

Dpto. de Economía Cuantitativa
Universidad Complutense de Madrid

Introducción a la Regresión Armónica Dinámica (DHR)

Marcos Bujosa
Antonio García-Ferrer
Peter C. Young

Seminario perteneciente al *Máster en Análisis Económico y Economía Financiera* (MAEF) del ICAE.



Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento-CompartirIgual de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/es/deed.es> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Puede encontrar la última versión de este material en:

<http://www.ucm.es/info/ecocuan/mbb/index.html#LDHR>

Índice

Índice	3
1. Introducción	5
2. Breve introducción al análisis espectral	10
2.1. Análisis en el ámbito del tiempo: las autocovarianzas	13
2.2. Análisis en el ámbito de la frecuencia: el espectro	16
2.3. El espectro de una serie bien conocida	22
3. Método DHR	25
3.1. Modelo teórico de los componentes DHR	27
3.2. Análisis espectral del modelo DHR	32
3.3. Estimación de las varianzas (optimización de los NVR)	36
3.4. Estimación de los componentes	40
A. Identificación del modelo y estimación de los hiper-parámetros:	

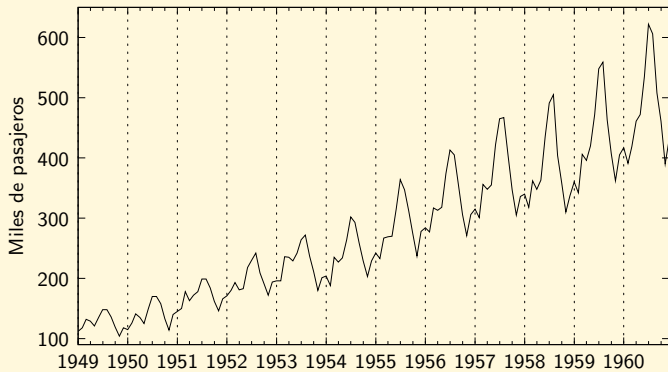
el algoritmo LDHR	47
B. Índice de Transparencias	49
C. Bibliografía	50

1. Introducción



Serie de Líneas Aéreas

1



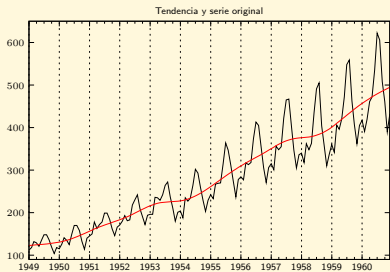


Enfoque ARIMA

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\xi_t, \quad \xi_t \sim \text{r.b. } (0, \sigma^2).$$

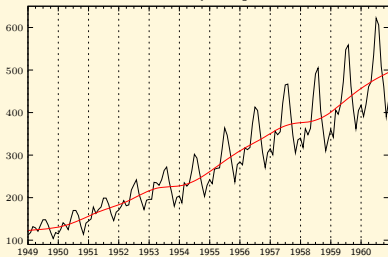
Enfoque de componentes no observables

$$y_t = T_t + S_t + e_t$$

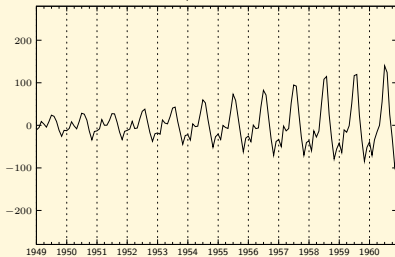




Tendencia y serie original

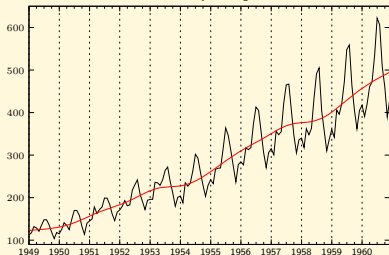


Componente Estacional

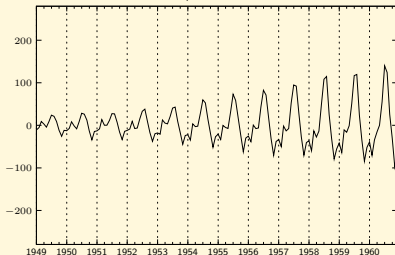




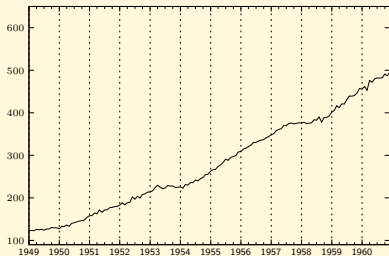
Tendencia y serie original



Componente Estacional

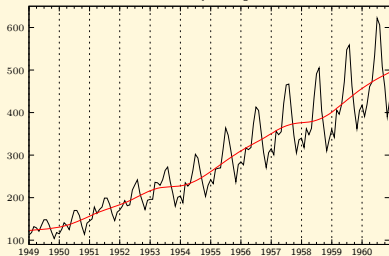


Serie des-estacionalizada

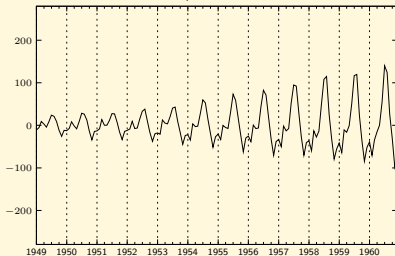




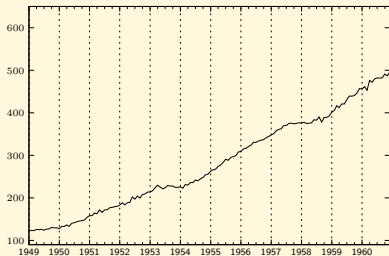
Tendencia y serie original



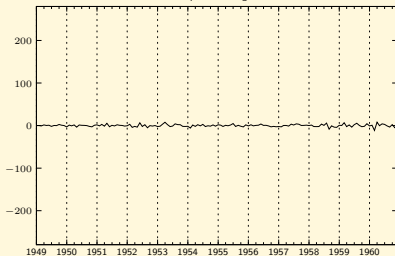
Componente Estacional



Serie des-estacionalizada



Componente Irregular

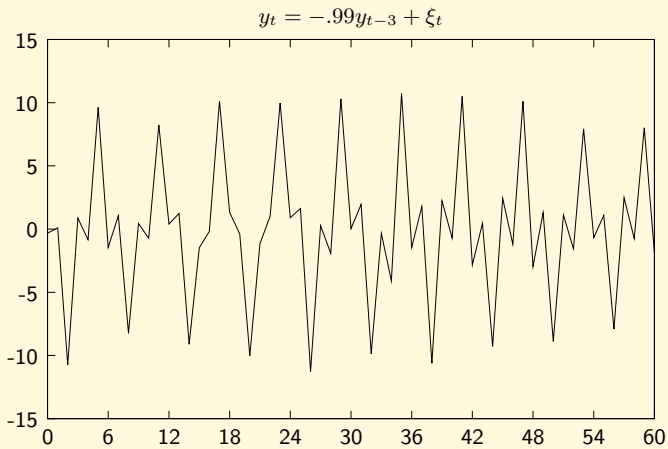




1. **Identificar** el **tipo de modelo** para cada componente
2. **Estimar** los **hiper-parámetros** de los modelos identificados
3. “Filtrar” los componentes
(estimar el valor esperado de cada componente en cada instante)

Regresión Armónica Dinámica Lineal (LDHR) se ocupa de los dos primeros pasos.

2. Breve introducción al análisis espectral





Autocovarianza k -ésima; relación entre:

desviación respecto a la esperanza en t con desviación que hubo en $t - k$.

$$\gamma_k = E\left((y_t - \mu) \cdot (y_{t-k} - \mu)\right)$$



Autocovarianza k -ésima; relación entre:

desviación respecto a la esperanza en t con desviación que hubo en $t - k$.

$$\gamma_k = E\left((y_t - \mu) \cdot (y_{t-k} - \mu)\right)$$

Función Generadora de Covarianzas: es la sucesión de autocovarianzas:

$$\Gamma(z) = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$$



Autocovarianza k -ésima; relación entre:

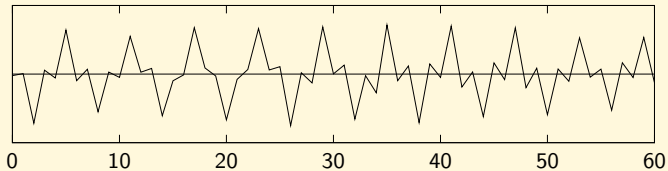
desviación respecto a la esperanza en t con desviación que hubo en $t - k$.

$$\gamma_k = E\left((y_t - \mu) \cdot (y_{t-k} - \mu)\right)$$

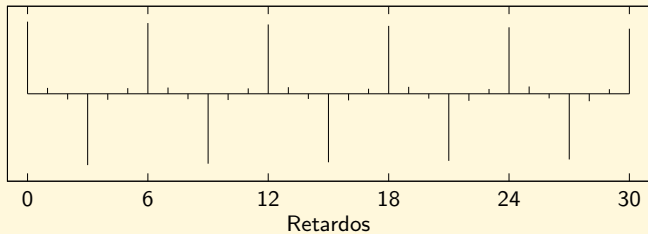
Función Generadora de Covarianzas: es la sucesión de autocovarianzas:

$$\Gamma(z) = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k.$$

2.1. Análisis en el ámbito del tiempo: las autocovarianzas



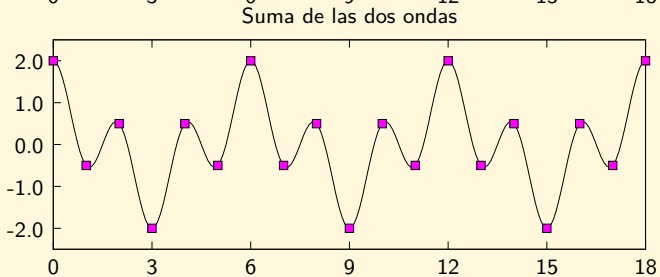
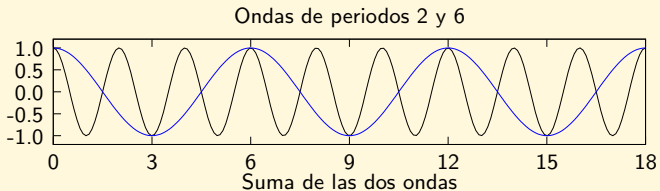
Función de autocovarianzas de la serie



Ejemplo 1. Veámoslo con la serie del ejemplo. Hay una señal muy clara para algunos retardos concretos. En este caso son los múltiplos de 3. La sucesión de autocovarianzas claramente nos indica que hay una fuerte relación negativa entre el valor en t y el valor en $t - 3$ (y consecuentemente también $t + 3$), y una fuerte relación positiva entre el valor en t y el valor en $t - 6$ (ó $t + 6$). Hay otros retardos importantes, pero debe subrayarse que su influencia decrece a medida que el retardo aumenta:

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma}(z) &= \mathbf{45.3}, 3.6, -3.6, -\mathbf{44.9}, -3.8, 3.5, \mathbf{44.4}, 3.9, -3.4, -\mathbf{44.0}, -4.0, 3.4, \mathbf{43.5}, \\ &= \mathbf{45.3} \cdot z^0 + 3.6 \cdot z^1 - 3.6 \cdot z^2 - \mathbf{44.9} \cdot z^3 - 3.8 \cdot z^4 + 3.5 \cdot z^5 + \mathbf{44.4} \cdot z^6 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\gamma}_k z^k\end{aligned}$$

2.2. Análisis en el ámbito de la frecuencia: el espectro





$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k.$$

Espectro es Transformada de Fourier de $\Gamma(z)$, es decir:

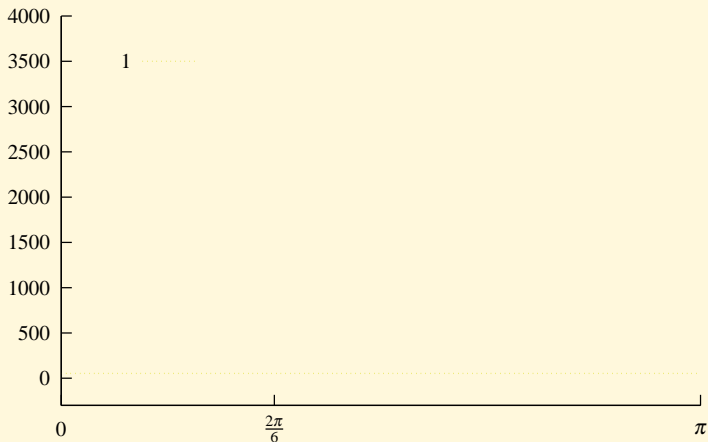
sustituir z^k por $\cos(k\omega)$, e interpretar \sum como sumatorio:

$$f(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \cos(k\omega); \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

(suma de funciones coseno)

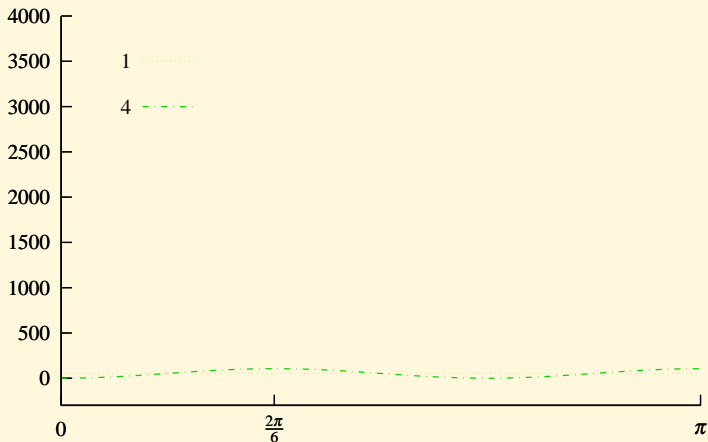


$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k=0}^0 \widehat{\gamma}_k \cos(k\omega)$$



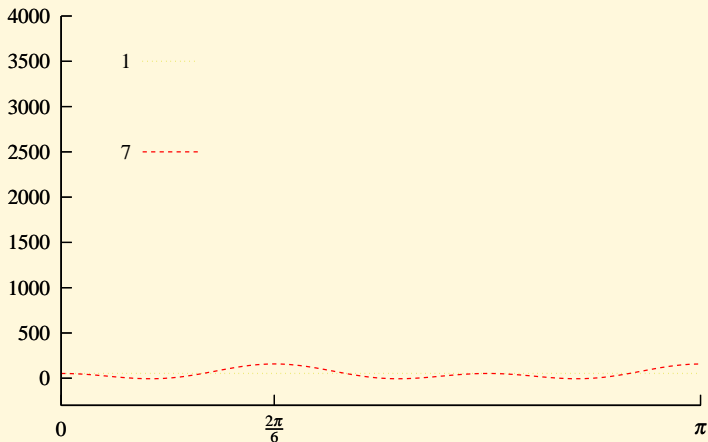


$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k=0}^3 \widehat{\gamma}_k \cos(k\omega)$$



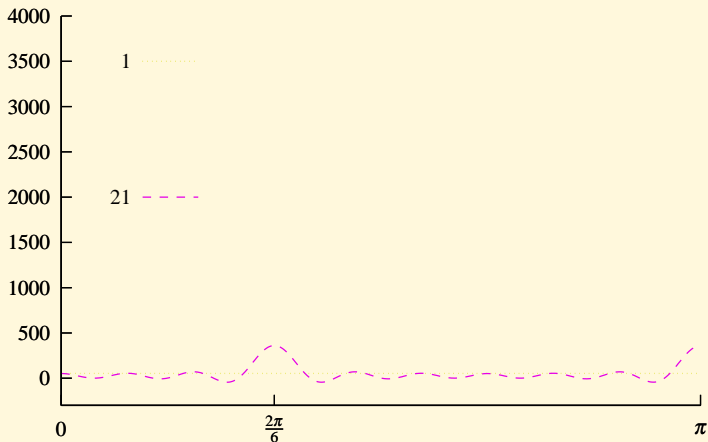


$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k=0}^6 \widehat{\gamma}_k \cos(k\omega)$$



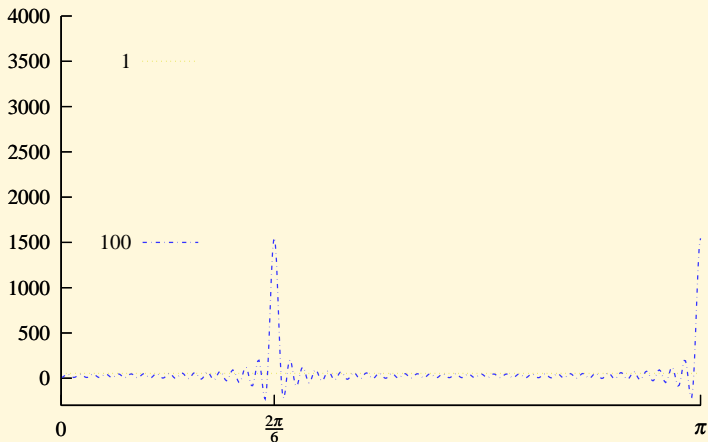


$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k=0}^{20} \widehat{\gamma}_k \cos(k\omega)$$



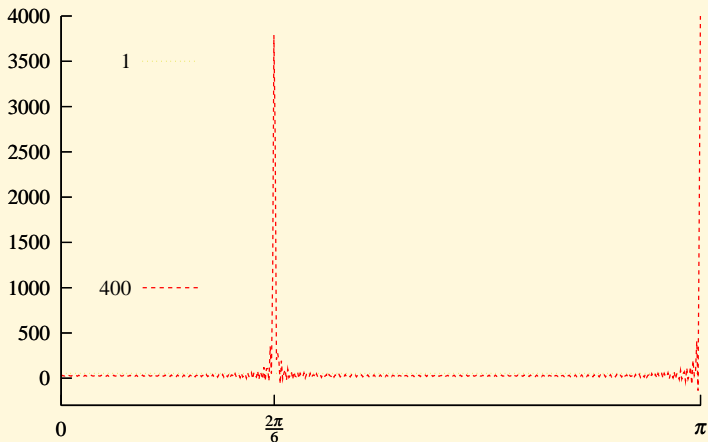


$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k=0}^{99} \widehat{\gamma}_k \cos(k\omega)$$



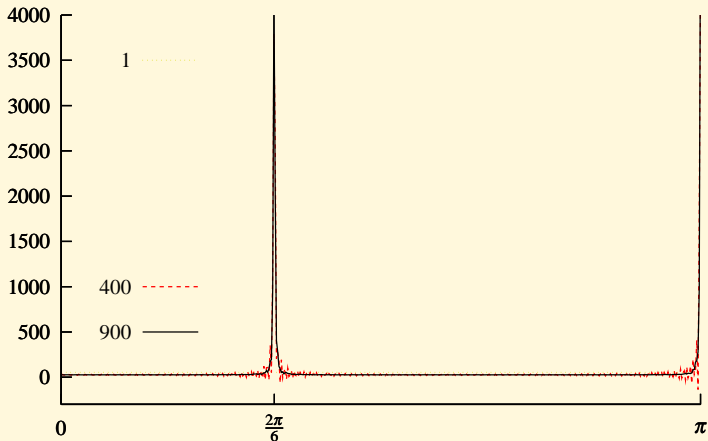


$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k=0}^{399} \widehat{\gamma}_k \cos(k\omega)$$

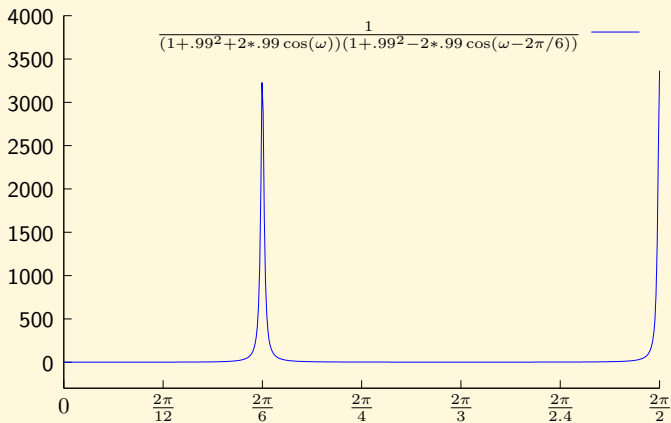




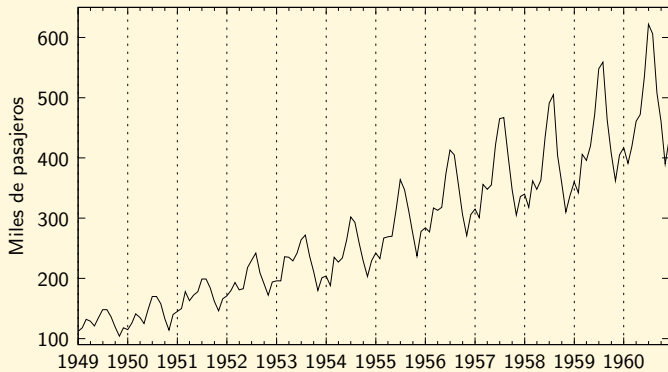
$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k=0}^{899} \widehat{\gamma}_k \cos(k\omega)$$

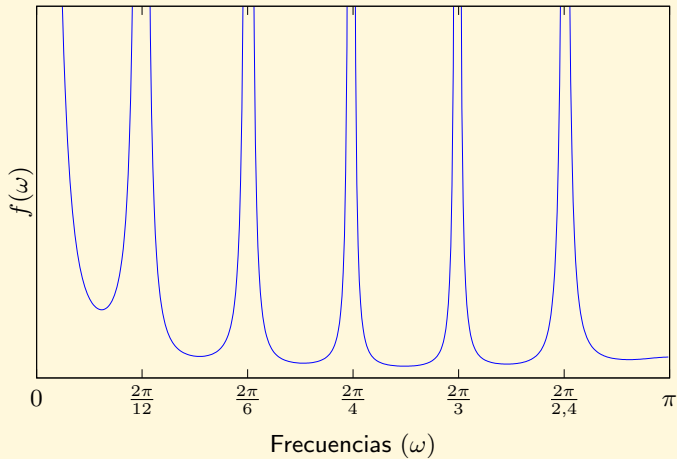


- Deducir en la pizarra el espectro de un proceso de ruido blanco.
- Comentar la etimología de la expresión “ruido blanco” .
- Explicar que si un proceso no es ruido blanco, se puede inferir su dinámica (extraer información).
- Definir lo que es un filtro (relacionar con un cristal de colores, o con un ecualizador de una cadena musical). Relacionar con los modelos ARMA.



2.3. El espectro de una serie bien conocida





3. Método DHR



$$y_t = T_t + S_t + e_t; \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

- *Tendencia* (o ciclo-tendencia): (T_t)
- *Componente estacional*: (S_t)
- *Componente irregular*: (e_t) ; $\{e_t\} \sim \text{r.b. } N(0, \sigma_e^2)$

3.1. Modelo teórico de los componentes DHR



$$s_t^{p_j} = a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t), \quad (3.2)$$

donde $\omega_j = \frac{2\pi}{p_j}$ es la frecuencia y p_j es el periodo.

$$s_t^{p_j} = a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t), \quad (3.2)$$

donde $\omega_j = \frac{2\pi}{p_j}$ es la frecuencia y p_j es el periodo.

a_{j_t} y b_{j_t} modulan amplitud oscilaciones

(procesos AR(1) o AR(2) no estacionarios con parámetros conocidos, excepto varianzas).



$$T_t = a_{0t} \cos(0 \cdot t) + b_{0t} \sin(0 \cdot t) = a_{0t}; \quad (3.3)$$



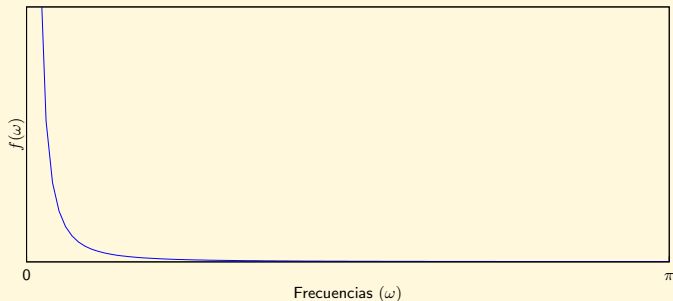
$$T_t = a_{0t} \cos(0 \cdot t) + b_{0t} \sin(0 \cdot t) = a_{0t}; \quad (3.3)$$

$$(1 - \alpha L)(1 - L)T_t = \xi_{0t-1}.$$



$$T_t = a_{0t} \cos(0 \cdot t) + b_{0t} \sin(0 \cdot t) = a_{0t}; \quad (3.3)$$

$$(1 - \alpha L)(1 - L)T_t = \xi_{0t-1}.$$

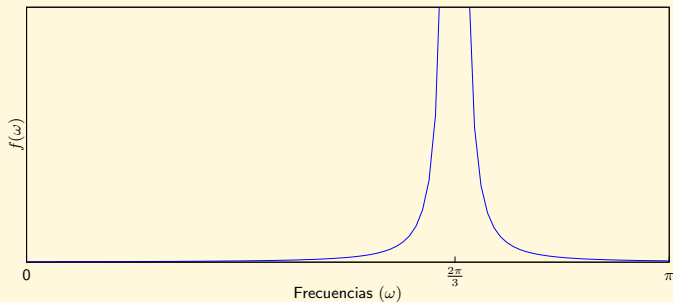




$$s_t^{pj} = a_{j_t} \cos(\omega_{j_t} t) + b_{j_t} \sin(\omega_{j_t} t) \quad (3.4)$$



$$s_t^{pj} = a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t) \quad (3.4)$$





$$y_t = \sum_{j=0}^R [a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t)] + e_t, \quad (3.5)$$

donde $j = 0$ corresponde a la tendencia.



$$y_t = \sum_{j=0}^R [a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t)] + e_t, \quad (3.5)$$

donde $j = 0$ corresponde a la tendencia.

Parámetros

- Conocidos: ω_j

$$y_t = \sum_{j=0}^R [a_{jt} \cos(\omega_j t) + b_{jt} \sin(\omega_j t)] + e_t, \quad (3.5)$$

donde $j = 0$ corresponde a la tendencia.

Parámetros

- Conocidos: ω_j
- “Supuestamente conocido”: modelo AR de procesos $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$

$$y_t = \sum_{j=0}^R [a_{j_t} \cos(\omega_j t) + b_{j_t} \sin(\omega_j t)] + e_t, \quad (3.5)$$

donde $j = 0$ corresponde a la tendencia.

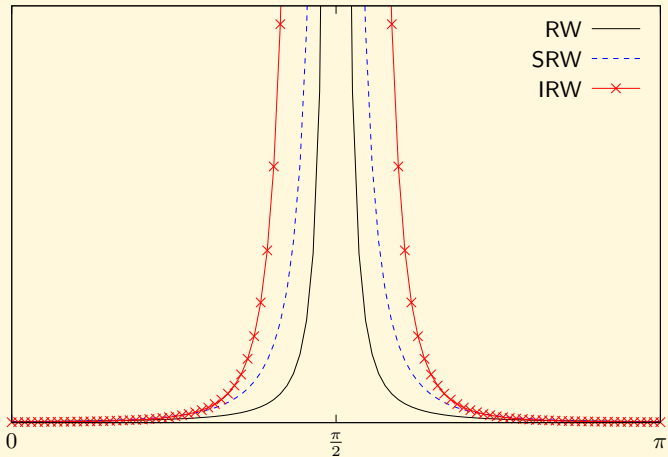
Parámetros

- Conocidos: ω_j
- “Supuestamente conocido”: modelo AR de procesos $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$
- **Desconocidos**: Varianzas innovaciones de los procesos $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$.

3.2. Análisis espectral del modelo DHR



Distintos modelos de $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$; (misma varianza innovaciones $\sigma_{\omega_j}^2$)

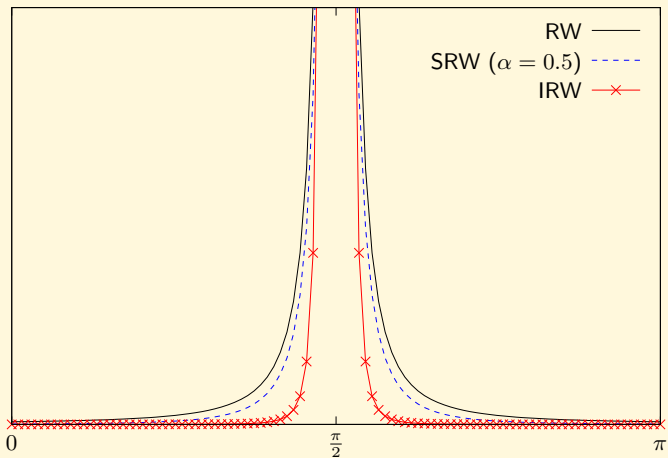


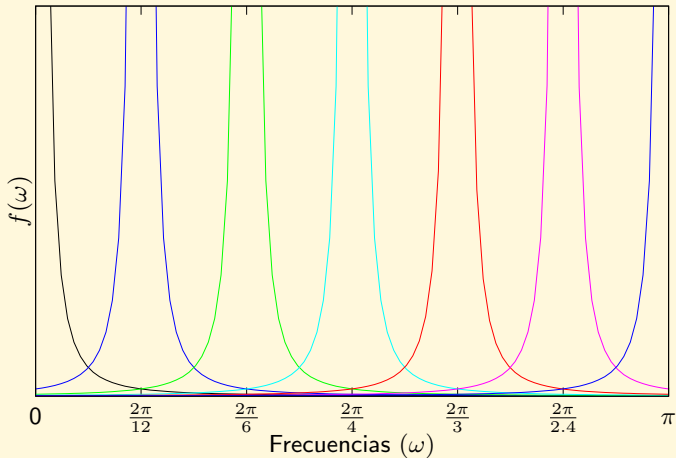


$$\sigma_{RW}^2 = 1$$

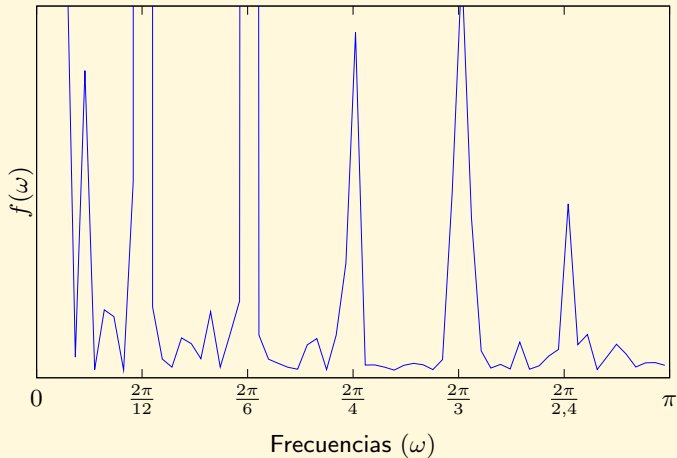
$$\sigma_{SRW}^2 = 0.2$$

$$\sigma_{IRW}^2 = 0.005$$





3.3. Estimación de las varianzas (optimización de los NVR)





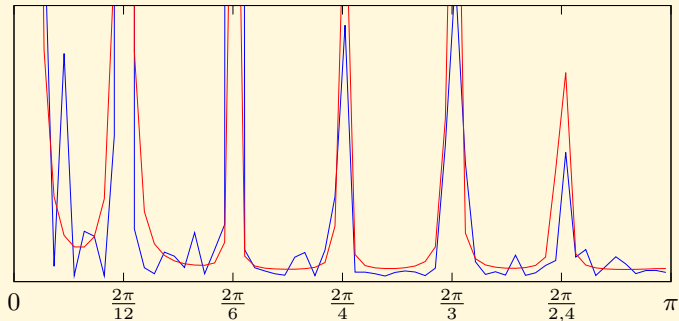
T	=	0.024902	IRW
s^{12}	=	0.317704	RW
s^6	=	0.022870	RW
s^4	=	0.031125	RW
s^3	=	0.083811	RW
$s^{2.4}$	=	0.042604	RW
s^2	=	0.026557	AR ($\alpha = 0.81$)

AR-espectro 0.13

Periodograma 0.22



T	=	0.024902	IRW		
s^{12}	=	0.317704	RW		
s^6	=	0.022870	RW	AR-espectro	0.13
s^4	=	0.031125	RW		
s^3	=	0.083811	RW	Periodograma	0.22
$s^{2.4}$	=	0.042604	RW		
s^2	=	0.026557	AR ($\alpha = 0.81$)		



$$\min_{[\boldsymbol{\sigma}^2] \in \mathbb{R}^{R+1}} \|f_y(\boldsymbol{\omega}) - f_{dhr}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}^2)\|,$$

donde

$$f_{dhr}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}^2) = \sum_{j=1}^R \sigma_j^2 f_{s^{p_j}}(\boldsymbol{\omega}) + \sigma_e^2.$$

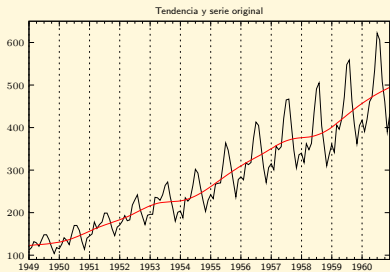
$$\text{y } \boldsymbol{\sigma}^2 = [\sigma_e^2, \sigma_{\omega_0}^2, \sigma_{\omega_1}^2, \dots, \sigma_{\omega_R}^2]'$$

3.4. Estimación de los componentes



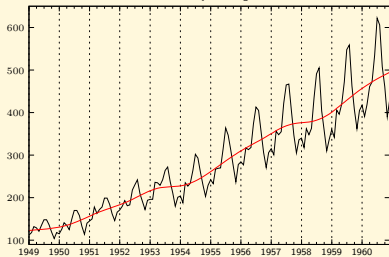
Una vez estimadas las varianzas desconocidas (*hiper-parámetros*)

- Formulación del modelo en Espacio de los Estados
- Filtro de Kalman (suavizado de intervalo fijo)

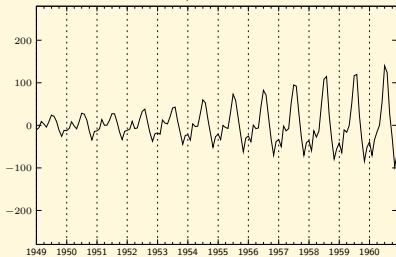




Tendencia y serie original

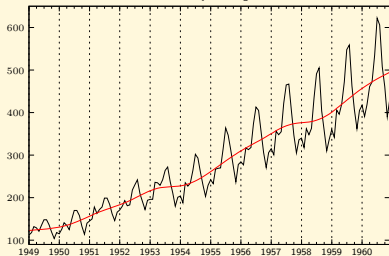


Componente Estacional

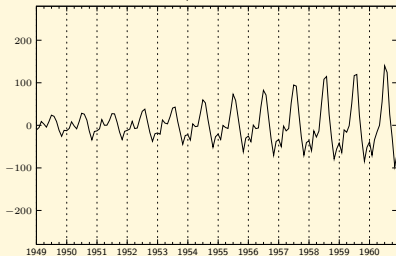




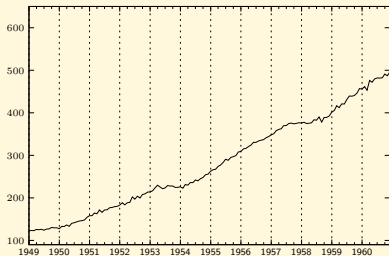
Tendencia y serie original



Componente Estacional

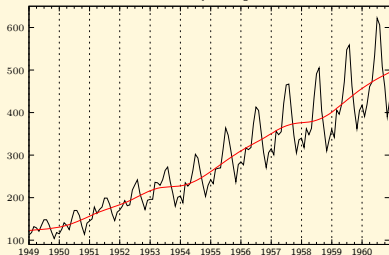


Serie des-estacionalizada

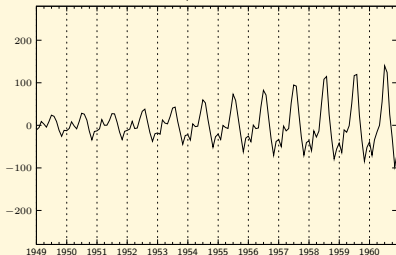




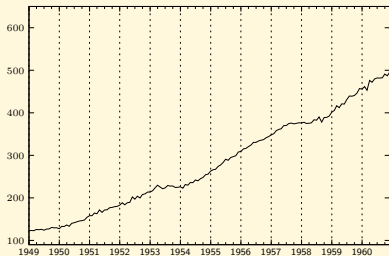
Tendencia y serie original



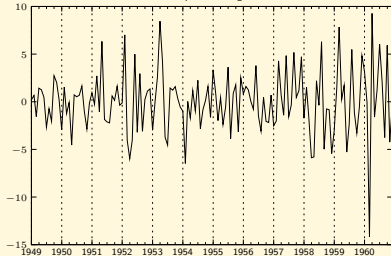
Componente Estacional

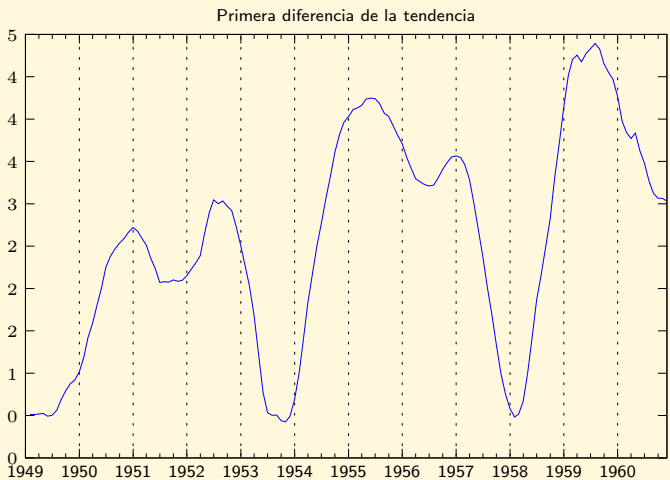


Serie des-estacionalizada



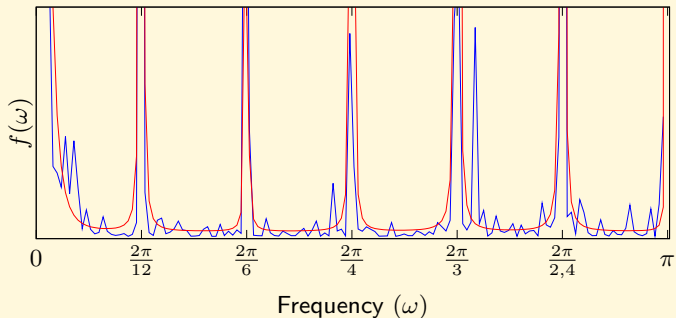
Componente Irregular





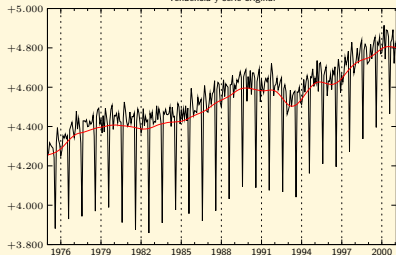


T	=	0.0049468	SRW ($\alpha = 0.91$)
s^{12}	=	0.0195749	RW
s^6	=	0.0064567	RW
s^4	=	0.0159155	RW
s^3	=	0.0273583	RW
$s^{2.4}$	=	0.0263764	RW
s^2	=	0.0023038	RW



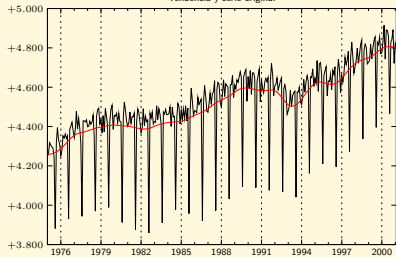


Tendencia y serie original

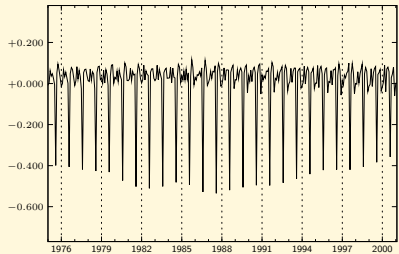




Tendencia y serie original

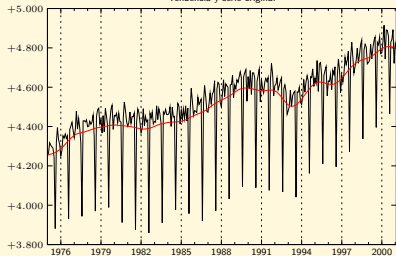


Componente Estacional

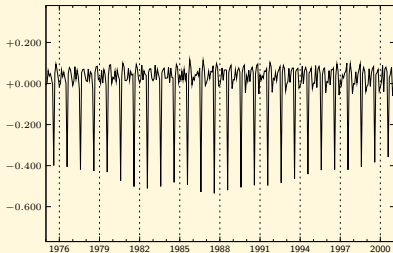




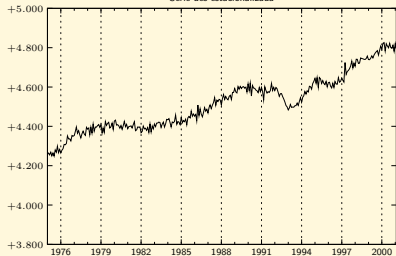
Tendencia y serie original



Componente Estacional

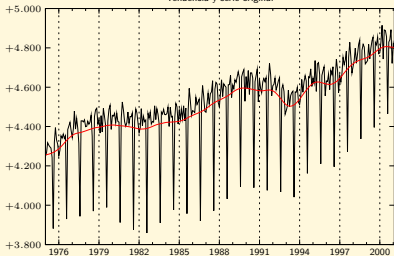


Serie des-estacionalizada

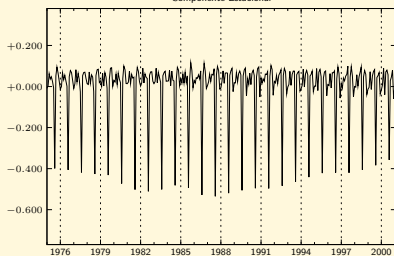




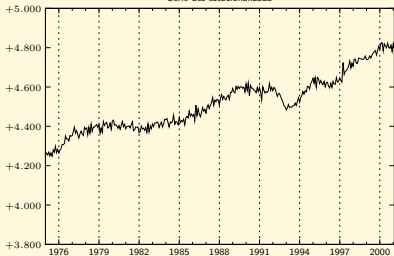
Tendencia y serie original



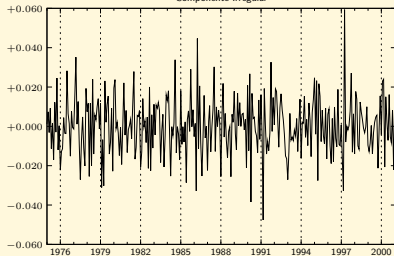
Componente Estacional



Serie des-estacionalizada

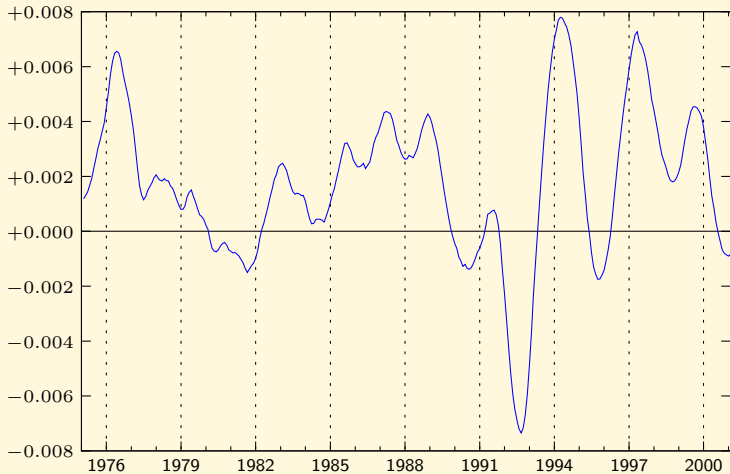


Componente Irregular

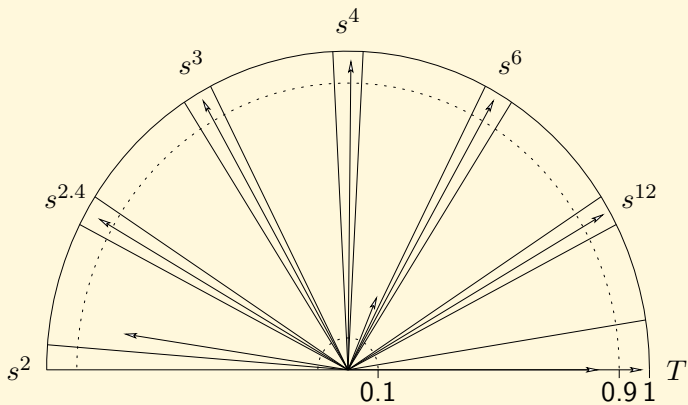




Primera diferencia de la tendencia



A. Identificación del modelo y estimación de los hiper-parámetros: el algoritmo LDHR



B. Índice de Transparencias

Lista de Transparencias

- 1 Serie de Líneas Aéreas
- 2 Modelo de componentes no observables
- 3 Componentes estimados: Serie de líneas aéreas
- 4 Pasos a seguir
- 5 Serie estacional simulada
- 6 Autocovarianza y Función Generadora de Covarianzas
- 7 Serie estacional simulada: autocovarianzas
- 8 Ondas deterministas
- 9 Función Generadora de Covarianzas y Espectro
- 10 Espectro estimado de la serie simulada
- 11 Espectro Teórico del proceso estacional simulado
- 12 Serie de Líneas Aéreas
- 13 AR(17) espectro de la serie de Líneas Aéreas
- 14 Modelo básico
- 15 Modelo teórico de los sub-componentes DHR
- 16 Modelo de la Tendencia
- 17 Modelo para cada componente estacional DHR
- 18 Modelo DHR completo

- 19 Espectro de un componente DHR
- 20 Espectro de un componente DHR
- 21 Espectro de los componentes DHR de un modelo mensual
- 22 Periodograma de la serie de Líneas Aéreas
- 23 Ajuste espectral: Serie de líneas aéreas
- 24 Estimación de los hiper-parámetros
- 25 Estimación de los componentes s_t^{Pj}
- 26 Componentes estimados: Serie de líneas aéreas
- 27 Componentes estimados: Serie de líneas aéreas
- 28 Ajuste espectral: Log IPI
- 29 Componentes estimados: Log IPI
- 30 Componentes estimados: Log IPI
- 31 Identificación: Raíces del polinomio AR ajustado

C. Bibliografía

Young, P. C., Pedregal, D., y Tych, W. (1999). Dynamic Harmonic Regression. *Journal of Forecasting*, vol. 18, 369–394.