ tiene

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

Demostración

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E(e^{tX+tY}) = E(e^{tX} e^{tY}) =$$

por independencia

$$= E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

La demostración es similar para el caso de n v.a.s independientes.

EJERCICIO 64. [Suma de variables aleatorias independientes:] Sean las variables aleatorias X , Y , y Z , con funciones generatrices de momentos $M_X(t)$, $M_Y(t)$ y $M_Z(t)$ respectivamente. Demuestre que si las tres variables son independientes, la función generatriz de la suma (i.e., $W=X+Y+Z$) es igual al producto de las funciones generatrices de X , Y y Z evaluadas en t .

Proposición 13.2. Sean $\{X_1, \dots, X_N\}$ independientes con función generatriz de momentos $M_{X_i}(t)$, $i = 1, \dots, N$ respectivamente. Si $Y = \sum_{i=1}^N X_i$, entonces $M_Y(t) = \prod_{i=1}^N M_{X_i}(t)$.

Demostración. Se deja como ejercicio. □

EJERCICIO 65. La función generatriz de momentos de $Z \sim N(0, 1)$ “evaluada en t ” es: $M_Z(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$. A partir de esta información, demuestre que la función generatriz de momentos de $Y = \sigma Z + \mu$ es $e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$.

A resolver en clase

EJERCICIO 66. Sean X e Y variables aleatorias **independientes** con función generatriz de momentos $(1 - t^2)^{-1}$ (distribución de Laplace) y con **esperanza nula**.

(a) Sea $U = X + Y$. Demuestre que la función generatriz de momentos de U es $(1 - t^2)^{-2}$.

(b) Sea $V = X - Y$. Demuestre que U y V tienen idéntica distribución.

(c) Calcule la función generatriz de momentos conjunta de U y V

(d) Demuestre que U y V no son independientes

(e) No obstante, demuestre que U y V están incorreladas

Pista. recuerde que $E(X) = E(Y) = 0$, y que $E(X^2) = E(Y^2)$ puesto que ambas variables tienen idéntica distribución.

A resolver en clase

EJERCICIO 67. Sea la siguiente función de cuantía

$\frac{P_{XY}(x, y)}{x \ y}$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	1/9	3/9	2/9
$x = 1$	1/18	1/6	1/9

(a) Obtenga la función generatriz de momentos conjunta.

(b) Utilizando exclusivamente la función generatriz de momentos calculada en el ejercicio anterior obtenga la esperanza de X .

14. Preguntas y problemas

Test. Conteste a las siguientes cuestiones.

- Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $Y = 2X + 1$. Además, se tiene que la variable X sigue una distribución uniforme en el intervalo $[-1, 1]$. Se tiene que:
 - $\rho = 1$, donde ρ es el coeficiente de correlación entre X e Y .
 - $E_{Y|X}(Y|x) = E(Y)$.
 - $\text{Var}(Y|X=0) = \text{Var}(Y)$.
 - $E_{Y|X}(Y|x) = E_{X|Y}(X|y)$.
- Suponga que $E_{X|Y}(X|y) = E(X)$ para todo y , entonces necesariamente:
 - conocer el valor tomado por Y no aporta información sobre la probabilidad de los valores que puede tomar X .
 - saber que Y ha tomado un valor superior a $E(Y)$ no aporta información sobre la probabilidad de que X tome un valor superior a $E(X)$.
 - $E_{Y|X}(Y|x) = E(Y)$ para todo x .
 - $\text{Var}_{X|Y}(X|y) = \text{Var}(X)$ para todo y .

El siguiente texto es valido para las 3 siguientes preguntas:

Sea la función

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < y < 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- El valor de k que hace que $f_{XY}(x, y)$ sea función de densidad viene dado por la ecuación:
 - $\int_x^2 \int_0^2 k dy dx = 1$.
 - $\int_0^2 \int_x^2 k dy dx = 1$.
 - $\int_0^2 \int_0^2 k dy dx = 1$.
 - ninguna de las anteriores.
- Conocida una realización $X = 1$, se tiene que:
 - la realización de Y está en el intervalo $(0, 1)$.
 - para cualesquiera realizaciones, las variables X e Y son independientes.
 - $E_{Y|X}(Y|1) < E(Y)$.
 - $E_{Y|X}(Y|1) \geq E(Y)$.
- Se tiene que:
 - $P(X + Y \leq 2) = \int_0^1 \int_x^{2-x} f_{XY}(x, y) dy dx$.
 - $P(X + Y \leq 2) = \int_0^1 \int_0^1 f_{XY}(x, y) dy dx$.
 - $P(X + Y \leq 2) = \int_0^1 \int_x^2 f_{XY}(x, y) dy dx$.
 - ninguna de las anteriores.

■ fin del grupo de preguntas ■

La siguiente función se utiliza en las preguntas 6, 7, 8, 9 y 10:

Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta (para algún valor concreto de k)

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k[1 + xy(x^2 - y^2)] & \text{para } -1 < x < 1; -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en los restantes casos} \end{cases}$$

- Que valor debe tomar k para que $f_{XY}(x, y)$ sea función de densidad.
 - $k = 4$
 - $k = 1/4$
 - $k = 2$
 - $k = 1/2$
- Las funciones de densidad marginal de X y Y son
 - $f_X(x) = 1/2$; $f_Y(y) = 1/4$
 - $f_X(x) = 1/2$; $f_Y(y) = 1/2$
 - $f_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{4}$; $f_Y(y) = \frac{1}{4} + \frac{y}{4} - \frac{y^2}{2}$
 - $f_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{4}$; $f_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{y}{4} - \frac{y^2}{2}$
- La covarianza entre X e Y es
 - $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{5}$
 - $\text{Cov}(X, Y) = 0$
 - $\text{Cov}(X, Y) = 0$; y por lo tanto X e Y son independientes
 - ninguna de las anteriores
- Señale la afirmación correcta. La esperanza de Y condicionada a $X = x$ es:
 - $E_{Y|X}(Y|x) = 0$
 - $E_{Y|X}(Y|x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x$
 - $E_{Y|X}(Y|x) > E(Y)$
 - $E_{Y|X}(Y|x) < E(Y)$

10. ¿Cuál es la probabilidad de que $X + Y \geq 0$?
- (a) $5/24$ (b) $1/2$
(c) $1/4$ (d) $3/8$

■ fin del grupo de preguntas ■

La siguiente información es válida para las dos próximas preguntas:

Suponga la siguiente tabla de probabilidades de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) :

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 0$	$2/18$	$6/18$	$4/18$
$Y = 1$	$1/18$	$3/18$	$2/18$

11. De las siguientes afirmaciones:

- (i) $P_X(X = 2) = 9/18$
(ii) $P_Y(Y = 0) = 12/18$
(iii) $E(X) = 13/6$
(iv) Su coeficiente de correlación lineal es cero

Sólo son ciertas:

- (a) La (i) y la (ii) (b) Todas
(c) Todas menos la (iv) (d) Ninguna

12. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- (a) $E_{Y|X}(Y|2) = 2/3$ (b) $E_{Y|X}(Y|2) = E_{Y|X}(Y|3)$
(c) $E_{Y|X}(Y|2) > E(Y)$ (d) $E_{Y|X}(Y|2) < E(Y)$

■ fin del grupo de preguntas ■

13. Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $Y = aX^2$, donde $a > 0$ es constante y $x < 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- (a) El coeficiente de correlación lineal es 1 al ser $a > 0$.
(b) El coeficiente de correlación lineal no tiene porque ser 1, pero siempre será positivo al ser $a > 0$.
(c) El coeficiente de correlación lineal es cero debido al término cuadrático.
(d) El coeficiente de correlación lineal depende de la ley de probabilidades de X .

14. Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $Y = aX + b$ y $\text{Var}(X) > 0$, donde a y b son números fijos. Sea ρ el coeficiente de correlación poblacional entre ambas variables. Se tiene que:

- (a) $\rho = 1$ si $|a| = 1$ (b) $\rho = 1$ para cualquier a
(c) $\text{Var}(Y|X = 1) > \text{Var}(Y)$ (d) $|\rho| = 1$ si $a \neq 0$

La siguiente función se utiliza en las preguntas 15, 16 y 17:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < 2y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

15. El valor de k que hace que $f_{XY}(x, y)$ sea función de densidad viene dado por la ecuación:

(a) $\int_0^1 \int_0^{2x} f_{XY}(x, y) dy dx = 1.$

(b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^1 f_{XY}(x, y) dx dy = 1.$

(c) $\int_0^1 \int_0^{2y} f_{XY}(x, y) dy dx = 1.$

(d) ninguna de las anteriores.

16. Conocida una realización de $X = \frac{1}{2}$, se tiene que:

- (a) la realización de Y está en el intervalo $(0, \frac{1}{4})$.
(b) sabemos lo mismo sobre las posibles realizaciones de Y que si no conociéramos la realización de X .
(c) esperamos que Y haya tomado un valor inferior a $E(Y)$.
(d) esperamos que Y haya tomado un valor igual o superior a $E(Y)$.

17. Sea $a \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y $Z = X + Y$, se tiene que:

(a) $P(Z \leq a) = \int_0^{a-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_{XY}(x, y) dy dx + \int_{a-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{a-x} f_{XY}(x, y) dy dx$

(b) $P(Z \leq a) = \int_0^{a-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^a f_{XY}(x, y) dy dx + \int_{a-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{a-x} f_{XY}(x, y) dy dx$

(c) $P(Z \leq a) = \int_0^a \int_0^a f_{XY}(x, y) dy dx$

(d) ninguna de las anteriores.

18. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n \sim i.i.d$ con momentos bien definidos. Señale la afirmación correcta. Sea \hat{x} el estimador de media muestral.

- (a) La función generatriz de \hat{x} coincide con la función generatriz de momentos conjunta de X_1, X_2, \dots, X_n evaluada en $(1/n, 1/n, \dots, 1/n)$.
- (b) Si las variables aleatorias X_i tienen distribución normal, entonces necesitamos aplicar el Teorema Central del Límite para conocer la distribución asintótica de \hat{x} .
- (c) La esperanza de \hat{x} coincide con $E(X)$ sólo si las variables aleatorias X_i tienen distribución normal.
- (d) Si variables aleatorias X_i no tienen distribución normal, no podemos conocer de \hat{x} ni su distribución para muestras finitas, ni tampoco su distribución asintótica.

EJERCICIO 68. Sea X una variable aleatoria con la siguiente función generatriz de momentos $M_X(t) = \lambda(1 + t^2)$.

- (a) Calcule $E(X)$
- (b) Calcule $\text{Var}(X)$

EJERCICIO 69. Comente y/o responda brevemente las siguientes frases:

- (a) En **ningún** caso podemos concluir que dos variables aleatorias que estén incorrelacionadas sean independientes.
- (b) Tenemos dos variables X, Y . Su coeficiente de correlación lineal está muy próximo a cero. Así, concluimos que la relación entre las dos variables es prácticamente inexistente.
- (c) Dadas dos variables aleatorias X, Y . Sus momentos de primer y segundo orden existen, están bien definidos y son conocidos. La aproximación lineal a la esperanza condicional $E_{Y|X}(Y|x)$ es $a + b \cdot x$, siendo $a = E(Y) - bE(X)$ y $b = \text{Cov}(X, Y) / \sigma_X^2$. Pese a su sencillo cálculo, esta aproximación tiene el inconveniente de que **es siempre una mera aproximación** (es decir, nunca podemos garantizar que coincida con la verdadera esperanza condicional).

Lista de Transparencias

- 1 Modelo Teórico vs Mundo Real
- 2 Regularidades en el azar
- 3 Lanzamiento de dos dados
- 4 Lanzamiento de dos dados
- 5 ¿Regularidades en fenómenos económicos?
- 6 Índice NASDAQ
- 7 Tasa de Variación del Índice NASDAQ
- 8 Tasa de Variación del Índice NASDAQ
- 9 Estadística y Econometría
- 10 Probabilidad condicional
- 11 Independencia
- 12 Leyes de probabilidad conjunta y marginales
- 13 Leyes de probabilidad conjunta, marginales y condicionadas
- 14 Probabilidad conjunta y marginal
- 15 Concepto de Vble. aleatoria
- 16 Función de cuantía y función de distribución
- 17 Función de cuantía: Distribución *Bernulli*
- 18 Función de distribución: Distribución *Bernulli*
- 19 Función de densidad y función de distribución
- 20 Función de densidad
- 21 Función de densidad: Distribución *Normal (Gaussiana)*
- 22 Variables aleatorias: ¡Una gran simplificación!
- 23 Variables aleatorias: ¡Una gran simplificación!
- 24 De $(S, \mathfrak{B}, P(\cdot))$ a un modelo de probabilidad: historia en símbolos
- 25 Modelado empírico
- 26 Vector aleatorio

- 27 Vector aleatorio: función de distribución
- 28 Variables discretas: Función de cuantía conjunta
- 29 Función de cuantía: ejemplo
- 30 Función de cuantía conjunta: ejemplo
- 31 Función de cuantía: Bivariante
- 32 Función de distribución y función de cuantía conjuntas
- 33 Función de distribución: Bivariante
- 34 Variables continuas: Función de densidad conjunta
- 35 Función de densidad conjunta
- 36 Propiedades de las leyes de probabilidad bivariantes
- 37 Distribuciones conjuntas y marginales: ejemplo
- 38 Función de cuantía marginal
- 39 Distribuciones conjuntas y marginales
- 40 Distribuciones conjuntas y marginales
- 41 Distribuciones conjuntas y marginales
- 42 Funciones de cuantía condicionadas
- 43 Probabilidad conjunta, marginal y condicionada
- 44 Función de cuantía condicionada
- 45 Distribuciones de probabilidad condicionadas: Caso continuo
- 46 Distribuciones condicionadas
- 47 Independencia
- 48 Momentos conjuntos: caso discreto
- 49 Momentos conjuntos: caso continuo
- 50 Momentos teóricos bivariantes: propiedades
- 51 Covarianza
- 52 Coeficiente de correlación
- 53 Momentos condicionados: caso discreto
- 54 Momentos condicionados: caso continuo
- 55 Propiedades de la esperanza condicional
- 56 Esperanza condicional como función de x : $E_{Y|X}(Y|x)$
- 57 Esperanza condicional como v.a.: $E(Y|X)$
- 58 Varianza condicional como función de x : $\text{Var}_{Y|X}(Y|x)$
- 59 Varianza condicional como v.a.: $\text{Var}(Y|X)$
- 60 Teorema de las esperanzas iteradas
- 61 Identidad de la varianza condicional
- 62 Propiedades de la esperanza condicional estocástica
- 63 Esperanza condicional como predictor óptimo
- 64 Esperanza condicional como predictor óptimo
- 65 Aproximación lineal a la esperanza condicional: Recta de regresión
- 66 Aproximación lineal a la esperanza condicional: Recta de regresión
- 67 Aproximación lineal a la esperanza condicional: Recta de regresión
- 68 Aproximación lineal a la esperanza condicional: Recta de regresión
- 69 Aproximación lineal a la esperanza condicional: Recta de regresión
- 70 Transformación de una *v.a.* unidimensional
- 71 Transformación de una *v.a.* unidimensional
- 72 Transformación de una *v.a.* unidimensional
- 73 Transformación de una *v.a.* unidimensional
- 74 Transformación de una *v.a.*: ejemplo
- 75 Transformación de una *v.a.*: ejemplo
- 76 Esp. condicional como función de regresión o como v.a.: utilidad
- 77 Esp. condicional como función de regresión o como v.a.: utilidad
- 78 Fun. de densidad de la esperanza condicional: suponiendo linealidad
- 79 Transformación de una *v.a.* bidimensional
- 80 Distribuciones conjuntas multivariantes
- 81 Distribuciones marginales y marginales conjuntas
- 82 Distribuciones condicionales y esperanza condicional
- 83 Independencia
- 84 Función generatriz de momentos: caso univariante
- 85 Función generatriz de momentos: caso univariante
- 86 Función generatriz de momentos multivariante

- 87 Función generatriz de momentos
- 88 Función generatriz de momentos: Tª de la unicidad
- 89 Función generatriz de momentos: Suma de dos v.a. indep.
- 90 Propiedades de la esperanza
- 91 Propiedades de la varianza
- 92 $P(X = x)$: caso continuo
- 93 Partes del temario

15. Bibliografía

- Casella, G. y Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*. Duxbury Advanced Series. Duxbury, USA, segunda ed. ISBN 0-534-24312-6. 56, 60
- López Cachero, M. (1992). *Fundamentos y métodos de estadística*. Ediciones Pirámide, Madrid. ISBN 84-368-0425-2. 8
- Mittelhammer, R. C. (1996). *Mathematical Statistics for Economics and Business*. Springer-Verlag, New York, primera ed. ISBN 0-387-94587-3. 8, 57
- Novales, A. (1997). *Estadística y Econometría*. McGraw-Hill, Madrid, primera ed. ISBN 84-481-0798-5. 2, 8, 14, 29, 32, 42, 45, 48, 58, 60, 70, 71, 72
- Papoulis, A. (1991). *Probability, random variables, and stochastic processes*. Electrical & Electronic Engineering Series. McGraw-Hill, New York, tercera ed. ISBN 0-07-100870-5. 42
- Peña, D. (2001). *Fundamentos de Estadística*. Alianza Editorial, Madrid. ISBN 84-206-8696-4. 2, 8
- Peña, D. (2002). *Regresión y diseño de experimentos*. Alianza Editorial, Madrid. ISBN 84-206-8695-6. 2
- Peña, D. y Romo, J. (1997). *Introducción a la Estadística para la Ciencias Sociales*. McGraw-Hill, Madrid. ISBN 84-481-1617-8. 2
- Rao, C. R. (2002). *Linear Statistical Inference and Its Applications*. Wiley series in probability and statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, segunda ed. ISBN 0-471-21875-8. 35, 58
- Serrano, G. y Marrero, G. A. (2001). *Ejercicios de Estadística y Econometría*. Editorial AC, Madrid. ISBN 84-7288-106-7. 60
- Spanos, A. (1986). *Statistical foundations of econometric modelling*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-26912-1. 11
- Spanos, A. (1995). On theory testing in econometrics: modelling with noexperimental data. *Journal of Econometrics*, vol. 67, 189–226. 8
- Spanos, A. (1999). *Probability Theory and Statistical Inference. Econometric Modeling with Observational Data*. Cambridge University Press, Cambridge, UK. ISBN 0-521-42408-9. 3, 4, 8, 58

A. Momentos univariantes

Los momentos de una distribución se definen en función de la esperanza matemática de una función $g(X)$ de la v.a. X ; es decir, en el caso continuo

$$E(g(X)) = \int_{x \in \mathbb{R}_X} g(x) \cdot f_X(x; \theta) dx,$$

y en el caso discreto

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \mathbb{R}_X} g(x) \cdot P_X(x; \theta)$$

(una suma ponderada por la probabilidad o su distribución).

Valor esperado

Valor esperado: $g(\cdot)$ es la función identidad $g(X) = X$

caso continuo

$$E(X) = \int_{x \in \mathbb{R}_X} x \cdot f_X(x; \theta) dx$$

caso discreto

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}_X} x \cdot P_X(x; \theta)$$

El valor esperado es una medida de posición de la distribución de la v.a.

También es un **predictor** de las realizaciones de la v.a.

Ejemplo 11. *Ejemplos para distintas distribuciones:*

Bernulli:

$$E(X) = 0 \cdot P_X(0) + 1 \cdot P_X(1) = 0 \cdot (1 - \theta) + 1 \cdot \theta = \theta$$

Poisson:

$$P_X(x; \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}; \quad \theta \in \Theta = (0, \infty); \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{e^{-\theta} \theta^k}{k!} \right) = e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{(k-1)!} = \theta e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{(k-1)}}{(k-1)!} = \theta,$$

ya que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{(k-1)}}{(k-1)!} = e^{\theta}$

uniforme (continua):

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}; \quad x \in [\theta_1, \theta_2]; \quad \theta = (\theta_1, \theta_2),$$

donde $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty$.

$$E(X) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{x}{\theta_2 - \theta_1} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} x^2 \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

Normal:

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]; \quad \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx$$

y sustituyendo $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ o $x = \sigma z + \mu$, donde $\frac{dx}{dz} = \sigma$, tenemos

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma z + \mu}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] (\sigma) dx =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] dz + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] dz = 0 + \mu \cdot 1 = \mu$$

ya que por una parte

$$\int_{-\infty}^{\infty} z \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] dz = \int_{-\infty}^0 z \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] dz + \int_0^{\infty} z \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] dz = -1 + 1 = 0$$

puesto que

$$\int_{-\infty}^0 z \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] dz = -e^{-z^2/2} \Big|_{-\infty}^0 = -1 + 0 = -1$$

$$\int_0^{\infty} z \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right] dz = -e^{-z^2/2} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1,$$

y por otra, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{z^2}{2} \right]$ es la función de densidad de una v.a. $Z \sim N(0, 1)$.



Propiedades de la esperanza

90

Para X_1 y X_2 v.a. y a, b y c constantes; $E(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

E1. $E(c) = c$

E2. $E(aX_1 + bX_2) = aE(X_1) + bE(X_2)$

Por lo tanto, la aplicación *esperanza*, $E(\cdot)$, es lineal.

EJERCICIO 70. Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a. con distribución Bernulli de media θ . Calcular el valor esperado de $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

Pista. Use la propiedad E2 de la esperanza.

Varianza

$$\text{Varianza: } g(X) = [X - E(X)]^2$$

caso continuo

$$\text{Var}(X) \equiv E([X - E(X)]^2) = \int_{x \in \mathbb{R}_X} [x - \mu]^2 \cdot f_X(x; \theta) dx,$$

caso discreto

$$\text{Var}(X) \equiv E([X - E(X)]^2) = \sum_{x \in \mathbb{R}_X} [x - \mu]^2 \cdot P_X(x; \theta),$$

donde $\mu = E(X)$.

La *varianza* es una medida de dispersión alrededor del *valor esperado*.

Una expresión alternativa es $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Proposición A.1. $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E([X - E(X)]^2) \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2) \\ &= E(X^2) - E(2XE(X)) + E([E(X)]^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

(Casella y Berger, 2002, pp 61)

□

Ejemplo 12. *Ejemplos para distintas distribuciones:*

Bernulli:

$$\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2) = (0 - \theta)^2 \cdot (1 - \theta) + (1 - \theta)^2 \cdot \theta = \theta(1 - \theta)$$

Normal: Realizando la misma sustitución de antes, $x = \sigma z + \mu$, llegamos a la conclusión de que la varianza es igual al parámetro desconocido σ^2 ; es decir, $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sigma^2$ ya que:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma z + \mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] (\sigma) dz \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz \\ &= \sigma^2 + 0 + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$



Propiedades de la varianza

91

Para X_1 y X_2 v.a. *independientes*; y a , b y c constantes; $\text{Var}(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

V1. $\text{Var}(c) = 0$

V2. $\text{Var}(aX_1 + bX_2) = a^2\text{Var}(X_1) + b^2\text{Var}(X_2)$

EJERCICIO 71. Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a. con distribución Bernulli de media θ . Calcular la varianza de $Y = a + \sum_{i=1}^n X_i$.

Otras características numéricas

$$\text{Desviación típica: } Dt(X) = [\text{Var}(X)]^{1/2} = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

La desviación típica es una medida del “tamaño” de la v.a.

$$\text{Variable tipificada: } X^* \equiv \frac{X - E(X)}{Dt(X)}$$

X^* siempre tiene valor esperado igual a 0 y varianza igual a 1.

Aunque el valor esperado y la varianza són los momentos más empleados, normalmente son necesarios más momentos para determinar las principales características de la distribución de la v.a.

momentos respecto al origen de orden r Momentos respecto al origen: $g(X) = X^r$

$$E(X^r) = \int_{x \in \mathbb{R}_X} x^r \cdot f_X(x; \theta) dx \equiv a_r \equiv a_r(\theta)$$

Nota 2. al momento de orden uno, a_1 , lo denotamos por μ .

Ejemplo 13.

Bernulli:

$$a_r = E(X^r) = 0^r \cdot (1 - \theta) + 1 \cdot \theta = \theta, \quad \text{para todo } r \geq 0$$

De donde podemos deducir la varianza

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \theta - \theta^2 = \theta(1 - \theta).$$

Normal:

$$E(X^r) = \begin{cases} 0 & \text{para } r = 1, 3, 5, 7, \dots \\ [1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (r-1)] \sigma^r & \text{para } r = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Teorema A.2 (Existencia de momentos). Si $a_k \equiv E(X^k)$ existe para algún $k > 0$, entonces todos los momentos de orden s ($0 \leq s < k$) también existen; i.e.,

$$a_s = E(X^s) < \infty; \quad 0 \leq s < k.$$

Demostración. Pagina 138 de [Mittelhammer \(1996\)](#). □

El teorema de “Existencia de momentos” puede emplearse para demostrar la no existencia de algunos momentos; i.e., si $E(X^k)$ no existe, entonces tampoco $E(X^s)$ para s mayor que k .

EJERCICIO 72. Considere la siguiente función de cuantía

$$\begin{array}{c|ccc} x & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \hline P_X(x) & 1/6 & 1/6 & 4/6 \end{array}$$

- (a) Calcule los cuatro primeros momentos respecto al origen
 (b) Compárelos con los de la distribución $N(0, 1)$.

Una vez hemos llegado a este punto, podemos preguntarnos la siguiente cuestión:

Dado el conjunto de momentos: $\{a_r = E(X^r) < \infty\} \quad r = 1, 2, 3, \dots$

- (i) ¿existe la función $f_X(x) \geq 0$, tal que $a_r = \int_{x \in \mathbb{R}_X} x^r f_X(x) dx$?

(II) ¿es la función $f_X(x)$ única? i.e., ¿Si se verifica que

$$\int_{x \in \mathbb{R}_X} x^r f_X(x) dx = \int_{x \in \mathbb{R}_X} x^r g_X(x) dx$$

implica esto necesariamente que $f_X(x) = g_X(x)$?

En general la respuesta es **NO**. Es decir, ni siquiera la sucesión infinita de momentos caracteriza necesariamente a la función de densidad de probabilidad.

Sin embargo, bajo ciertas condiciones la sucesión de momentos si caracteriza a la función de densidad (para ver las condiciones necesaria y suficientes véase Spanos, 1999, sección 3.7.3). Uno de los casos tiene que ver con la existencia de la función generatriz de momentos.

Función generatriz de momentos

Función generatriz de momentos: $g(X) = e^{tX}$

$$E(e^{tX}) = \int_{x \in \mathbb{R}_X} e^{tx} \cdot f_X(x; \theta) dx \equiv M_X(t) \equiv M_X(t, \theta),$$

Caso discreto

$$M(t) = \sum_{x \in \mathbb{R}_X} e^{tx} P_X(x)$$

Caso continuo

$$M(t) = \int_{x \in \mathbb{R}_X} e^{tx} f_X(x) dx$$

siempre y cuando dichas esperanzas estén definidas en un intervalo $-h < t < h$, donde $h > 0$.

Ejemplo 14.

Poisson:

$$M(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \left(\frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} \right) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\theta} \left(\frac{e^t \theta}{x!} \right)^x = e^{-\theta} e^{\theta e^t} = e^{\theta(e^t - 1)}$$

puesto que $\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\theta} \left(\frac{\theta^x}{x!} \right) = e^{-\theta} e^{\theta} = 1$

Uniforme (continua):

$$M(t) = \int_a^b e^{tx} \left(\frac{1}{b-a} \right) dx = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}, \text{ para todo } t \neq 0.$$

Normal: (Rao, 2002, pp. 103)

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &= e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-t\sigma^2)^2/2\sigma^2} dy \quad \text{sustituyendo } y = x - \mu \\ &= e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} \end{aligned}$$

En Novales (1997, pp 190 y 191) se muestran ejemplos para una v.a. Binomial $B(n, p)$ y para una v.a. exponencial con parámetro $\lambda = 1$.

Las funciones generatrices de momentos son una forma compacta de especificar todos los momentos respecto al origen de la v.a.; ya que derivado sucesivamente $M(t)$ y evaluando dichas derivadas en $t = 0$ obtenemos cada uno de los momentos.

Función generatriz de momentos Puesto que

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt} E(e^{tX}) = E\left(\frac{d}{dt} e^{tX}\right) = E(Xe^{tX})$$

entonces

$$\left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0} = E(X)$$

Del mismo modo

$$\left.\frac{dM(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = E(X^2); \quad \left.\frac{dM(t)}{dt^3}\right|_{t=0} = E(X^3); \dots$$

Ejemplo 15.

Poisson: su fgm. es $M(t) = e^{\theta(e^t - 1)}$; por lo tanto

$$E(X) = \left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0} = e^{\theta(e^t - 1)} \theta e^t \Big|_{t=0} = \theta$$

$$E(X^2) = \left.\frac{dM(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = e^{\theta(e^t - 1)} \theta e^t + e^{\theta(e^t - 1)} \theta^2 e^{2t} \Big|_{t=0} = \theta^2 + \theta.$$

Así pues, podemos calcular $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \theta$

Normal: su fgm. es $M(t) = e^{t\mu + t^2\sigma^2/2}$; por lo tanto

$$\frac{dM(t)}{dt} = (\mu + t\sigma^2) \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\}$$

$$\frac{dM(t)}{dt^2} = (\mu + t\sigma^2)^2 \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\} + \sigma^2 \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t\right\}$$

Por tanto:

$$E(X) = \left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0} = \mu$$

$$E(X^2) = \left.\frac{dM(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sigma^2$$

Proposición A.3. Sea X con $M_X(t)$, y sea $Y = aX + b$; Entonces

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at).$$

Demostración. (para el caso continuo)⁵

$$M_Y(t) = E(e^{Yt}) = \int_{x \in \mathbb{R}_X} e^{(aX+b)t} f_X(x) dx = e^{bt} \int_{x \in \mathbb{R}_X} e^{(aX)t} f_X(x) dx = e^{bt} M_X(at).$$

□

Función generatriz de momentos

Teorema A.4. Dos v.a., X e Y , (con $M_X(t)$ y $M_Y(t)$ definidas) tienen idéntica distribución de probabilidad si y sólo si sus funciones generatrices de momentos coinciden

$$f_X(x) = f_Y(y) \iff M_X(t) = M_Y(t)$$

⁵El caso discreto es similar y se deja como ejercicio

Momentos respecto a la esperanza (orden r)Momentos respecto a la esperanza: $g(X) = [X - E(X)]^r$

$$E([X - E(X)]^r) = \int_{x \in \mathbb{R}_X} (x - \mu)^r \cdot f_X(x; \theta) dx \equiv \mu_r$$

EJERCICIO 73. (Serrano y Marrero, 2001, Ej. 2.1) El tiempo X de funcionamiento en horas hasta la primera avería de cierto modelo de lavavajillas, sigue una distribución normal con esperanza 20000 horas. Se sabe que el 20% de los aparatos tiene, como mínimo, una duración de 21680 horas. Con esta información:

- Calcule $P(|X - 20000| < 1680)$.
- Si se quiere ofrecer un periodo de garantía, expresado en horas, ¿Cuál debe ser el máximo valor que se debe dar a éste para tener que reemplazar sólo el 5% de los aparatos?

EJERCICIO 74. (Novales, 1997, Ej. 6.3) ¿Cuál es la mediana, y cuáles son los cuartiles de una distribución uniforme sobre el intervalo $[a, b]$?

B. Demostraciones

⬆
P($X = x$): caso continuo
92

Puesto que $\{X = x\} \subset \{x - \epsilon < X \leq x\}$ para cualquier $\epsilon > 0$, entonces

$$P(X = x) \leq P(x - \epsilon < X \leq x) = F_X(x) - F_X(x - \epsilon)$$

para cualquier $\epsilon > 0$. Por tanto

$$0 \leq P(X = x) \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} [F_X(x) - F_X(x - \epsilon)] = 0$$

por continuidad de $F_X(x)$.
(Casella y Berger, 2002, pp. 35)

Proposición B.1 ($\rho 3$). $\text{Corr}(X, Y) = +1$ si y sólo si $Y = a + bX$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. Empezaremos por

$$\text{Corr}(X, Y) = \pm 1 \implies Y = a + bX, \quad \text{para } b > 0.$$

Debido a las propiedades del operador $E(\cdot)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E([a + bX - E(a + bX)][X - E(X)]) \\ &= bE([X - E(X)][X - E(X)]) \\ &= b\text{Var}(X). \end{aligned}$$

Y puesto que $\text{Var}(Y) = b^2\text{Var}(X)$, sustituyendo en la expresión del coeficiente de correlación tenemos

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{b\text{Var}(X)}{\sqrt{b^2\text{Var}(X)\text{Var}(X)}} = 1$$

(si $b < 0$ la correlación sería -1).

La demostración de la implicación inversa

$$\text{Corr}(X, Y) = \pm 1 \iff Y = a + bX, \quad \text{para } b > 0$$

es algo más complicada.

Supongamos que $\text{Corr}(X, Y) = 1$ (el caso $\text{Corr}(X, Y) = -1$ tiene una demostración similar); y definamos las variables tipificadas

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}, \quad Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(Y)}}.$$

Podemos deducir que

$$E([X^* - Y^*]^2) = \text{Var}(X^*) + \text{Var}(Y^*) - 2E(X^*Y^*) = 2 - 2 = 0.$$

Esto implica⁶ que $P(s : X^*(s) \neq Y^*(s)) = 0$, para todo $s \in \mathfrak{B}$, es decir:

$$P(s : X^*(s) = Y^*(s)) = 1, s \in \mathfrak{B} \quad \text{o lo que es lo mismo } X^* = Y^* \text{ con probabilidad uno.}$$

Sustituyendo las variables tipificadas por las variables originales tenemos

$$Y = E(Y) + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - E(X)) \quad \text{con probabilidad uno;}$$

es decir, hay una relación lineal, donde $b = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ y $a = E(Y) - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} E(X)$, con probabilidad uno. \square

Partes del temario

- Tema 1 [IntEctr-T01](#)
- Tema 2 [IntEctr-T02](#)
- Tema 3 [IntEctr-T03](#)
- Tema 4 [IntEctr-T04](#)
- Tema 5 [IntEctr-T05](#)
- Tema 6 [IntEctr-T06](#)
- Tema 7 [IntEctr-T07](#)

⁶nótese que $E([X^* - Y^*]^2)$ es la suma de las discrepancias al cuadrado multiplicadas por su probabilidad, i.e., $E([X^* - Y^*]^2) = \sum ((x^* - y^*)^2 P_{X^*Y^*}(x^*, y^*))$; por lo tanto, o no hay discrepancias entre X e Y ($x^* = y^*$), o cuando las hay, la probabilidad de que ocurran es cero ($P(X^* = x^*, Y^* = y^* | x^* = y^*) = 0$)

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 3. *Experimento aleatorio, \mathcal{E} :* Lanzamiento de una moneda dos veces.

Sucesos de interés: ambos lanzamientos con mismo resultado.

Ley de probabilidad (con la moneda trucada, ie. $P(\ominus) = 3/4$):

$$P(\cdot) = \begin{cases} \text{para } \emptyset & 0 \\ \text{para } S & 1 \\ \text{para } \{(\ominus, \ominus)\}, & 9/16 \\ \text{para } \{(\star, \star)\}, & 1/16 \\ \text{para } \{(\ominus, \star), (\star, \ominus)\}, & 6/16 \\ \text{para } \{(\ominus, \ominus), (\star, \star)\}, & 10/16 \\ \text{para } \{(\ominus, \ominus), (\ominus, \star), (\star, \ominus)\}, & 15/16 \\ \text{para } \{(\ominus, \star), (\star, \ominus), (\star, \star)\} & 7/16 \end{cases}$$

Ejercicio 3

Ejercicio 4. Puesto que son independientes

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

y multiplicando a derecha e izquierda por $P(B)$ tenemos

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) && \text{por def. de probab. condicionada} \\ P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) && \text{multiplicando por } P(B) \\ \frac{P(A \cap B)}{P(A)} &= P(B) && \text{dividiendo por } P(A) \\ P(B|A) &= P(B) && \text{por def. de probab. condicionada} \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Ejercicio 6(a)

$$\int_0^6 f_X(x) dx = \int_0^6 \frac{1}{72} x^2 dx = \frac{1}{72} \frac{x^3}{3} \Big|_0^6 = \frac{1}{72} \frac{216}{3} = 1$$

□

Ejercicio 6(b)

$$P(X > 3) = \int_3^6 f_X(x) dx = \int_3^6 \frac{1}{72} x^2 dx = \frac{1}{72} \frac{x^3}{3} \Big|_3^6 = \frac{7}{8}$$

□

Ejercicio 6(c)

$$P(X > 5) = \int_5^6 f_X(x) dx = \int_5^6 \frac{1}{72} x^2 dx = \frac{1}{72} \frac{x^3}{3} \Big|_5^6 = \frac{91}{216} = 0.421$$

□

Ejercicio 6(d)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{91/216}{7/8} = \frac{13}{27} = 0.481$$

Por tanto, saber que X es mayor que 3 aumenta la probabilidad (condicionada a este hecho) de que $X > 5$.

□

Ejercicio 7. La función de distribución es

$$F_x(a) = \begin{cases} 0 & \text{para } a < 0 \\ \int_0^a f_x(x) dx = \frac{1}{72} \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{72} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{216} & \text{para } 0 \leq a \leq 6 \\ 1 & \text{para } a > 6 \end{cases}$$

Ejercicio 7

Ejercicio 9(a)

$y \backslash x$	0	1	2
0	$c \times 0$	$c \times 2$	$c \times 4$
1	$c \times 1$	$c \times 3$	$c \times 5$
2	$c \times 2$	$c \times 4$	$c \times 6$
3	$c \times 3$	$c \times 5$	$c \times 7$

la suma de las probabilidades de todas las casilla debe ser 1; por tanto $42c = 1$; es decir $c = \frac{1}{42}$. Así pues, la función de cuantía conjunta es:

$y \backslash x$	0	1	2
0	0/42	2/42	4/42
1	1/42	3/42	5/42
2	2/42	4/42	6/42
3	3/42	5/42	7/42

□

Ejercicio 9(b) Corresponde a la casilla última de la segunda fila, es decir, 5/42.

□

Ejercicio 9(c) Los casos que cumplen la condición son

$y \backslash x$	0	1	2
0	0/42	2/42	4/42
1	1/42	3/42	5/42
2	2/42	4/42	6/42
3	3/42	5/42	7/42

cuya probabilidad suma 24/42.

□

Ejercicio 9(d)

$y \backslash x$	0	1	2
0	0/42	2/42	4/42
1	1/42	3/42	5/42
2	2/42	4/42	6/42
3	3/42	5/42	7/42

cuya probabilidad suma 3/42.

□

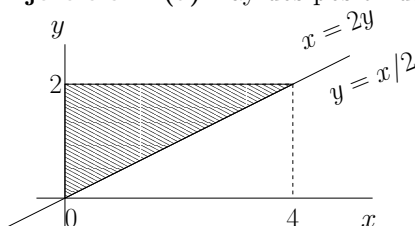
Ejercicio 9(e)

$y \backslash x$	0	1	2
0	0/42	2/42	4/42
1	1/42	3/42	5/42
2	2/42	4/42	6/42
3	3/42	5/42	7/42

cuya probabilidad suma 24/42.

□

Ejercicio 12(a) Hay dos posibilidades para resolverlo



1.

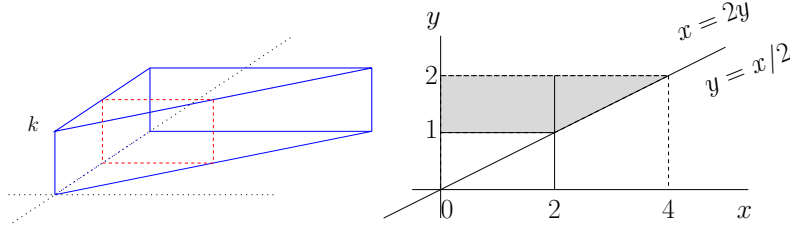
$$1 = \int_0^2 \int_0^{2y} k \, dx \, dy = 2k \int_0^2 y \, dy = 4 * k \Rightarrow \left[k = \frac{1}{4} \right]$$

2.

$$1 = \int_0^4 \int_{x/2}^2 k \, dy \, dx = \frac{k \int_0^4 x \, dx}{2} = 4 * k \Rightarrow \left[k = \frac{1}{4} \right]$$

□

Ejercicio 12(b) De nuevo hay dos posibilidades



1.

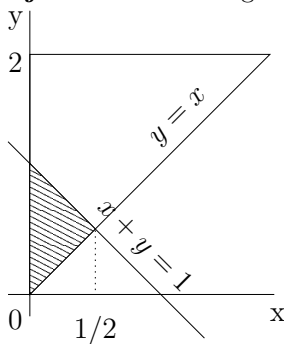
$$P(Y > 1) = \int_1^2 \int_0^{2y} \frac{1}{4} \, dx \, dy = \frac{\int_1^2 y \, dy}{2} = \frac{3}{4}$$

2.

$$P(Y > 1) = \int_0^2 \int_1^2 \frac{1}{4} \, dy \, dx + \int_2^4 \int_{x/2}^2 \frac{1}{4} \, dy \, dx = \frac{\int_2^4 2 - \frac{x}{2} \, dx}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

□

Ejercicio 13. La región que cumple la condición es

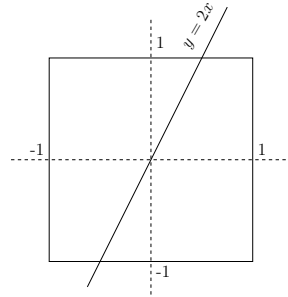


Por tanto: $P(X + Y \leq 1) = \int_0^{1/2} \int_x^{1-x} k \, dy \, dx$

Ejercicio 13

Ejercicio 14(a) Puesto que el área del soporte es 4, y la función de densidad es **uniforme**; para que $f_{XY}(x, y)$ sea una función de densidad k (la altura) debe ser igual a $1/4$.

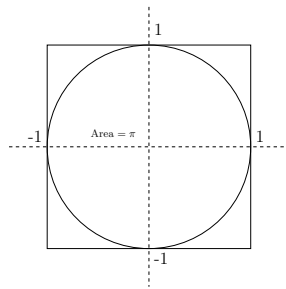
El suceso $2X - Y > 0$ divide el espacio de sucesos (el cuadrado de la figura) en dos áreas iguales; y como la distribución es uniforme, cada una de ellas tiene probabilidad igual a $1/2$



□

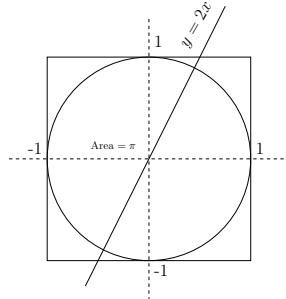
Ejercicio 14(b) La probabilidad de $X^2 + Y^2 < 1$ es igual al volumen del cilindro con base de área $\pi \times 1^2 = \pi$ y altura $1/4$, es decir,

$$P(X^2 + Y^2 < 1) = \text{base} \times \text{altura} = \frac{\pi}{4}$$



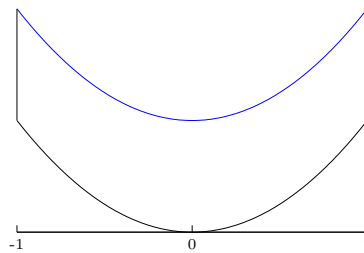
□

Ejercicio 14(c) Por el mismo argumento, la probabilidad del suceso conjunto $X^2 + Y^2 < 1$ y $2X - Y > 0$ es la mitad de la probabilidad del suceso $X^2 + Y^2 < 1$; por lo tanto igual a $\frac{\pi}{8}$.



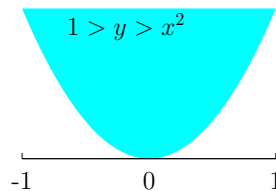
□

Ejercicio 15.



Ejercicio 15

Ejercicio 16.



Ejercicio 16

Ejercicio 17.

$y \backslash x$	0	1	2	$P_Y(y)$
0	0/42	2/42	4/42	6/42
1	1/42	3/42	5/42	9/42
2	2/42	4/42	6/42	12/42
3	3/42	5/42	7/42	15/42
$P_X(x)$	6/42	14/42	22/42	

Ejercicio 17

Ejercicio 18.

$$f_X(x) = \int_{x/2}^2 f_{XY}(x, y) dy = \frac{2-x}{4} \quad \text{para } 0 < x < 4$$

$$f_Y(y) = \int_0^{2y} f_{XY}(x, y) dx = \frac{y}{2} \quad \text{para } 0 < y < 2$$

Ejercicio 18

Ejercicio 19.

$$f_X(x) = \int_0^\infty e^{-x-y} dy = e^{-x}$$

y

$$f_Y(y) = \int_0^\infty e^{-x-y} dx = e^{-y}.$$

Ejercicio 19

Ejercicio 20(a) Tenemos que $\sum \sum k(3-x+y) = 48k$, por lo que $k = 1/48$. □

Ejercicio 20(b)

$Y \setminus X$	0	1	2	3
0	3/48	2/48	1/48	0
1	4/48	3/48	2/48	1/48
2	5/48	4/48	3/48	2/48
3	6/48	5/48	4/48	3/48

que como se puede comprobar suma 1. □

Ejercicio 20(c) Las leyes de probabilidad marginales de X e Y vienen dadas por:

$$P_X(x) \equiv \sum_{y_j \in \mathbb{R}_Y} P_{XY}(x, y_j) = \sum_{y_j=0}^3 P_{XY}(x, y_j) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}_X$$

$$P_Y(y) \equiv \sum_{x_j \in \mathbb{R}_X} P_{XY}(x_j, y) = \sum_{x_j=0}^3 P_{XY}(x_j, y) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}_Y$$

es decir,

X	0	1	2	3
$P_X(x)$	18/48	14/48	10/48	6/48
Y	0	1	2	3
$P_Y(y)$	6/48	10/48	14/48	18/48

Por lo tanto,

- $P(\text{caer}) = P_Y(0) = 0.125$
- $P(\text{mantener}) = P_Y(1) = 0.208$
- $P(\text{subir}) = P_Y(2) + P_Y(3) = 0.667$;

Es más probable que suban. Esta probabilidad está calculada sobre la base de las leyes de probabilidad marginales de Y . Esto es, no tenemos ninguna información precisa acerca de la realización de la variable aleatoria X . Dicha información nos podría ayudar a ser más precisos en el cálculo de estas probabilidades. □

Ejercicio 20(d) Las leyes de probabilidad condicionadas están resumidas en la siguiente tabla. Nótese que tenemos 4 posibles variables aleatorias, una para cada posible valor de X . Para cada una de estas v.a. tenemos una ley de probabilidad condicionada.

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
	$P_{Y X}(y 0)$	$P_{Y X}(y 1)$	$P_{Y X}(y 2)$	$P_{Y X}(y 3)$
$Y=0$	3/18	2/14	1/10	0
$Y=1$	4/18	3/14	2/10	1/6
$Y=2$	5/18	4/14	3/10	2/6
$Y=3$	6/18	5/14	4/10	3/6

Usando la ley de probabilidades apropiada en cada caso:

Si $X = 0$:

- $P(\text{caer} | X = 0) = P_{Y|X}(0 | 0) = 0.167$
- $P(\text{mantener} | X = 0) = P_{Y|X}(1 | 0) = 0.222$
- $P(\text{subir} | X = 0) = P_{Y|X}(2 | 0) + P_{Y|X}(3 | 0) = 0.611$

Si $X = 1$:

- $P(\text{caer} | X = 1) = P_{Y|X}(0 | 1) = 0.143$
- $P(\text{mantener} | X = 1) = P_{Y|X}(1 | 1) = 0.214$

$$\blacksquare P(\text{subir} \mid X = 1) = P_{Y|X}(2 \mid 1) + P_{Y|X}(3 \mid 1) = 0.643$$

Si $X = 2$:

$$\blacksquare P(\text{caer} \mid X = 2) = P_{Y|X}(0 \mid 2) = 0.1$$

$$\blacksquare P(\text{mantener} \mid X = 2) = P_{Y|X}(1 \mid 2) = 0.2$$

$$\blacksquare P(\text{subir} \mid X = 2) = P_{Y|X}(2 \mid 2) + P_{Y|X}(3 \mid 2) = 0.7$$

Si $X = 3$:

$$\blacksquare P(\text{caer} \mid X = 3) = P_{Y|X}(0 \mid 3) = 0$$

$$\blacksquare P(\text{mantener} \mid X = 3) = P_{Y|X}(1 \mid 3) = 0.167$$

$$\blacksquare P(\text{subir} \mid X = 3) = P_{Y|X}(2 \mid 3) + P_{Y|X}(3 \mid 3) = 0.833$$

Las probabilidades han cambiado. Esto nos indica que las variables son dependientes. Nueva información sobre X hace cambiar las leyes de probabilidad sobre los ingresos. \square

Ejercicio 20(e) La probabilidad de que los ingresos suban aumenta a medida que el gasto en publicidad es mayor

$$P(\text{subir} \mid X = 0) < P(\text{subir} \mid X = 1) < P(\text{subir} \mid X = 2) < P(\text{subir} \mid X = 3).$$

Mientras que la probabilidad de que los ingresos caigan crece cuanto menor son los gastos en publicidad.

$$P(\text{caer} \mid X = 0) > P(\text{caer} \mid X = 1) > P(\text{caer} \mid X = 2) > P(\text{caer} \mid X = 3).$$

Así pues, podemos sospechar que la relación entre X e Y es positiva; es decir, cuando mayor es X , mayor es la probabilidad de tener valores altos en Y y viceversa. \square

Ejercicio 20(f) Reescribimos las probabilidades de Z en términos de una relación entre X e Y . De este modo podemos usar la información suministrada por la ley de probabilidad conjunta, que sí es conocida. Así

$$\begin{aligned} P(Z > 0) &= P(Y > X) \\ &= P_{XY}(0, 1) + P_{XY}(0, 2) + \dots + P_{XY}(2, 3) \\ &= 28/48 = 0.583 \end{aligned}$$

Nótese que la diagonal principal muestra el caso en que $X = y$, o sea $Z = 0$. Lo que está por debajo de la diagonal principal son los casos en que $Y > X$ ($Z > 0$) y por encima de la diagonal principal los casos en que $Y < X$ ($Z < 0$). De manera análoga:

$$P(Z = 0) = P(Y = X) = 12/48 = 0.250; \quad P(Z < 0) = P(Y < X) = 8/48 = 0.167.$$

\square

Ejercicio 20(g) Tenemos que reescribir estas probabilidades en términos de las leyes de probabilidad condicionadas:

Si $X = 0$:

$$\begin{aligned} P(Z > 0 \mid X = 0) &= P(Y - X > 0 \mid X = 0) \\ &= P_{Y|X}(1 \mid 0) + P_{Y|X}(2 \mid 0) + P_{Y|X}(3 \mid 0) \\ &= 15/18 = 0.833 \end{aligned}$$

$$P(Z = 0 \mid X = 0) = 3/18 = 167$$

De manera análoga lo haríamos para los demás posibles valores de X .

A lo largo de todo el problema la clave ha estado en identificar correctamente la variable aleatoria (marginal, condicionada o conjunta) sobre la que nos estamos preguntando y usar en cada momento la ley de probabilidades asociada a ella. \square

Ejercicio 21. Por una parte

$$P(0.2 \leq X \leq 0.4 \mid Y < 0.5) = \frac{P(0.2 \leq X \leq 0.4) \cap P(Y < 0.5)}{P(Y < 0.5)}.$$

Por otra

$$f_Y(y) = \int_y^1 2(x + y) dx = 1 + 2y - 3y^2;$$

por tanto

$$P(Y < 0.5) = \int_0^{0.5} 1 + 2y - 3y^2 dy = 0.625,$$

y

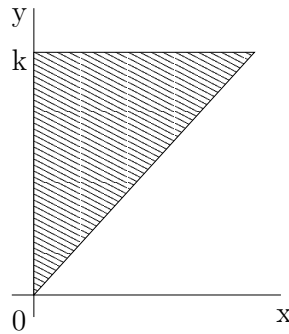
$$P(0.2 \leq X \leq 0.4) \cap P(Y < 0.5) = \int_{0.2}^{0.4} \int_0^x 2(x+y) dy dx = 0.056.$$

Así pues,

$$P(0.2 \leq X \leq 0.4 \mid Y < 0.5) = \frac{0.056}{0.625} = 0.0896.$$

Ejercicio 21

Ejercicio 22(a) El soporte es



Por ser la distribución uniforme sobre el soporte triangular, la doble integral coincide con el volumen del “quesito” sobre dicho soporte, que debe ser igual a uno. El volumen es igual en este caso (distribución uniforme) a la superficie del triángulo multiplicada por la altura de la función, que es 2. Por tanto $\text{superficie} \times \text{altura} = \text{superficie} \times 2 = 1$ de donde sabemos que la superficie es $1/2$. Puesto que la superficie de un triángulo es base por altura dividido por dos. Y en este caso base y altura son iguales a k , necesariamente $k = 1$.

Otra forma de calcular más general es

$$\begin{aligned} \int_0^k \int_x^k 2dy dx &= \int_0^k [2y]_x^k = \int_0^k 2k - 2x dx = \\ &= [2kx - x^2]_0^k = 2k^2 - k^2 = k^2 = 1 \end{aligned}$$

de donde $k = 1$.

□

Ejercicio 22(b)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^1 2dy = 2(1-x); \text{ para } x \in [0, 1] \\ f_Y(y) &= \int_0^y 2dx = 2y; \text{ para } y \in [0, 1] \end{aligned}$$

□

Ejercicio 22(c)

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|b) &= \frac{f_{XY}(x,b)}{f_Y(b)} = \frac{1}{b}; \text{ para } 0 \leq x \leq b \\ f_{Y|X}(y|a) &= \frac{f_{XY}(a,y)}{f_X(a)} = \frac{1}{1-a}; \text{ para } a \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 22(d)

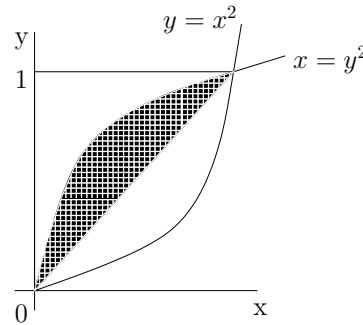
$$P\left(Y > \frac{1}{2} \mid X = a\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq \frac{1}{2} \\ \int_{1/2}^1 f_{Y|X}(y|a) dy = \int_{1/2}^1 \frac{1}{1-a} dy = \frac{0.5}{1-a} & \text{si } a < \frac{1}{2} \end{cases}$$

□

Ejercicio 22(e)

$$P\left(X > \frac{1}{2} \mid Y = b\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \leq \frac{1}{2} \\ \int_{1/2}^b f_{X|Y}(x|b) dx = \int_{1/2}^b \frac{1}{b} dx = 1 - \frac{1}{2b} & \text{si } b > \frac{1}{2} \end{cases}$$

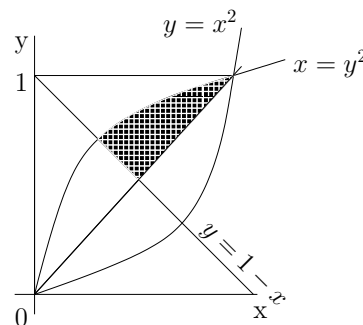
□

Ejercicio 22(f) El área a integrar es

es decir

$$\begin{aligned} P(Y > X^2, X > Y^2) &= \int_0^1 \int_{y^2}^y 2 dx dy = \int_0^1 [2x]_{y^2}^y dy = \\ &= \int_0^1 2y - 2y^2 dy = \left[y^2 - \frac{2y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

□

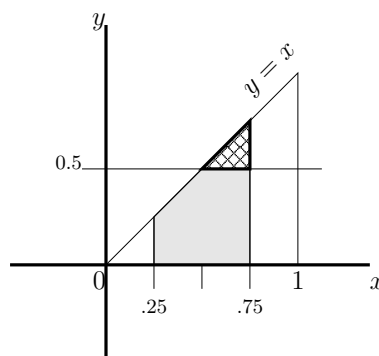
Ejercicio 22(g) El área a integrar es

que es exactamente la mitad del área anterior, por lo tanto, la probabilidad es exactamente la mitad de la calculada en el apartado anterior.

Si la función de densidad no fuera uniforme, la mitad del área no implicaría necesariamente mitad de la probabilidad, ya que habría regiones con mayor densidad de probabilidad que otras.

□

Ejercicio 23. Hay varias posibles respuestas dependiendo del orden en que se integran las variables. Aquí presentamos dos posibles respuestas



1. La probabilidad condicionada $P(Y > 0.5 | X \in (0.25, 0.75))$ es

$$\frac{\int_{0.5}^{0.75} \int_y^{0.75} f_{XY}(x, y) dx dy}{\int_{0.25}^{0.75} \int_0^x f_{XY}(x, y) dy dx} = \frac{\int_{0.5}^{0.75} \int_y^{0.75} f_{XY}(x, y) dx dy}{\int_{0.25}^{0.75} f_X(x) dx}$$

donde la función de densidad marginal de X es $f_X(x) = \int_0^x f_{XY}(x, y) dy$.

2. La probabilidad condicionada: $P(Y > 0.5 | X \in (0.25, 0.75))$ es

$$\frac{\int_{0.5}^{0.75} \int_{0.5}^x f_{XY}(x, y) dy dx}{\int_{0.25}^{0.75} \int_0^x f_{XY}(x, y) dy dx} = \frac{\int_{0.5}^{0.75} \int_{0.5}^x f_{XY}(x, y) dy dx}{\int_{0.25}^{0.75} f_X(x) dx}$$

donde la función de densidad marginal de X es $f_X(x) = \int_0^x f_{XY}(x, y) dy$.

Ejercicio 23

Ejercicio 24(a) $\int_0^a \int_0^a 1 dx dy = a^2 = 1$, por lo que $a = 1$. □

Ejercicio 24(b) $f_X(x) = \int_0^1 1 dy = 1$; $f_Y(y) = \int_0^1 1 dx = 1$. □

Ejercicio 24(c) Si, ya que $f_X(x) f_Y(y) = 1 = f_{XY}(x, y)$. □

Ejercicio 24(d) $f_X(x) = \int_{2x}^2 1 dy = 2(1-x)$, para x en $(0,1)$; $f_Y(y) = \int_0^{y/2} 1 dx = \frac{1}{2}y$, para y en $(0,2)$. Por tanto son distintas. La razón es que son variables aleatorias diferentes a las del apartado anterior (por ser el soporte diferente). □

Ejercicio 24(e) No, ya que en general $f_X(x) f_Y(y) = 2(1-x) \cdot \frac{1}{2}y \neq 1 = f_{XY}(x, y)$. Nótese que la condición $0 < x < \frac{y}{2}$ implica que para cada valor de y los valores de x quedan restringidos (no pueden superar el valor de $y/2$), es decir, los valores posibles para x dependen de los valores de y . □

Ejercicio 25. Salarios rígidos significa que X e Y son independientes, es decir, que

$$P_{XY}(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

para todo x e y . Puesto que las funciones de cuantía marginales son:

$$P_X(x) = \begin{cases} 6/18 & \text{si } X = -1 \\ 12/18 & \text{si } X = 1 \end{cases}, \text{ y } P_Y(y) = \begin{cases} 3/18 & \text{si } Y = -1 \\ 9/18 & \text{si } Y = 0 \\ 6/18 & \text{si } Y = 1 \end{cases}; \text{ cuyo producto coincide con la función de}$$

cuantía conjunta; **los salarios reales son rígidos**

Ejercicio 25

Ejercicio 26.

$$\int_0^1 \int_y^{y+1} x \cdot f_{XY}(x, y) dx dy.$$

o también

$$\int_0^1 \int_0^x x \cdot f_{XY}(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_{x-1}^1 x \cdot f_{XY}(x, y) dy dx.$$

Ejercicio 26

Ejercicio 27(a) Véase [Novales \(1997, pp. 241\)](#). □

Ejercicio 27(b) Puesto que $a_{20} = E(X^2)$; y que $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ (Proposición [A.1](#) en la página [56](#)); entonces

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= a_{20} - [E(X)]^2 \\ [E(X)]^2 + \text{Var}(X) &= a_{20} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 28(a)

$$\begin{aligned}
 E(X + Y) &= \iint_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} (x + y) f_{XY}(x, y) dy dx \\
 &= \iint_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} x f_{XY}(x, y) dy dx + \iint_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} y f_{XY}(x, y) dy dx \\
 &= \boxed{E(X) + E(Y)}
 \end{aligned}$$

[Repita la demostración para el caso discreto (solución en [Novales, 1997](#), Teorema 7.4)] La demostración de $E_{XY}(X - Y) = E_X(X) - E_Y(Y)$ es similar. □

Ejercicio 28(b) No hay mas que sacar la constante a de la integral (o el sumatorio) y aplicar la definición de $E(X)$. □

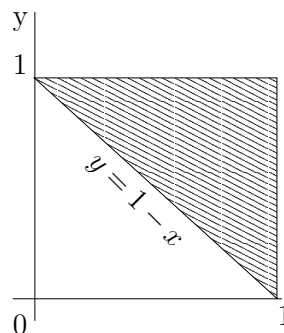
Ejercicio 28(c) Basta con recordar que independencia implica

$$f_{Y|X}(Y | x) = f_Y(y)$$

y operar oportunamente; es decir

$$\begin{aligned}
 E(X \cdot Y) &= \iint_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} x \cdot y \cdot f_{XY}(x, y) dy dx \\
 &= \iint_{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2} x \cdot y \cdot f_{Y|X}(Y | x) \cdot f_X(x) dy dx \\
 &= \int_{x \in \mathbb{R}_X} x \left[\int_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}_{XY}^2 \\ x \in \mathbb{R}_X \text{ dado}}} y f_{Y|X}(Y | x) dy \right] f_X(x) dx && \text{por ser } x f_X(x) \text{ cte. respecto de } y \\
 &= \int_{x \in \mathbb{R}_X} x \left[\int_{y \in \mathbb{R}_Y} y f_Y(y) dy \right] f_X(x) dx && \text{por independencia} \\
 &= \int_{x \in \mathbb{R}_X} x [E(Y)] f_X(x) dx && \text{por definición de esperanza de } Y \\
 &= E(Y) \cdot \int_{x \in \mathbb{R}_X} x f_X(x) dx && \text{por ser } E(Y) \text{ un número constante} \\
 &= E(Y) \cdot E(X)
 \end{aligned}$$

(para el caso discreto la demostración es similar) □

Ejercicio 29.

Sólo la primera.

Ejercicio 29

Ejercicio 31. Primero calculamos los momentos univariantes

$$E(X) = 0 \cdot (0.3) + 1 \cdot (0.3) + 2 \cdot (0.4) = 1.1$$

$$E(Y) = 0 \cdot (0.6) + 2 \cdot (0.4) = 0.8$$

$$\text{Var}(X) = [0 - 1.1]^2 \cdot (0.3) + [1 - 1.1]^2 \cdot (0.3) + [2 - 1.1]^2 \cdot (0.4) = 0.69$$

$$\text{Var}(Y) = [0 - 0.8]^2 \cdot (0.6) + [2 - 0.8]^2 \cdot (0.4) = 0.96$$

Ahora podemos calcular $\text{Cov}(X, Y)$:

$$\begin{aligned} E(XY) &= (0)(0) \cdot (0.2) + (0)(2) \cdot (0.1) + (1)(0) \cdot (0.2) + \\ &= (1)(2) \cdot (0.1) + (2)(0) \cdot (0.2) + (2)(2) \cdot (0.2) = 1 \end{aligned}$$

tenemos $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - 1.1 \cdot 0.8 = 0.12$

Ejercicio 31

Ejercicio 32. Véase el teorema 7.3 de [Novales \(1997\)](#).

Ejercicio 32

Ejercicio 33. Por una parte: $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y) = ac \sigma_{XY}$. Por otra parte: $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ y $\text{Var}(cY + d) = c^2 \text{Var}(Y)$; por lo tanto

$$\frac{\text{Cov}(aX + b, cY + d)}{\sqrt{\text{Var}(aX + b) \text{Var}(cY + d)}} = \frac{ac \sigma_{XY}}{a \sigma_X c \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \rho_{XY}$$

Ejercicio 33

Ejercicio 34. La conclusión es falsa. La correlación lineal indica el grado de relación **lineal** entre dos variables. Si el coeficiente de correlación lineal está muy próximo a cero, esto quiere decir que la relación **lineal** entre las dos variables es prácticamente inexistente. Pero esto no es óbice para que pueda existir una fuerte relación (no lineal) entre las variables.

Ejercicio 34

Ejercicio 35(a)

$X \backslash Y$	0	1	2	$P_X(x)$
0	0.12	0.16	0.12	0.40
1	0.08	0.12	0.16	0.36
2	0.04	0.08	0.12	0.24
$P_Y(y)$	0.24	0.36	0.40	

Por lo tanto,

- $P(\text{poco}) = P_X(0) = 0.40$
- $P(\text{medio}) = P_X(1) = 0.36$
- $P(\text{mucho}) = P_X(2) = 0.24$

es decir, lo más probable es vender pocas bebidas alcohólicas. □

Ejercicio 35(b) Las leyes de probabilidad condicionadas están resumidas en las columnas de la siguiente tabla.

	$P_{X Y}(x 0)$	$P_{X Y}(x 1)$	$P_{X Y}(x 2)$
$X=0$	0.500	0.44	0.300
$X=1$	0.333	0.33	0.400
$X=2$	0.167	0.22	0.300

Las probabilidades han cambiado. Esto nos indica que las variables son dependientes. Nueva información sobre X hace cambiar las leyes de probabilidad sobre las ventas de bebidas alcohólicas; no obstante, si la venta de refrescos ha sido baja ($Y=0$) sigue siendo más probable que la venta de alcohol sea baja. Sin embargo, si la venta de refrescos ha sido elevada ($Y=2$) lo más probable es que haya un volumen intermedio de ventas de bebidas alcohólicas. □

Ejercicio 35(c) Necesitamos calcular las desviaciones típicas y la covarianza de X e Y .

Por una parte, $E(X) = 0.36 + 2 \cdot 0.24 = 0.84$ y por otra $E(X^2) = 0.36 + 2^2 \cdot 0.24 = 1.32$

Por tanto

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.32 - [0.84]^2 = 0.6144$$

En cuanto a Y , $E(Y) = 0.36 + 2 \cdot 0.40 = 1.16$ y $E(Y^2) = 0.36 + 2^2 \cdot 0.40 = 1.96$

Así pues,

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1.96 - [1.16]^2 = 0.6144$$

La covarianza es

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \\ &= 0.12 + 2 \cdot 0.16 + 2 \cdot 0.08 + 4 \cdot 0.12 - 0.84 \cdot 1.16 = 0.1056 \end{aligned}$$

Finalmente el coeficiente de correlación es

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{0.1056}{\sqrt{0.6144}\sqrt{0.6144}} = 0.17188$$

Existe una débil relación lineal de signo positivo entre las variables. □

Ejercicio 35(d) Los casos que generan un mal día se pueden resumir en aquellos que verifican $X + Y < 2$. Así pues,

$$P(X + Y < 2) = P_{xy}(0, 0) + P_{xy}(0, 1) + P_{xy}(1, 0) = 0.36$$
□

Ejercicio 35(e) Tenemos que reescribir estas probabilidades en términos de las leyes de probabilidad condicionadas:

- Si $Y = 0$:

$$P(X + Y < 2 | Y = 0) = P_{xy}(0 | 0) + P_{xy}(1 | 0) = 0.50 + 0.333 = 0.833$$

- Si $Y = 1$:

$$P(X + Y < 2 | Y = 1) = P_{xy}(0 | 1) = 0.44$$

- Si $Y = 2$:

$$P(X + Y < 2 | Y = 2) = 0$$
□

Ejercicio 36.

$P_{xy}(x, y)$	y=0	y=1	y=2
x=0	0.33	0.12	0.05
x=1	0	0.25	0.25
Marginal de Y	0.33	0.37	0.3

por tanto

$P_{xy}(X 2)$	x=0	0.05/0.3
	x=1	0.25/0.3

y entonces $E_{xy}(X | 2) = 0 \times 0.05/0.3 + 1 \times 0.25/0.3 = 0.25/0.3 = 0.83$

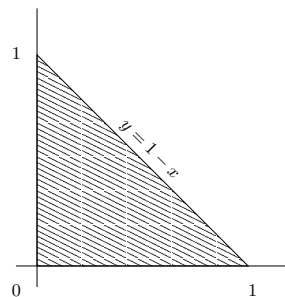
Ejercicio 36

Ejercicio 37.

$$E_{yx}(Y | x) = \int_0^x y \cdot f_{yx}(y | x) dy = \int_0^x kxy dy$$

Ejercicio 37

Ejercicio 39(a) El soporte en un triángulo rectángulo cuyos catetos son los ejes x e y que se unen en el origen, y cuya hipotenusa es el segmento que va de $(x, y) = (0, 1)$ hasta $(x, y) = (1, 0)$ (y que corresponde a la función $y = 1 - x$).

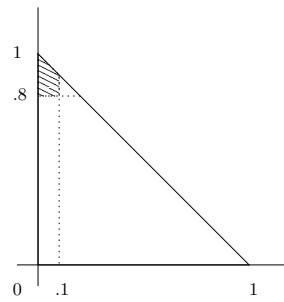


Para que sea función de densidad debe integrar uno:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} k dx dy = k \int_0^1 [x]_0^{1-y} dy = k \int_0^1 1 - y dy = k \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = k/2 = 1$$

por lo tanto, $k = 2$. □

Ejercicio 39(b) Debemos calcular la probabilidad asociada al siguiente recinto



es decir

$$\begin{aligned}
 P(X < 0.1, Y > 0.8) &= \int_0^{0.1} \int_{0.8}^{1-x} 2dy \, dx &&= \int_0^{0.1} [2y]_{0.8}^{1-x} dx \\
 &= \int_0^{0.1} [2 \cdot (1-x) - 2 \cdot (0.8)] dx \\
 &= \int_0^{0.1} [0.4 - 2x] dx &&= [0.4x - x^2]_0^{0.1} dx \\
 &= 0.4 \cdot (0.1) - (0.1)^2 = 0.03
 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 39(c) Para X

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} f_{XY}(x, y) \, dy = \int_0^{1-x} 2dy = [2y]_0^{1-x} = 2 - 2x \quad \text{si } 0 < x < 1$$

y $f_X(x) = 0$ en el resto de los casos.

Para Y

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} f_{XY}(x, y) \, dx = \int_0^{1-y} 2dx = [2x]_0^{1-y} = 2 - 2y \quad \text{si } 0 < y < 1$$

y $f_Y(y) = 0$ en el resto de los casos.

Por tanto

$$E(X) = \int_0^1 x f_X(x) \, dx = \int_0^1 2x - 2x^2 \, dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y f_Y(y) \, dy = \int_0^1 2y - 2y^2 \, dy = \left[y^2 - \frac{2y^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

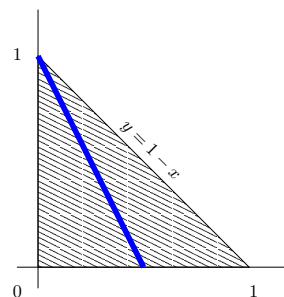
□

Ejercicio 39(d) Primero debemos calcular la función de densidad condicionada

$$f_{XY}(X | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{2 - 2y}$$

por tanto,

$$E_{XY}(X | y) = \int_0^{1-y} x \frac{1}{1-y} \, dx = \frac{1}{1-y} \int_0^{1-y} x \, dx = \frac{1}{1-y} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1-y} = \frac{1-y}{2}$$



Que es distinta de la esperanza incondicional, que es igual a $1/3$.

□

Ejercicio 39(e)

$$\frac{1-y}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

□

Ejercicio 39(f) Puesto que la esperanza condicional es distinta de la incondicional, estas variables no son independientes.

□

Ejercicio 39(g) Para ello hemos de calcular $E(XY)$.

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy f_{XY}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy 2 dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2xy^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x(1-x)^2 dx \\ &= \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} \frac{1}{3} = -\frac{1}{36}$$

Es decir, hay una relación lineal decreciente entre X e Y como cabía esperar dado el soporte de la función de densidad conjunta, que es uniforme (nótese la relación lineal decreciente de la esperanza condicional, i.e., la función de regresión).

□

Ejercicio 39(h)

$$E_{XY}(X^2 | y) = \int_0^{1-y} x^2 \frac{1}{1-y} dx = \frac{1}{1-y} \int_0^{1-y} x dx = \frac{1}{1-y} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{1-y} = \frac{(1-y)^2}{3};$$

así pues, puesto que $\text{Var}_{XY}(X | y) = E_{XY}(X^2 | y) - [E_{XY}(X | y)]^2$

$$\text{Var}_{XY}(X | y) = \frac{(1-y)^2}{3} - \left[\frac{1-y}{2} \right]^2 = \frac{(1-y)^2}{12}$$

para $0 < y < 1$; por tanto, la varianza varía entre cero para $y = 1$ y $\frac{1}{12}$ para $y = 0$.

□

Ejercicio 40. Que $\text{Var}_{YX}(Y | 1) = 0$ implica que cuando $X = 1$, la variable aleatoria Y es degenerada, es decir, toma un valor constante. Puesto que $E_{YX}(Y | 1) = 1$, dicho valor es uno. Por lo tanto $P_{YX}(1 | 1)$ necesariamente es igual a 1. De esto se deduce que la probabilidad de que Y tome un valor distinto de 1 condicionado a $X=1$ es cero; en particular $P_{YX}(2 | 1) = 0$.

Ejercicio 40

Ejercicio 41.

$$\begin{aligned} E_{ZX}(Z | x) &= E_{YX}(a + bY | x) && \text{sustituyendo } Z \text{ por la combinación lineal} \\ &= a + bE_{YX}(Y | x) && \text{por ser la esperanza un operador lineal} \\ &= a + bE(Y) && \text{por ser } X \text{ e } Y \text{ independientes} \\ &= E(a + bY) && \text{por ser la esperanza un operador lineal} \\ &= E(Z) && \text{sustituyendo la combinación lineal por } Z \end{aligned}$$

Ejercicio 41

Ejercicio 42(a) Puesto que nos preguntan por probabilidades acerca de la evolución del empleo al margen de los shocks de oferta, necesitamos conocer la función de cuantía marginal de Y .

Calculamos las funciones de cuantía marginales:

$X \backslash Y$	-1	0	1	$P_X(x)$
-1	5/24	3/24	0	8/24
0	2/24	6/24	2/24	10/24
1	1/24	2/24	3/24	6/24
$P_Y(y)$	8/24	11/24	5/24	1

Por tanto, $P_Y(y) = 5/24$ y $P_Y(-1) = 8/24$; así pues, “a priori” es más probable una disminución del nivel de empleo. □

Ejercicio 42(b) Ahora necesitamos la función de cuantía de Y condicionada al hecho de que ha habido un shock negativo. Por tanto nos interesa fijarnos en la primera fila de la función de cuantía conjunta. Dicha fila no es una función de cuantía por sí sola, ya que no suma uno. Para obtener la función de cuantía de Y condicionada, debemos dividir dicha fila por la probabilidad $P_X(1)$; por tanto

$$P_{Y|X}(y | -1) = \left(\frac{5/24}{8/24} \quad \frac{3/24}{8/24} \quad 0 \right) = \left(\frac{5}{8} \quad \frac{3}{8} \quad 0 \right)$$

que suma uno y por tanto es función de cuantía.

Es decir, $P_Y(-1) = \frac{5}{8}$, $P_Y(0) = \frac{3}{8}$, $P_Y(1) = 0$ que son probabilidades distintas de las descritas por la función de cuantía marginal de Y . Por tanto:

1. Sigue siendo más probable una caída del nivel de empleo (de hecho, un incremento tiene probabilidad nula).
2. Las probabilidades son $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$, y 0 respectivamente. □

Ejercicio 42(c) Es la esperanza incondicional de Y , por tanto,

$$E(Y) = -1 \cdot \frac{8}{24} + 0 \cdot \frac{11}{24} + 1 \cdot \frac{5}{24} = -\frac{3}{24}$$
□

Ejercicio 42(d) Debemos calcular la esperanza de Y condicionada a $X = -1$, es decir,

$$E_{Y|X}(Y | -1) = -1 \cdot \frac{5}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot 0 = -\frac{5}{8}$$

Para calcular la varianza condicionada necesitamos calcular primero el momento condicionado de segundo orden de Y , ya que como sabemos

$$\text{Var}_{Y|X}(Y | -1) = E_{Y|X}(Y^2 | -1) - \left(E_{Y|X}(Y | -1) \right)^2.$$

Puesto que

$$E_{Y|X}(Y^2 | -1) = (-1)^2 \cdot \frac{5}{8} + 0^2 \cdot \frac{3}{8} + 1^2 \cdot 0 = \frac{5}{8},$$

entonces

$$\text{Var}_{Y|X}(Y | -1) = E_{Y|X}(Y^2 | -1) - \left(E_{Y|X}(Y | -1) \right)^2 = \frac{5}{8} - \left(-\frac{5}{8} \right)^2 = 0.234$$
□

Ejercicio 42(e) Puesto que la probabilidad condicional difiere de la incondicional, esto indica que existe “algún tipo” de dependencia entre las variables.

Para ver el grado de dependencia lineal debemos calcular el coeficiente de correlación lineal.

Por una parte, puesto que $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ necesitamos conocer $E(X)$ y $E(XY)$:

$$E(X) = -1 \cdot \frac{8}{24} + 0 \cdot \frac{10}{24} + 1 \cdot \frac{6}{24} = -\frac{2}{24}$$

$$E(XY) = (-1)(-1) \cdot \frac{5}{24} + (1)(-1) \cdot \frac{1}{24} + (1)(1) \cdot \frac{3}{24} = \frac{7}{24}$$

(donde hemos omitido los sumandos nulos).

Por tanto

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{7}{24} - \frac{-2}{24} \cdot \frac{-3}{24}$$

El coeficiente de correlación se define como

$$\text{Corr}(X, Y) = \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Así pues, nos queda calcular $\text{Var}(X)$ y $\text{Var}(Y)$:

Puesto que

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot \frac{8}{24} + 0 \cdot \frac{10}{24} + 1^2 \cdot \frac{6}{24} = \frac{14}{24}$$

$$E(Y^2) = (-1)^2 \cdot \frac{8}{24} + 0 \cdot \frac{11}{24} + 1^2 \cdot \frac{5}{24} = \frac{13}{24}$$

tenemos que $\text{Var}(X) = \frac{14}{24} - \left(-\frac{2}{24}\right)^2$ y $\text{Var}(Y) = \frac{13}{24} - \left(-\frac{3}{24}\right)^2$; por lo que finalmente

$$\text{Corr}(X, Y) = \rho_{XY} = \frac{\frac{7}{24} - \frac{-2}{24} \cdot \frac{-3}{24}}{\sqrt{\left[\frac{14}{24} - \left(-\frac{2}{24}\right)^2\right] \left[\frac{13}{24} - \left(-\frac{3}{24}\right)^2\right]}} = 0.37$$

que indica cierta dependencia lineal *positiva*, pero no muy acusada, puesto que esta lejos de uno en valor absoluto. □

Ejercicio 43(a) La función de cuantía marginal de X es:

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{para } x = -2 \\ 1/5 & \text{para } x = -1 \\ 1/5 & \text{para } x = 0 \\ 1/5 & \text{para } x = 1 \\ 1/5 & \text{para } x = 2 \end{cases} ;$$

mientras que la función de cuantía marginal de Y es :

$$P_Y(y) = \begin{cases} 1/5 & \text{para } y = 0 \\ 2/5 & \text{para } y = 1 \\ 2/5 & \text{para } y = 4 \end{cases} .$$

Puesto que

$$P_{XY}(1, 1) = 1/5$$

y

$$P_X(1) \cdot P_Y(1) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{25},$$

no son independientes. □

Ejercicio 43(b) Por una parte

$$E(XY) = -8\frac{1}{5} - 1\frac{1}{5} + 0\frac{1}{5} + 1\frac{1}{5} + 8\frac{1}{5} = 0;$$

por otra

$$E(X) = -2\frac{1}{5} - 1\frac{1}{5} + 0\frac{1}{5} + 1\frac{1}{5} + 2\frac{1}{5} = 0$$

y

$$E(Y) = 0\frac{1}{5} + 1\frac{2}{5} + 4\frac{2}{5} = 2.$$

Así pues,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0 - 0 \cdot 2 = 0$$
□

Ejercicio 43(c)

1. $P_{XY}(x | 0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$
 2. $P_{XY}(x | 1) = \begin{cases} 1/2 & \text{para } x = -1 \\ 1/2 & \text{para } x = 1 \end{cases}$
 3. $P_{XY}(x | 4) = \begin{cases} 1/2 & \text{para } x = -2 \\ 1/2 & \text{para } x = 2 \end{cases}$
-

Ejercicio 43(d) $P_{YX}(y | 0) = \begin{cases} 1 & \text{para } y = 0 \end{cases}$ □

Ejercicio 43(e)

1.

$$E_{XY}(X | 0) = 0 * P_{XY}(0 | 0) = 0 * 1 = 0$$

2.

$$\begin{aligned} E_{x|Y}(X | 1) &= -1 * P_{x|Y}(-1 | 1) + 1 * P_{x|Y}(1 | 1) = \\ &= -1 * 1/2 + 1 * 1/2 = 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} E_{x|Y}(X | 4) &= -2 * P_{x|Y}(-2 | 4) + 2 * P_{x|Y}(2 | 4) = \\ &= -2 * 1/2 + 2 * 1/2 = 0 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 43(f)

$$E_{y|x}(Y | 0) = 0 * P_{y|x}(0 | 0) = 0 * 1 = 0$$

□

Ejercicio 43(g)

1.

$$\text{Var}_{x|Y}(X | 0) = (0 - 0)^2 * P_{x|Y}(0 | 0) = (0 - 0)^2 * 1 = 0$$

2.

$$\begin{aligned} \text{Var}_{x|Y}(X | 1) &= \\ &= (-1 - 0)^2 * P_{x|Y}(-1 | 1) + (1 - 0)^2 * P_{x|Y}(1 | 1) \\ &= 1 * 1/2 + 1 * 1/2 = 1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \text{Var}_{x|Y}(X | 4) &= \\ &= (-2 - 0)^2 * P_{x|Y}(-2 | 4) + (2 - 0)^2 * P_{x|Y}(2 | 4) \\ &= 4 * 1/2 + 4 * 1/2 = 4 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 44(b)

$$P(E(X|Y)) = \begin{cases} 1 & \text{para } E(X|Y) = 0 \end{cases}$$

□

Ejercicio 47(b)

$$P(\text{Var}(X|Y)) = \begin{cases} 1/5 & \text{para } \text{Var}(X|Y) = 0 \\ 2/5 & \text{para } \text{Var}(X|Y) = 1 \\ 2/5 & \text{para } \text{Var}(X|Y) = 4 \end{cases}$$

□

Ejercicio 48.

$$\begin{aligned} E_X(E(Y|X)) &= \int h(x) f_X(x) dx \\ &= \int [E_{y|x}(Y | x)] f_X(x) dx \\ &= \int [\int y f_{y|x}(Y | x) dy] f_X(x) dx \\ &= \iint y \cdot f_{y|x}(Y | x) f_X(x) dy dx \\ &= \iint y \cdot f_{xy}(x, y) dy dx \\ &= E(Y) = E(Y) \end{aligned}$$

Ejercicio 48**Ejercicio 49(a)**

$$\int_0^2 \int_0^1 kxy dx dy = k$$

por tanto k debe ser uno ($k = 1$)

$$f_X(x) = \int_0^2 xy \, dy = x \int_0^2 y \, dy = 2x \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 xy \, dx = y \int_0^1 x \, dx = \frac{y}{2} \quad 0 < y < 2$$

□

Ejercicio 49(b)

$$E(Y) = \int_0^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{\int_0^2 y^2 dy}{2} = \frac{4}{3}$$

$$E(Y^2) = \int_0^2 \frac{y^3}{2} dy = \frac{\int_0^2 y^3 dy}{2} = 2$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{2}{9}$$

□

Ejercicio 49(c)

$$\int_0^2 \int_0^1 9(x-1)y^2 f_{XY}(x,y) \, dx dy = -\frac{3 \int_0^2 y^3 dy}{2} = -6$$

□

Ejercicio 49(d) Primero calculamos la función de densidad de probabilidad de Y condicionada a $X = x$

$$f_{Y|X}(Y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{xy}{2x} = \frac{y}{2}; \quad \text{con soporte } \mathbb{R}_{Y|X} = [0, 2]$$

y donde $0 < y < 1$.

Por otra parte, el T^a de las esperanzas iteradas dice que $E_X(E(Y|X)) = E(Y)$, veámoslo:

$$E_{Y|X}(Y|x) = \frac{\int_0^2 y^2 dy}{2} = \frac{4}{3}, \quad 0 < x < 1;$$

así pues, su esperanza es

$$E_X\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} = E(Y)$$

□

Ejercicio 49(e)

$$P(Y > X) = \int_0^1 \int_x^2 f_{XY}(x,y) \, dy \, dx = \int_0^1 x \int_x^2 y \, dy \, dx = \frac{7}{8}$$

$$P(Y > X | X = 0.5) = \int_{x=0.5}^2 f_{Y|X}(y|0.5) \, dy = \int_{0.5}^2 \frac{y}{2} \, dy = \frac{15}{16}$$

$$P(Y > X | X > 0.5) = \frac{P(Y > X)}{P(X > 0.5)} = \frac{\int_{0.5}^1 x \int_x^2 y \, dy \, dx}{2 \int_{0.5}^1 x \, dx} = \frac{27}{32}$$

□

Ejercicio 50(a) Por una parte

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2(1-x) dx = \left[x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Por otra

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x) \, dx = 2 \int_0^1 x^2 - x^3 \, dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Así pues

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

□

Ejercicio 50(b)

$$\begin{aligned} E_{Y|X}(Y|x) &= \int_x^1 \frac{y}{1-x} dy = \frac{1}{1-x} \left[\frac{y^2}{2} \right]_x^1 \\ &= \frac{1}{1-x} \left[\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right] = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{2} \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{2} = \boxed{\frac{1+x}{2}}; \quad x \leq y \leq 1; \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

□

Ejercicio 50(c) $y \in [1/2, 1]$.

□

Ejercicio 51(b) Se debe verificar que

$$\int_0^3 \int_x^3 f_{XY}(x, y) dy dx = 1$$

Calculando tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_x^3 k dy dx &= \int_0^3 k(3-x) dx \\ &= \left[k(3x - \frac{x^2}{2}) \right]_0^3 = 1, \end{aligned}$$

y por tanto $k = \frac{2}{9}$

(en este caso k es la altura de la función de densidad sobre todo el soporte)

□

Ejercicio 51(c)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^3 f_{XY}(x, y) dy = \int_x^3 \frac{2}{9} dy = \frac{2}{9}(3-x) \quad x \in (0, 3) \\ E(X) &= \int_0^3 x f_X(x) dx = \int_0^3 \frac{2}{9}(3x - x^2) dx = 1 \\ E(X^2) &= \int_0^3 x^2 f_X(x) dx = \int_0^3 \frac{2}{9}(3x^2 - x^3) dx = \frac{3}{2} \\ \text{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 51(d)

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y f_{XY}(x, y) dx = \int_0^y \frac{2}{9} dx = \frac{2}{9}y \quad y \in (0, 3) \\ E(Y) &= \int_0^3 y f_Y(y) dy = \int_0^3 \frac{2}{9}y^2 dy = 2 \\ E(Y^2) &= \int_0^3 y^2 f_Y(y) dy = \int_0^3 \frac{2}{9}y^3 dy = \frac{9}{2} \\ \text{Var}(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{9}{2} - 2^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 51(e) En general

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{2}{9}(3-x) \cdot \frac{2}{9}y \neq \frac{2}{9} = f_{XY}(x, y)$$

por lo tanto X e Y NO son independientes.

□

Ejercicio 51(f)

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}$$

Puesto que $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, y

$$E(XY) = \int_0^3 \int_x^3 xy f_{XY}(x, y) dy dx = \int_0^3 \int_x^3 \frac{2}{9} xy \cdot dy dx = \frac{9}{4}$$

entonces; $\text{Cov}(XY, =) 9/4 - 2 \cdot 1 = 1/4$. Así pues

$$\rho_{XY} = \frac{1/4}{\sqrt{1/2 \cdot 1/2}} = \frac{1}{2}$$

que es mayor que 0 como cabía esperar. □

Ejercicio 51(g)

$$f_{Y|X}(Y | x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{2/9}{2/9 \cdot (3-x)} = \frac{1}{3-x};$$

cuando $y \in (x, 3)$; y $f_{Y|X}(Y | x) = 0$; en el resto de casos.

Por otra parte

$$E_{Y|X}(Y | x) = \int_x^3 y f_{Y|X}(Y | x) dy = \int_x^3 \frac{y}{3-x} dy = \frac{1}{2}(3+x)$$

□

Ejercicio 51(h) La v.a. $E(Y|X)$ toma el valor $E_{Y|X}(Y | x)$ con probabilidad $f_X(x) dx$, para cualquier $x \in (0, 3)$, por tanto,

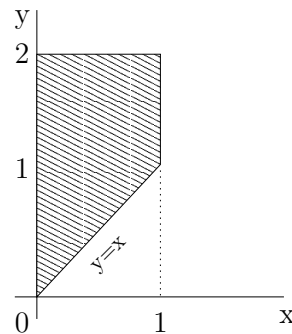
$$E_X(E(Y|X)) = \int_0^3 E_{Y|X}(Y | x) f_X(x) dx$$

así pues, sustituyendo

$$\int_0^3 \frac{1}{2}(3+x) \frac{2}{9}(3-x) dx = \frac{1}{9} \left[3^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 2 = E(Y)$$

□

Ejercicio 52(a)



Nótese que x puede tomar valores entre 0 y 1, siempre y cuando además $x < y$. Cuando $y < 1$, la variable x estará en el intervalo $x \in (0, y)$; por lo que y restringe los posibles valores de x . Sin embargo, cuando $y \geq 1$, la variable x puede tomar cualquier valor entre cero y uno (y NO restringe, en este segundo caso, los posibles valores de x .) □

Ejercicio 52(b) $\int_0^1 \int_x^2 2/3 dy dx = 1$ y además $f_{XY}(x, y)$ es estrictamente positiva en todo su dominio de definición. □

Ejercicio 52(c)

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_x^2 2/3 dy = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x, & \text{en el intervalo } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{en el resto de casos.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y 2/3 dx = \frac{2}{3}y, & \text{en el intervalo } y \in (0, 1) \\ \int_0^1 2/3 dx = \frac{2}{3}, & \text{en el intervalo } y \in [1, 2) \\ 0 & \text{en el resto de casos.} \end{cases}$$

Los valores esperados son:

$$E(Y) = \int_0^1 y \frac{2}{3} dy + \int_1^2 y \frac{2}{3} dy = \frac{11}{9}.$$

$$E(X) = \int_0^1 x \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x \right) dx = \frac{4}{9}.$$

□

Ejercicio 52(d)

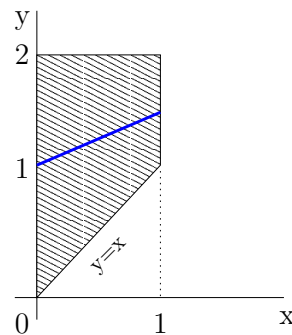
$$\int_1^2 \frac{2}{3} dy = \frac{2}{3};$$

$$\int_0^1 \frac{2}{3} y dy = \frac{1}{3}; \quad \text{como cabe esperar por ser el suceso complementario al anterior.}$$

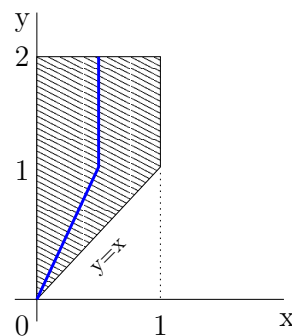
□

Ejercicio 52(e)

$$E_{Y|X}(Y|x) = \begin{cases} \int_x^2 y \frac{2/3}{2/3 - 2/3x} dy = \frac{x^2}{2x-4} - \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}(x+2), & \text{definida para } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



$$E_{X|Y}(X|y) = \begin{cases} \int_0^y x \frac{2/3}{2/3y} dx = \frac{1}{2}y & \text{definida para } y \in (0, 1), \\ \int_0^1 x \frac{2/3}{2/3} dx = \frac{1}{2} & \text{definida para } y \in [1, 2), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



□

Ejercicio 52(f) $E_{Y|X}(Y|x)$ es lineal; sin embargo $E_{X|Y}(X|y)$ no lo es.

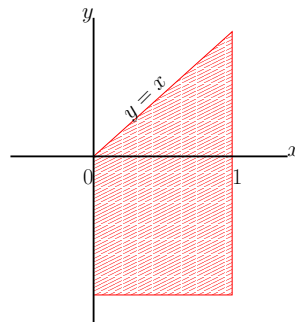
□

Ejercicio 53(a) Del punto g de EJERCICIO 51 sabemos que $E_{Y|X}(Y|x) = (3+x)/2$.

De los puntos c, d y f del EJERCICIO 51 sabemos que $E(Y) = 2$; $\rho_{XY} = 1/2$; $\sigma_Y = \sigma_X$; y que $E(X) = 1$. Por tanto

$$\begin{aligned} E(Y) + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - E(X)) &= 2 + \frac{1}{2}(x - 1) \\ &= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{2}(3 + x) = E_{YX}(Y|x) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 54(a)

□

Ejercicio 54(b) Comprobando si se verifican las siguientes igualdades

1.

$$\int_0^1 \int_{-1}^x f_{XY}(x, y) dy dx = 1$$

2.

$$\int_0^1 \int_y^1 f_{XY}(x, y) dx dy + \int_{-1}^0 \int_0^1 f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

□

Ejercicio 54(c)

$$f_X(x) = \int_{-1}^x f_{XY}(x, y) dy; \quad x \in [0, 1]$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 f_{XY}(x, y) dx; & y \in (0, 1] \\ \int_0^1 f_{XY}(x, y) dx; & y \in [-1, 0] \end{cases}$$

□

Ejercicio 54(d) Debería comprobarse si se verifica

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \text{ para } -1 \leq y \leq x; \quad 0 \leq x \leq 1$$

en caso afirmativo, X e Y son independientes.

□

Ejercicio 54(e) Puesto que $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, entonces

$$\text{Var}(X) = \int_0^1 \int_{-1}^x x^2 f_{XY}(x, y) dy dx - \left[\int_0^1 \int_{-1}^x x f_{XY}(x, y) dy dx \right]^2$$

o lo que es lo mismo

$$\text{Var}(X) = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx - \left[\int_0^1 x f_X(x) dx \right]^2$$

□

Ejercicio 54(f) Para ello es necesario calcular la función de densidad condicionada, que en este caso es

$$f_{YX}(y|a) = \frac{f_{XY}(a, y)}{f_X(a)}; \quad -1 \leq y \leq a$$

por lo tanto

$$E_{Y|X}(Y|x) = \int_{-1}^x y \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} dy; \quad x \in [-1, 0]; \quad -1 < y < x.$$

□

Ejercicio 54(g)

$$E_{Y|X}(Y|x) = E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)} + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \cdot x; \quad \forall x \in [0, 1].$$

□

Ejercicio 54(h)

$$P(Y > d | X = 0.5) = \int_d^{0.5} f_{Y|X}(y | 0.5) dy = \int_d^{0.5} \frac{f_{XY}(0.5, y)}{f_X(0.5)} dy \quad \text{si } d < 0.5$$

$$P(Y > d | X = 0.5) = 0 \quad \text{si } d \geq 0.5$$

□

Ejercicio 54(i) En este caso no podemos emplear la función de densidad condicionada $f_{Y|X}(Y|x)$; aquí debemos emplear directamente la definición de probabilidad condicionada.

$$P(Y > d | X > 0.5) = \frac{\int_{0.5}^1 \int_d^x f_{XY}(x, y) dy dx}{\int_{0.5}^1 f_X(x) dx} \quad \text{si } d < 0.5$$

$$P(Y > d | X > 0.5) = \frac{\int_d^1 \int_d^x f_{XY}(x, y) dy dx}{\int_{0.5}^1 f_X(x) dx} \quad \text{si } d \geq 0.5$$

□

Ejercicio 55(a)

$P_{XY}(x, y)$	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -1$	$0 \cdot k$	$1 \cdot k$	$2 \cdot k$
$Y = 0$	$1 \cdot k$	$1 \cdot k$	$1 \cdot k$
$Y = 1$	$2 \cdot k$	$1 \cdot k$	$0 \cdot k$

que suma $9 \cdot k$; por tanto $k = \frac{1}{9}$.

□

Ejercicio 55(b) Primero calculamos la función de cuantía marginal

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$P_X(x)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Por tanto

$$E(X) = \sum x P_X(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

□

Ejercicio 55(c) Primero necesitamos calcular la función de cuantía condicionada a que $Y = -1$; sabiendo que $P(Y = -1) = \frac{1}{3}$

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$P_{X Y}(x -1)$	0	$1/3$	$2/3$

Por tanto

$$E_{X|Y}(X | -1) = \sum x P_{X|Y}(x | -1) = \frac{2}{3}$$

□

Ejercicio 55(d) Por una parte

$$E(X^2) = \sum x^2 P_X(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \sum y P_Y(y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$E(Y^2) = \sum y^2 P_Y(y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{2}{3}$$

$$E(XY) = \sum \sum xy P_{XY}(y) = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{4}{9}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{4}{9}$$

Por tanto

$$\rho_{XY} = -\frac{4/9}{\sqrt{2/3 \cdot 2/3}} = -\frac{4/9}{2/3} = -\frac{2}{3}$$

□

Ejercicio 55(e) Z es una variable cuyo soporte son los valores enteros desde -2 hasta 2 . Pensemos primero cuales son sus probabilidades:

$$P(Z = -2) = P_{XY}(-1, 1) = \frac{2}{9}$$

$$P(Z = -1) = P_{XY}(-1, 0) + P_{XY}(0, 1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$P(Z = 0) = P_{XY}(-1, -1) + P_{XY}(0, 0) + P_{XY}(0, 0) = 0 + \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9}$$

$$P(Z = 1) = P_{XY}(0, -1) + P_{XY}(1, 0) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$P(Z = 2) = P_{XY}(1, -1) = \frac{2}{9}$$

Por tanto

$$E(Z) = -2\frac{2}{9} - 1\frac{2}{9} + \frac{1}{9} + 1\frac{2}{9} + 2\frac{2}{9} = 0$$

□

Ejercicio 55(f) ($Z | Y = -1$) es una variable cuyo soporte son los valores enteros desde 0 hasta 2 . Pensemos primero cuales son sus probabilidades:

$$P(Z = 0 | Y = -1) = P_{XY}(-1 | -1) = 0$$

$$P(Z = 1 | Y = -1) = P_{XY}(0 | -1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Z = 2 | Y = -1) = P_{XY}(1 | -1) = \frac{2}{3}$$

Por tanto

$$E_{ZY}(Z | -1) = 1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

□

Ejercicio 55(g)

$$E_{YX}(Y | x) \approx 0 + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}x = -\frac{2}{3}x$$

□

Ejercicio 56(a)

$$1 = k \int_0^1 \int_0^y y^2 dx dy = k \int_0^1 y^3 dy = \frac{k}{4}$$

por tanto, $k = 4$

□

Ejercicio 56(b)

$$f_Y(y) = 4 \int_0^y y^2 dx = 4y^3; \quad \text{para } 0 < y < 1$$

$$E(Y) = 4 \int_0^1 y^4 dy = \frac{4}{5}; \quad E(Y^2) = 4 \int_0^1 y^5 dy = \frac{2}{3}$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{2}{75}$$

□

Ejercicio 56(c)

$$f_{X|Y}(X|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{4y^2}{4y^3} = \frac{1}{y} \quad \text{para } 0 < x < y$$

$$E_{X|Y}(X|y) = \int_0^y x f_{X|Y}(X|y) dx = \frac{\int_0^y x dx}{y} = \frac{y}{2}$$

□

Ejercicio 56(d)

$$E(X) = E(E(X|Y)) = \frac{E(Y)}{2} = \frac{2}{5}$$

□

Ejercicio 56(e)

$$E(X^r Y^s) = \int_0^1 \int_0^y x^r y^s f_{XY}(x,y) dx dy = 4 \int_0^1 \int_0^y x^r dx y^{s+2} dy$$

$$= \frac{4 \int_0^1 y^{s+r+3} dy}{r+1} = \frac{4}{(r+1)(s+r+4)}$$

□

Ejercicio 56(f)

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{12} - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{75}$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{4}{12} - \frac{4}{25} = \frac{14}{225}$$

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \sqrt{\frac{3}{28}}$$

□

Ejercicio 56(g)

$$P(2X > Y | Y < 1/2) = \frac{P(2X > Y, Y < 1/2)}{P(Y < 1/2)}$$

por una parte

$$P(2X > Y, Y < 1/2) = \int_0^{1/2} \int_{y/2}^y 4y^2 dx dy = 2 \int_0^{1/2} y^3 dy = \frac{1}{32}$$

por otra

$$P(Y < 1/2) = 4 \int_0^{1/2} y^3 dy = \frac{1}{16};$$

así pues

$$P(2X > Y | Y < 1/2) = \frac{1}{2}$$

□

Ejercicio 57(a) Puesto que $E(Y|X)$ es la siguiente función lineal de x ,

$$E_{Y|X}(Y|x) = (3+x)/2 = h(x);$$

podemos aplicar el cambio de variable univariante:

$$\begin{aligned} f_{E(Y|X)}(y) &= \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| \cdot f_X(h^{-1}(y)) \\ &= \left| \frac{1}{b} \right| \cdot f_X\left(\frac{y-a}{b}\right) \\ &= 2 \cdot f_X(2y-3) \quad y \in (h(0), h(3)) = (3/2, 3) = \mathbb{R}_{E(Y|X)} \end{aligned}$$

donde $a = 3/2$ y $b = 1/2$.

Del punto c del EJERCICIO 51 sabemos que $f_X(x) = \frac{2}{9}(3-x)$; por lo tanto

$$f_{E(Y|X)}(y) = 2 \left(\frac{2}{9}(3 - (2y - 3)) \right) = \frac{4}{9}(6 - 2y) = \frac{8}{9}(3 - y),$$

donde $y \in (3/2, 3)$. □

Ejercicio 57(b)

$$\int_{3/2}^3 \frac{8}{9}(3-y)dy = 1$$
□

Ejercicio 57(c)

$$P(E(Y|X) > 2) = \int_2^3 \frac{8}{9}(3-y)dy = \frac{4}{9}.$$

Por otra parte

$$P(Y > 2) = \int_2^3 \frac{2}{9}ydy = \left[\frac{y^2}{9} \right]_2^3 = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$
□

Ejercicio 57(d)

$$E(E(Y|X)) = \int_{3/2}^3 y \frac{8}{9}(3-y)dy = 2 = E(Y)$$
□

Ejercicio 57(e) Puesto que

$$\text{Var}(E(Y|X)) = E\left([E(Y|X) - E(E(Y|X))]^2\right) = E\left([E(Y|X) - E(Y)]^2\right)$$

que es igual a

$$\int_0^3 \int_x^3 [E_{Y|X}(Y|x) - E(Y)]^2 f_{XY}(x,y) dy dx;$$

sustituyendo tenemos

$$\frac{2}{4 \cdot 9} \int_0^3 \int_x^3 (x^2 - 2x + 1) dy dx = 0.125 < \text{Var}(Y) = 0.5$$
□

Ejercicio 58. Puesto que $Z = 3X + 2$; entonces

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(3X + 2 \leq z) = P\left(X \leq \frac{z-2}{3}\right) = F_X\left(\frac{z-2}{3}\right);$$

y

$$f_Z(z) = f_X(h^{-1}(z)) \cdot \left| \frac{dh^{-1}(z)}{dz} \right| = 1 \cdot \frac{1}{3}; \quad z \in \mathbb{R}_Z = (h(0), h(1)) = (2, 5)$$

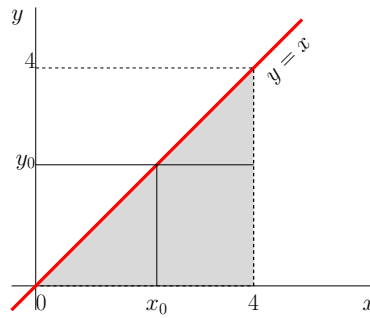
Es decir, $Z \sim \text{Uniforme}(2, 5)$. Por tanto, $E(Z) = \int_2^5 z \frac{1}{3} dz = \frac{1}{3} \frac{z^2}{2} \Big|_2^5 = \frac{7}{2}$.

Puesto que $Z = E(Y|X)$, entonces $P(E(Y|X) > 3) = P(Z > 3)$:

$$P(Z > 3) = \int_3^5 \frac{1}{3} \cdot dz = \frac{z}{3} \Big|_3^5 = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 58

Ejercicio 59(a)



□

Ejercicio 59(b) Puesto que las funciones de densidad marginales son

- $f_Y(y) = \int_y^4 \frac{xy}{32} dx = \frac{y}{4} - \frac{y^3}{64}$ para $y \in (0, 4)$.
- $f_X(x) = \int_0^x \frac{xy}{32} dy = \frac{x^3}{64}$, para $x \in (0, 4)$.

entonces

1. $f_{x|Y}(x|y) = \frac{\frac{xy}{32}}{\frac{y}{4} - \frac{y^3}{64}} = \frac{2x}{(16-y^2)}$, $y < x < 4$; es decir $\mathbb{R}_{Y|X} = (y, 4)$
2. $f_{y|X}(y|x) = \frac{\frac{xy}{32}}{\frac{x^3}{64}} = \frac{2y}{x^2}$, $0 < y < x$; es decir $\mathbb{R}_{Y|X} = (0, x)$

□

Ejercicio 59(c) $E(Y) = \int_0^4 y(\frac{1}{4}y - \frac{1}{64}y^3)dy = \frac{32}{15} = 2.13$

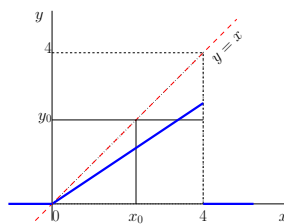
□

Ejercicio 59(d) Para cualquier $x \in (0, 4)$,

$$f_{Y|X}(Y|x) = \frac{\frac{1}{32}xy}{\frac{1}{64}x^3} = \frac{2y}{x^2}; \quad y \in (x, 4).$$

Entonces $E_{Y|X}(Y|x) = \int_0^x y \frac{2y}{x^2} dy = \frac{2}{3}x$, para $x \in (0, 4)$.

La esperanza condicionada está representada por la línea azul.



Si $X=2$, $E(Y|X=2) = 4/3 < E(Y)$. Por tanto no coinciden.

□

Ejercicio 59(e) En este caso $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$; pero ya no es necesario verificarlo puesto que $E_{Y|X}(Y|x)$ difiere de $E(Y)$, ambas variables dependen.

□

Ejercicio 59(f) $E_{Y|X}(Y|x) > E(Y)$ sólo cuando $\frac{2}{3}x > \frac{32}{15}$, es decir, cuando $x > \frac{16}{5}$. Por lo tanto, si $x \in (16/5, 4)$ entonces $E_{Y|X}(Y|x) > E(Y)$.

□

Ejercicio 59(g) Según el apartado anterior, es la probabilidad de que $P(X > \frac{16}{5})$. Por tanto

$$P\left(X > \frac{16}{5}\right) = \int_{16/5}^4 f_X(x) dx = \int_{16/5}^4 \frac{1}{64}x^3 dx = \frac{369}{625} = 0.59$$

Ejercicio 59(h) Puesto que $E_{Y|X}(Y|x) = \frac{2}{3}x$, entonces $\mathbb{R}_{E(Y|X)} = (0, 8/3)$ y

$$y = h(x) = \frac{2}{3}x \quad \text{y por tanto} \quad x = h^{-1}(y) = \frac{3}{2}y;$$

además $f_X(x) = \frac{1}{64}x^3$, así pues

$$f_{E(Y|X)}(y) = \left| \frac{3}{2} \right| \cdot f_X\left(\frac{3}{2}y\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{64} \left(\frac{3}{2}y\right)^3 = \frac{81}{1024}y^3$$

para $y \in (0, \frac{8}{3})$

Ejercicio 59(i)

$$P(E(Y|X) > E(Y)) = P(E(Y|X) > 32/15) = \int_{E(Y)}^{8/3} \frac{81}{1024}y^3 = 0.59$$

Ejercicio 60. Puesto que $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$; realizamos los siguientes cálculos:

Por una parte:

$$M'(t) = \frac{-r}{2}(1-2t)^{\frac{-r}{2}-1}(-2) = r(1-2t)^{\frac{-r}{2}-1}$$

que evaluada en cero es:

$$E(X) = M'(0) = r$$

Por otra parte:

$$M''(t) = r\left(\frac{-r}{2} - 1\right)(1-2t)^{\frac{-r}{2}-2}(-2) = (r^2 + 2r)(1-2t)^{\frac{-r}{2}-2}$$

que evaluada en cero es:

$$E(X^2) = M''(0) = r^2 + 2r.$$

Por tanto, $\text{Var}(X) = r^2 + 2r - r^2 = 2r$

Ejercicio 60

Ejercicio 61(a)

$$M_Y(t) = E(e^{Yt}) = E(e^{(aX+b)t}) = E(e^{aXt} \cdot e^{bt}) = e^{bt}E(e^{aXt}) = e^{bt}M_X(at).$$

Ejercicio 61(b)

$$M'_Y(t) = \frac{dM(t)}{dt} = be^{bt}M_X(at) + e^{bt}aM'_X(at)$$

$$\begin{aligned} E(Y) = M'_Y(0) &= b \cdot \underbrace{M_X(0)}_{E(e^{X \cdot 0}) = E(1) = 1} + a \cdot \underbrace{M'_X(0)}_{E(X)} \\ &= b + aE(X) \end{aligned}$$

Ejercicio 61(c) Puesto que de (a) sabemos que $M_Y(t) = e^{\mu t}M_Z(\sigma t)$; sustituyendo tenemos:

$$M_Y(t) = e^{\mu t} \cdot M_Z(\sigma t) = e^{\mu t} \cdot e^{(\sigma t)^2/2} = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}.$$

Ejercicio 62.

$$E(X) = \left. \frac{\partial M(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{a}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda}t\right)^{-(a+1)} \right|_{t=0} = \boxed{\frac{a}{\lambda} \cdot 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 &= \left. \frac{\partial^2 M(t)}{\partial^2 t} \right|_{t=0} - \left(\left. \frac{\partial M(t)}{\partial t} \right|_{t=0} \right)^2 = \\ &= \left. \frac{a(a+1)}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\lambda}t\right)^{-(a+2)} \right|_{t=0} - \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 = \frac{a^2 + a}{\lambda^2} \cdot 1 - \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 = \boxed{\frac{a}{\lambda^2}} \end{aligned}$$

Ejercicio 62

Ejercicio 63. Puesto que $E(X) = M'_X(0)$ y $E(X^2) = M''_X(0)$; necesito calcular la primera y segunda derivadas de $M_X(t)$ y evaluarlas en cero.

$$M'_X(t) = \frac{\lambda}{(1 - \lambda t)^2}; \quad M''_X(t) = \frac{2\lambda^2}{(1 - \lambda t)^3};$$

por tanto $M'_X(0) = \lambda$ y $M''_X(0) = 2\lambda^2$. Así pues

$$\mu = E(X) = \lambda; \quad \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2$$

Ejercicio 63

Ejercicio 64.

$$M_W(t) = E(e^{tW}) = E(e^{t(X+Y+Z)}) = E(e^{tX+tY+tZ}) = M_{XYZ}(t, t, t);$$

por la definición de función generatriz conjunta; y debido a la independencia entre las vbles.

$$M_{XYZ}(t, t, t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) \cdot M_Z(t).$$

Ejercicio 64

Ejercicio 65.

$$M_Y(t) = E(e^{Yt}) = E(e^{(\sigma Z + \mu)t}) = E(e^{\sigma Zt} \cdot e^{\mu t}) = e^{\mu t} E(e^{\sigma t Z}).$$

Pero $E(e^{\sigma t Z})$ es la función generatriz de momentos de una $N(0, 1)$ "evaluada en σt ", es decir, $E(e^{\sigma t Z}) = M_Z(\sigma t)$; por tanto

$$M_Y(t) = e^{\mu t} M_Z(\sigma t) = e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}(\sigma t)^2} = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2 \sigma^2}$$

Ejercicio 65

Ejercicio 66(a)

$$\begin{aligned} M_U(t) &= E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) && \text{por independencia} \\ &= M_X(t) \cdot M_Y(t) = (1 - t^2)^{-2} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 66(b)

$$\begin{aligned} M_V(t) &= E(e^{t(X-Y)}) = E(e^{tX}) \cdot E(e^{-tY}) && \text{por independencia} \\ &= M_X(t) \cdot M_Y(-t) = (1 - t^2)^{-2} \end{aligned}$$

Por tanto tienen idéntica distribución debido al teorema de unicidad de las funciones generatrices de momentos.

□

Ejercicio 66(c)

$$\begin{aligned} M_{UV}(s, t) &= E(e^{sU+tV}) = E(e^{s(X+Y)+t(X-Y)}) \\ &= E(e^{(s+t)X+(s-t)Y}) \\ &= E(e^{(s+t)X}) \cdot E(e^{(s-t)Y}) && \text{por independencia} \\ &= M_X(s+t) \cdot M_Y(s-t) \\ &= (1 - (s+t)^2)^{-2} \cdot (1 - (s-t)^2)^{-2} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 66(d) Y puesto que la función generatriz conjunta $M_{U,V}(s, t)$ es distinta de

$$M_U(s)M_V(t) = (1 - s^2)^{-2} \cdot (1 - t^2)^{-2}$$

U y V no son independientes.

□

Ejercicio 66(e) Basta con demostrar que $\text{Cov}(U, V) = 0$.

$$\text{Cov}(U, V) = E(UV) - E(U)E(V).$$

Por una parte,

$$\begin{aligned} E(U) &= E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 0 + 0 \\ E(V) &= E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0 - 0; \end{aligned}$$

por otra

$$E(UV) = E((X + Y)(X - Y)) = E(X^2 - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2) = 0.$$

Por tanto $\text{Cov}(U, V) = 0$. □

Ejercicio 67(a) Puesto que $M_{X,Y}(t, \tau) = E(e^{tX + \tau Y})$; entonces

$$\begin{aligned} M_{X,Y}(t, \tau) &= E(e^{tX + \tau Y}) = \sum_{x_i \in \mathbb{R}_X} \sum_{y_j \in \mathbb{R}_Y} e^{tx_i + \tau y_j} P_{XY}(x_i, y_j) \\ &= 1/9e^{0t+0\tau} + 3/9e^{\tau} + 2/9e^{2\tau} + 1/18e^t + 1/6e^{t+\tau} + 1/9e^{t+2\tau} \end{aligned}$$
□

Ejercicio 67(b) La función generatriz de momentos marginal es la conjunta evaluada en $\tau = 0$, por tanto

$$M_X(t) = 2/3 + 1/18e^t + 1/6e^t + 1/9e^t = 2/3 + 1/3e^t$$

derivando respecto de t y evaluando en $t = 0$

$$E(X) = \left. \frac{d(2/3 + 1/3e^t)}{dt} \right|_{t=0} = 1/3e^0 = 1/3.$$
□

Ejercicio 68(a)

$$\left. \frac{dM(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(X) = 2\lambda = 0$$
□

Ejercicio 68(b) Puesto que

$$\left. \frac{dM^2(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = E(X^2) = 2\lambda$$

Entonces $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2\lambda$ □

Ejercicio 69(a) Cuando ambas variables aleatorias tienen **distribución conjunta normal**, entonces incorrelación implica necesariamente independencia. □

Ejercicio 69(b) La conclusión es falsa. La correlación lineal indica el grado de relación **lineal** entre dos variables. Si el coeficiente de correlación lineal está muy próximo a cero, esto quiere decir que relación **lineal** entre las dos variables es prácticamente inexistente. Pero esto no es óbice para que pueda existir una fuerte relación (no lineal) entre las variables. □

Ejercicio 69(c) Cuando la esperanza condicional es una función lineal de x , la aproximación lineal coincide con la verdadera esperanza condicional (esto siempre es así cuando X e Y tienen distribución conjunta normal). □

Ejercicio 70. Use la propiedad E2 de la esperanza. Ejercicio 70

Ejercicio 71. Usando la propiedad V1, podemos deducir que

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n \theta(1 - \theta) = n\theta(1 - \theta).$$
Ejercicio 71

Ejercicio 72(a)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sqrt{3}\frac{1}{6} - \sqrt{3}\frac{1}{6} = 0; & E(X^2) &= 3\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} = 1 \\ E(X^3) &= (\sqrt{3})^3\frac{1}{6} - (\sqrt{3})^3\frac{1}{6} = 0; & E(X^4) &= 9\frac{1}{6} + 9\frac{1}{6} = 3 \end{aligned}$$
□

Ejercicio 73(a) Primero debemos calcular el valor de σ_X^2 . Ya que $X \sim N(20000, \sigma_X^2)$, y $P(X > 21680) = 0.2$; entonces,

$$P\left(\frac{X - 20000}{\sigma_X} > \frac{21680 - 20000}{\sigma_X}\right) = 0.2$$

y

$$P\left(\frac{X - 20000}{\sigma_X} \leq \frac{1680}{\sigma_X}\right) = 0.8.$$

Puesto que $(X - 20000)/\sigma_X \sim N(0, 1)$, podemos deducir cuanto vale $1680/\sigma_X$. Sencillamente debemos buscar en las “las tablas de la Normal” para que valor h , $P(Z \leq h) = 0.8$ (dicho valor es aprox. 0.84)

$$\frac{1680}{\sigma_X} = 0.84; \quad \text{es decir } \sigma_X = 2000.$$

Ahora ya podemos responder a la pregunta:

$$\begin{aligned} P(|X - 20000| < 1680) &= P(-1680 < X - 20000 < 1680) \\ &= P\left(-\frac{1680}{2000} < \frac{X - 20000}{2000} < \frac{1680}{2000}\right) \\ &= P(-0.84 < Z < 0.84) = 0.6, \end{aligned}$$

donde $Z \sim N(0, 1)$. □

Ejercicio 73(b) Necesito calcular el tiempo t a transcurrir para que haya una probabilidad de que el 5% de los aparatos se hayan estropeado.

$P(\text{estropearse antes de } t) = 0.05$

$$P(X < t) = P\left(\frac{X - 20000}{2000} < \frac{t - 20000}{2000}\right) = 0.05$$

Mirando en las tablas deducimos que

$$\frac{t - 20000}{2000} = -1.64 \Rightarrow t = 16720,$$

es decir, hay una probabilidad del 5% de que los lavavajillas se hayan estropeado antes de las 16720 horas de uso. □

Ejercicio 74.

(a) La mediana es el valor m tal que $\int_a^m \frac{1}{b-a} dx = 0.5$ es decir

$$\int_a^m \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^m = 0.5$$

por lo tanto $(m - a)/(b - a) = 1/2$, y despejando m llegamos a

$$2(m - a) = b - a \quad \Rightarrow \quad m = \frac{a + b}{2}$$

(b) El primer cuartil es el valor Q_{25} tal que $\int_a^{Q_{25}} \frac{1}{b-a} dx = 0.25$ es decir

$$\int_a^{Q_{25}} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^{Q_{25}} = 0.25$$

por lo tanto $(Q_{25} - a)/(b - a) = 1/4$, y despejando Q_{25} :

$$Q_{25} = \frac{3a + b}{4}$$

(c) El segundo cuartil es la mediana $Q_{50} = m$

(d) El tercer cuartil es el valor Q_{75} tal que $\int_a^{Q_{75}} \frac{1}{b-a} dx = 0.75$ es decir

$$\int_a^{Q_{75}} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^{Q_{75}} = 0.75$$

por lo tanto $(Q_{75} - a)/(b - a) = 3/4$, y despejando Q_{75} :

$$Q_{75} = \frac{a + 3b}{4}$$

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Puesto que

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} e^{-x-y} dy = e^{-x}$$

y

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} e^{-x-y} dx = e^{-y}.$$

Entonces

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-x} \cdot e^{-y} = e^{-x-y} = f_{XY}(x, y)$$

Fin 1

Solución al Test:

- conocer el valor de Y no aporta información sobre los valores que puede haber tomado X sólo cuando X e Y son independientes; algo que no necesariamente ocurre cuando $E_{XY}(X | y) = E(X)$.
- Puesto que la esperanza condicionada de X no depende de los valores tomados por Y , saber que Y ha tomado un valor determinado no nos dice nada acerca de $E(X)$ (por lo tanto 2 es cierta).
- En general, $E_{XY}(X | y) = E(X)$ no implica ni $E_{XY}(Y | x) = E(Y)$, ni tampoco $\text{Var}_{XY}(X | y) = \text{Var}(X)$.

Fin 2

Solución al Test:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k[1 + xy(x^2 - y^2)] dx dy \\ &= k \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^3 y - xy^3) dx dy \right] \\ &= k \left[4 + \int_{-1}^1 \left[\frac{x^4}{4} y - \frac{x^2}{2} y^3 \right]_{-1}^1 dy \right] \\ &= k \left[4 + \int_{-1}^1 \left[\frac{y}{4} - \frac{y^3}{2} - \frac{y}{4} + \frac{y^3}{2} \right]_{-1}^1 dy \right] = k \cdot 4 \end{aligned}$$

por tanto $k = 1/4$.

Fin 6

Solución al Test: La densidad marginal de X es

$$f_X(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} [1 + xy(x^2 - y^2)] dy = \frac{2}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$$

De manera análoga $f_Y(y) = \frac{1}{2}$

Fin 7

Solución al Test: Podemos calcular $\text{Cov}(X, Y)$ como

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Por una parte

$$E(X) = \int_{-1}^1 x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0,$$

y análogamente $E(Y) = 0$.

Por otra parte

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy \cdot \frac{1}{4} [1 + xy(x^2 - y^2)] dx dy \\ &= \frac{1}{4} \left[\underbrace{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy dx dy}_A + \underbrace{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^4 y^2 dx dy}_B - \underbrace{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^4 dx dy}_C \right] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy dx dy = \int_{-1}^1 x dx \int_{-1}^1 y dy = 0, \\ B &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy dx dy = \int_{-1}^1 x^4 dx \int_{-1}^1 y^2 dy = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}, \end{aligned}$$

$$C = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy dx dy = \int_{-1}^1 x^2 dx \int_{-1}^1 y^4 dy = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15},$$

por lo tanto

$$E(XY) = \frac{1}{4}[A + B - C] = 0.$$

Podemos concluir que

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \cdot 0 = 0;$$

es decir, no hay relación lineal entre X e Y , lo que no quiere decir no pueda existir algún otro tipo de relación; de hecho

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq f_{XY}(x, y) = \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)]$$

por lo que ambas variables no son independientes.

Fin 8

Solución al Test: Necesitamos la función de densidad condicional, es decir

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(Y | x) &= \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)]}{1/2} \\ &= \frac{1}{2}[1 + xy(x^2 - y^2)] \end{aligned}$$

La esperanza condicional es

$$E_{Y|X}(Y | x) = \int_{-1}^1 y \frac{1}{2}[1 + xy(x^2 - y^2)] dy = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x.$$

Fin 9

Solución al Test:

$$\begin{aligned} P(X + Y > 0) &= \int_{-1}^1 \int_{-x}^1 \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)] dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{y}{4} + \frac{x^3 y^2}{2} - \frac{xy^4}{4} \right]_{y=-x}^{y=1} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{4} \right) - \left(-\frac{x}{4} + \frac{2x^5}{4} - \frac{x^5}{4} \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{4} dx = \left[\frac{x}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{24} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

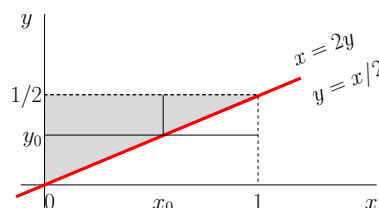
Fin 10

Solución al Test:

- Si $a = -1$; $|a| = 1$ y sin embargo $\rho = -1$
- Si $a < 0$, $\rho = -1$.
- Dada la relación determinista entre X e Y , se verifica que $\text{Var}(Y | X = 1) = 0$ ya que si $X = 1$ entonces $(Y | X = 1) = a + b$ es una constante; pero si $a \neq 0$ entonces $\text{Var}(X) > 0$, que implica que $\text{Var}(Y) > 0$.

Fin 14

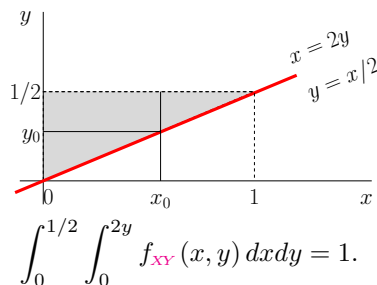
Solución al Test: El soporte es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1/2)$ y $(1, 1/2)$.



Por lo tanto la respuesta correcta es

$$\int_0^1 \int_{x/2}^{1/2} f_{XY}(x, y) dy dx = 1.$$

o bien



De hecho el valor de k es

$$\int_0^{1/2} \int_0^{2y} k dx dy = k \int_0^{1/2} 2y dy = k [y^2]_0^{1/2} = k \cdot 1/4 = 1$$

por tanto $k = 4$.

Fin 15

Solución al Test:

- Puesto que $X = 1/2$ y $x < 2y < 1$ la realización de y debe pertenecer al intervalo $(1/4, 1/2)$.
- La distribución marginal de X es

$$\int_{x/2}^{1/2} f_{XY}(x, y) dy = \int_{x/2}^{1/2} 4 dy = [4y]_{x/2}^{1/2} = 2 - 2x$$

y la de Y es

$$\int_0^{2y} 4 dx = [4x]_0^{2y} = 8y$$

De donde deducimos que en general

$$f_X(x) f_Y(y) = 8y \cdot (2 - 2x) \neq 4 = f_{XY}(x, y)$$

por tanto no son independientes y la información de X condiciona la distribución de Y .

- Por una parte

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{1/2} y f_Y(y) dy = \int_0^{1/2} y \cdot 8y dy = \left[\frac{8y^3}{3} \right]_0^{1/2} \\ &= 1/3; \end{aligned}$$

por otra

$$f_{Y|X}(Y | x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{4}{2 - 2x} = \frac{2}{1 - x}$$

por lo que

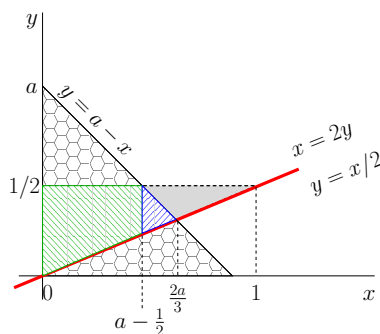
$$\begin{aligned} E_{Y|X}(Y | x) &= \int_{x/2}^{1/2} y f_{Y|X}(Y | x) dy \\ &= \int_{x/2}^{1/2} y \frac{2}{1-x} dy \\ &= \left[\frac{y^2}{1-x} \right]_{x/2}^{1/2}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$E(Y | X = 1/2) = \left[\frac{y^2}{1/2} \right]_{1/4}^{1/2} = 0.375 > 1/3 = E(Y).$$

Fin 16

Solución al Test:



Fin 17