

AULA 4 – LOGARITMOS

Introdução: No estudo de equações exponenciais, só tratamos de situações em que podíamos reduzir as potências à mesma base. Quando temos de resolver a equação (por exemplo) $(0,9)^x = 0,2$, não conseguimos reduzir todas as potências a mesma base. Para enfrentar esses e outros tipos de problemas, utilizamos os logaritmos.

Definição: Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se **logaritmo de b na base a** o expoente x ao qual deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b .

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Dizemos que:

- $\Rightarrow a$ é a **base** do logaritmo;
- $\Rightarrow b$ é o **logaritmando**;
- $\Rightarrow x$ é o **logaritmo**.

Vejam alguns exemplos de logaritmos:

- $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$
- $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$
- $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$
- $\log_4 1 = 0$, pois $4^0 = 1$
- $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ pois $2^{-2} = \frac{1}{4}$
- $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, pois $3^{1/2} = \sqrt{3}$

Nesses exemplos, o cálculo do logaritmo poderia ser feito mentalmente. Porém, há casos em que isso não é tão simples.

Exercícios resolvidos

1. Vamos calcular, por meio da definição:

a) $\log_{\sqrt[3]{9}} 3$

b) $\log_{16} 0,25$

2. Qual é o número real x em $\log_x 4 = -2$?

Convenção importante

Convencionou-se que, ao escrevermos o logaritmo de um número com a base omitida, estamos nos referindo ao logaritmo desse número em base 10, isto é:

$$\log x = \log_{10} x$$

Os logaritmos em base 10 são conhecidos como **logaritmos decimais**.

Consequências da definição

Sejam a , b e c números reais com $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$.

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades:

a) O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

b) O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

c) A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b .

$$a^{\log_a b} = b$$

d) Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Exercícios propostos e de aplicação

3. Vamos calcular o número real x tal que $\log_5(2x + 1) = \log_5(x + 3)$.

3. Qual é o valor de $9^{\log_3 5}$

4. Use a definição para calcular:

a) $\log_2 \frac{1}{4}$

b) $\log_3 \sqrt{3}$

c) $\log 0,01$

d) $\log_{0,2} \sqrt[3]{25}$

5. Obtenha, em cada caso, o valor de x :

a) $\log_5 x = \log_5 16$

b) $\log_3(4x - 1) = \log_3 x$

c) $\log x^2 = \log x$

6. Determine m a fim de que a equação $x^2 + 4x + \log_2 m = 0$, na incógnita x , admita uma raiz real dupla. Qual é essa raiz?

7. Calcule:

a) $4^{3+\log_4 2}$

b) $5^{1-\log_5 4}$

c) $8^{\log_2 7}$

d) $81^{\log_3 2}$

8. Qual é o valor de cada uma das expressões seguintes?

a) $\log_5 5 + \log_3 1 - \log 10$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_4 \frac{1}{4}$

c) $\log 1000 + \log 100 + \log 10 + \log 1$