

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

**Um Estudo Preliminar sobre Lógicas
Modais Rotuladas e Representação do
Conhecimento**

por

ALINE VIEIRA MALANOVICZ
T.I. 1070 PPGC-UFRGS
TRABALHO INDIVIDUAL II

Luís da Cunha Lamb
Orientador

Tiarajú Asmuz Diverio
Co-orientador

Porto Alegre, Março de 2003.

Sumário

Lista de Figuras	4
Lista de Tabelas	5
1 Sistemas Dedutivos Rotulados Modais	9
1.1 Conceitos básicos	9
1.1.1 Lógica clássica de primeira ordem	10
1.1.2 A tradução padrão	12
1.1.3 Formalização explícita de lógicas modais	13
1.2 A linguagem dedutiva rotulada modal	15
1.3 Teorias dedutivas rotuladas modais	17
1.4 Um sistema de dedução natural para MLDS	21
1.4.1 Regras para os conectivos clássicos	23
1.4.2 Regras para os operadores modais	25
1.4.3 Regras estruturais	29
1.5 Uma semântica	32
1.6 Estendendo o sistema dedutivo rotulado modal	37
1.7 Comentários	38
2 Propriedades de Sistemas Dedutivos Rotulados Modais	40
2.1 Correção	40
2.2 Completude	46
2.2.1 Noções preliminares	46
2.2.2 Descrição da prova da completude	51
2.2.3 Provas formais	52
2.3 Correspondência	65
2.4 Estendendo resultados das propriedades	72
2.5 Comentários	74
3 Lógica Modal para Representação do Conhecimento	76
3.1 Raciocínio sobre conhecimento em sistemas multiagentes	76
3.1.1 Exemplos clássicos	77
3.2 O modelo clássico	79
3.2.1 Interpretações dos operadores modais epistêmicos	80
3.2.2 Propriedades importantes da relação de acessibilidade	83
3.3 Sintaxe	85

3.3.1	A lógica modal $KT45^n$	85
3.4	Semântica	87
3.5	Sistemas de prova	91
3.5.1	Dedução natural para $KT45^n$	92
3.5.2	Formalizando os exemplos	94
Bibliografia	103

Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Diagrama	18
FIGURA 1.2 – Configuração	18
FIGURA 1.3 – Regra de Eliminação do \diamond	27
FIGURA 2.1 – Diagrama da Prova do Teorema da Correção	42
FIGURA 2.2 – Diagrama da Prova do Teorema da Completude	52
FIGURA 3.1 – Leituras interessantes de $\Box\varphi$	80
FIGURA 3.2 – Modelo para KT45	88

Lista de Tabelas

TABELA 1.1 – Definição formal da configuração da Figura 1.2	19
TABELA 1.2 – Exemplos de álgebras de rotulação	21
TABELA 1.3 – Regras para os conectivos clássicos	24
TABELA 1.4 – Regras para os operadores modais	26
TABELA 3.1 – Leituras de \diamond correspondentes a cada leitura de \square	81
TABELA 3.2 – Esquemas de fórmulas válidos para as diversas leituras de \square da Figura 3.1	82
TABELA 3.3 – Significado de R para cada leitura de \square	84
TABELA 3.4 – Propriedade de R correspondente a algumas fórmulas	92
TABELA 3.5 – Regras de dedução natural para $KT45^n$	93
TABELA 3.6 – Uma prova de $C(p \vee q), K_1(K_2p \vee K_2\neg p), K_1\neg K_2q \vdash K_1p$. .	94
TABELA 3.7 – Prova do seqüente “Implicação 1” para o quebra-cabeça dos homens sábios	96
TABELA 3.8 – Uma representação mais compacta da prova da figura anterior .	97
TABELA 3.9 – Prova do seqüente “Implicação 2” para o quebra-cabeça dos homens sábios	98
TABELA 3.10 – Prova do seqüente “Implicação 1” para o quebra-cabeça das crianças sujas	99
TABELA 3.11 – A prova de $\Gamma, C(\neg\alpha_G), \alpha_H \vdash K_i p_i$ usada para provar a “Im- plicação 2” para o quebra-cabeça das crianças sujas	100

Resumo

Este trabalho apresenta a pesquisa realizada sobre a utilização de *sistemas rotulados* [GAB96] em lógicas modais para representação do conhecimento [FAG95]. As lógicas modais do conhecimento (lógicas epistêmicas) tratam de argumentos que envolvem conceitos referentes ao conhecimento que um agente possui sobre a verdade (ou a falsidade) de uma sentença. O interesse nessas lógicas é justificado, pois elas são utilizadas para especificar e raciocinar sobre propriedades comportamentais de modelos e aplicações em Ciência da Computação. Os sistemas rotulados, devido à sua uniformidade e capacidade de generalização, são utilizados como uma abordagem unificadora de lógicas. Apresentamos aqui o sistema de dedução natural rotulada para lógica modal proposicional (sua sintaxe, sua semântica, e propriedades como correção, completude e correspondência). Estudamos também, de forma geral, as lógicas modais para representação do conhecimento: sua sintaxe, sua semântica e seus sistemas de prova. Ilustramos a utilização do sistema de prova estudado, apresentando a aplicação do mesmo a exemplos clássicos da área de raciocínio sobre o conhecimento de agentes. Ao final do texto, esboçamos as conclusões e os trabalhos futuros suscitados pela pesquisa.

Palavras-chave: lógicas modais, sistemas dedutivos rotulados para lógicas modais, lógicas modais do conhecimento, lógicas epistêmicas, dedução natural para lógicas modais do conhecimento.

Abstract

This work presents preliminary research results about the use of Labelled Deductive Systems for modal logics of knowledge [FAG95]. The subject of study of Modal logics of knowledge (epistemic logics) is the representation of the truth of an individual agent statement and the formalisation of an agent argumentation. These logics have been used in Computing Science to build behavioural models and specifications. Labelled Deductive Systems allow for a uniform presentation of logical systems. In this work we study a labelled natural deduction system for modal logics, its syntactic characterisation, its semantics and we study metaproperties of the system such as soundness, completeness and correspondence theorems. We also present, to a lesser extent, a study of modal logics of knowledge, its syntax, semantics and proof theory. We illustrate the use of such systems by studying the application of the modal logics of knowledge to classical testbeds in the area of knowledge representation. We then conclude and sketch a few directions for future work.

Keywords: modal logics; Labelled Deductive Systems for modal logics; modal logics of knowledge; epistemic logics; natural deduction for modal logics of knowledge.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo continuar a pesquisa iniciada no Trabalho Individual I [MAL2002]. Conforme indicado na proposta anterior, estudaremos aqui a utilização de *sistemas rotulados* [GAB96] em lógicas modais para representação do conhecimento [FAG95].

Como motivação para o estudo do raciocínio sobre conhecimento e das possibilidades de aplicações desse raciocínio envolvendo sistemas dedutivos rotulados modais (MLDS) proposicionais, Halpern [HAL95] menciona alguns tópicos considerados linhas de pesquisa importantes:

- Análise de protocolos utilizando ferramentas de conhecimento. Seria particularmente interessante ver se pensar em termos de adversários pode dar-nos mais visão de protocolos aleatórios. Tendo um corpo de exemplos maior, poderíamos testar mais e desenvolver mais nossa intuição.
- Obtenção de modelos de conhecimento mais realísticos, que incorporassem raciocínio limitado por recursos, probabilidade e a possibilidade de erros.
- Obtenção de um entendimento mais profundo sobre a inter-relação entre vários modos de raciocínio sob incerteza.

Sistemas rotulados, devido à sua uniformidade e capacidade de generalização, têm sido utilizados como uma abordagem unificadora de lógicas. Isso permite que lógicas de diferentes famílias sejam apresentadas de maneira uniforme em um único *framework*. Neste trabalho, apresentaremos o sistema de dedução natural rotulada para lógica modal.

São estudadas as suas propriedades fundamentais como completude e correção, tendo em vista a apresentação rotulada desses sistemas. A seguir, são estudadas, de forma geral, as lógicas modais para representação do conhecimento: sua sintaxe, sua semântica e seus sistemas de prova.

A utilização do sistema de prova estudado é ilustrada com a aplicação do mesmo a exemplos clássicos da área de raciocínio sobre o conhecimento de agentes, tais como *muddy children puzzle* (o quebra-cabeça das crianças sujas de lama) e o *wise men puzzle* (o quebra-cabeça dos homens sábios) Como o objetivo principal de nossa pesquisa é estudar sistemas de prova rotulados para lógicas de representação do conhecimento, este trabalho contribuirá significativamente para o andamento futuro do trabalho de pesquisa.

1 Sistemas Dedutivos Rotulados Modais

Neste capítulo, descrevemos uma abordagem nova para lógica modal, baseada em [BRO2002], aplicável a lógicas de estruturas semânticas distintas, que gera uma classe de formalismos cada um dos quais é sintaticamente mais caro do que o seu correspondente tradicional implícito, porém descreve, de uma maneira natural, genérica e uniforme, sua estrutura semântica associada. Esses sistemas são chamados de Sistemas Dedutivos Rotulados Modais (MLDS). A abordagem é inspirada pelo trabalho que Gabbay [GAB96] vem desenvolvendo em uma estrutura de trabalho “LDS” unificadora e bastante geral, que poderá ser usada para estudar as similaridades e as relações entre muitos estilos diferentes de lógicas.

Também são apresentadas as noções básicas e a sintaxe de um sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) proposicional baseado na abordagem de dedução natural. Além disso, é definida uma semântica para o sistema de prova de estilo de dedução natural para o MLDS proposicional. Esse é uniforme no sentido de que as regras de dedução natural individuais são independentes da álgebra de rotulação particular. A semântica é definida com base em uma tradução para lógica de primeira ordem.

As propostas de Gabbay [GAB96] para o desenvolvimento de Sistemas Dedutivos Rotulados são amplamente baseadas na observação de que a maioria das lógicas difere umas das outras apenas em aspectos “pequenos”, relacionados a variações menores ou em suas teorias de prova ou em sua semântica. O mesmo é verdade para lógicas modais, pois suas diferenças são ditadas apenas por propriedades diferentes da relação de acessibilidade. Essas também impõem efetivamente condições extra sobre o uso da regra básica [*Nec*] (regra *Nec*: dado α , derive $\Box\alpha$).

A metodologia LDS facilita uma maneira de representar esses tipos de variações explicitamente dentro da lógica, para permitir uma estrutura de trabalho básica e unificadora na qual lógicas diferentes possam encontrar uma formalização comum. Isso é obtido, formando-se pares de informações lógicas (isto é, *wff* – fórmulas bem formadas) com *rótulos* que “codificam” informações sobre as propriedades “metanível” explicitamente de dentro da linguagem objeto. Além da teoria lógica, é definida uma *álgebra de rotulação*, que representa as propriedades que diferenciam uma lógica da outra. As regras de inferência agem sobre os dois componentes sintáticos (fórmulas lógicas e rótulos), de acordo com as propriedades desejadas dos conectivos da álgebra rotuladora.

Segundo Broda [BRO2002], resultados recentes mostram que essa abordagem realmente facilita o desenvolvimento de um sistema de prova uniforme para uma ampla família de *lógicas subestruturais* [DGA94], na qual modificações apropriadas da álgebra rotuladora implicam lógicas subestruturais diferentes, deixando todo o conjunto de regras de inferência inalterado. Resultados semelhantes são mostrados neste trabalho para a família de lógicas modais. A álgebra rotuladora apresentada captura as informações sobre a relação de acessibilidade semântica entre os mundos possíveis.

1.1 Conceitos básicos

Iniciaremos apresentando brevemente a lógica clássica de 1ª ordem, pois consiste na base de todo o processo de tradução utilizado pelos sistemas dedutivos rotulados. Em

seguida, apresentamos a tradução padrão (implícita) e, logo após, a formalização dita “explícita”, para então tratarmos da linguagem, das teorias e dos sistemas dedutivos rotulados modais e de suas propriedades.

1.1.1 Lógica clássica de primeira ordem

Nesta seção, baseada em [GAB2003], apresentaremos a tradução padrão que inclui a linguagem modal dentro da linguagem da lógica clássica de primeira ordem (ou lógica de predicados). Damos um breve resumo das definições e propriedades fundamentais que usaremos mais tarde. Boas apresentações da lógica clássica de 1ª ordem são, por exemplo, [END72], [SHO67] e [BAR77].

A linguagem de primeira ordem (ou de predicados) \mathcal{PL} com que lidamos neste trabalho é baseada no seguinte alfabeto:

- *símbolos de predicados*: P_0, P_1, \dots (ou P, Q, R, S, \dots);
- *constantes individuais*: c_0, c_1, \dots (ou a, b, c, d, \dots);
- uma lista contavelmente infinita de *variáveis individuais*: x_0, x_1, \dots (ou x, y, z, \dots);
- as *constantes lógicas*: \perp e \top ;
- os *conetivos lógicos booleanos*: $\wedge, \vee, \rightarrow$ e \neg ;
- o *quantificador universal* \forall ;
- o *quantificador existencial* \exists .

Juntos, os símbolos de predicados e as constantes individuais formam a assinatura de \mathcal{PL} . Como é usual, assumimos que cada símbolo de predicado é de alguma aridade fixa ≥ 0 , que a assinatura contém (contavelmente) infinitos símbolos de predicados de cada aridade, e que o conjunto de constantes individuais também é contavelmente infinito. E assumimos que a linguagem \mathcal{PL} é recursiva no sentido em que sempre podemos reconhecer efetivamente seus símbolos de predicados com suas aridades, constantes e variáveis individuais. Algumas vezes, consideramos *sublinguagens de \mathcal{PL}* com assinaturas menores (mas com o mesmo conjunto de símbolos que não são da assinatura como em \mathcal{PL}).

A *igualdade* = não é um símbolo de \mathcal{PL} , e \mathcal{PL} não contém símbolos de função diferentes de constantes. Ocasionalmente, usaremos a linguagem $\mathcal{PL}^=$, cujo alfabeto estende o de \mathcal{PL} com o símbolo de predicado binário =.

Variáveis e constantes individuais também são conhecidas como *termos*. Fórmulas de qualquer sublinguagem de \mathcal{PL} são definidas indutivamente como segue. Se P é um símbolo de assinatura de predicado n -ário, e t_1, \dots, t_n são termos de assinatura, então $P(t_1, \dots, t_n)$ é uma *fórmula (atômica)*. (Se P é binário, então, às vezes, escrevemos $t_1 P t_2$ ao invés de $P(t_1, t_2)$.) Constantes lógicas também são fórmulas (atômicas).

No caso de $\mathcal{PL}^=$, temos $t_1 = t_2$ como fórmulas atômicas para todo t_1 e t_2 .

Se φ, ψ são fórmulas, e x é uma variável individual, então também são fórmulas $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \neg \varphi, \forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$. Algumas convenções sobre pontuação e representação de fórmulas da Lógica Clássica Proposicional estudadas em nosso trabalho anterior, [MAL2002], são estendidas com a seguinte convenção: $\forall x$ e $\exists x$ têm a mesma prioridade que \neg . Uma ocorrência de uma variável x em uma fórmula φ é *ligada* se essa ocorrência baseia-se no escopo de $\forall x$ ou de $\exists x$; caso contrário, a ocorrência de x é *livre*. Fórmulas sem variáveis livres são chamadas de *sentenças*. Se φ é uma fórmula, t é um termo, e x é uma variável, então $\varphi\{t/x\}$ denota o resultado da substituição simultânea de t por todas

as ocorrências livres de x em φ . Dizemos que t é livre para x em φ se nenhuma variável em t torna-se limitada em $\varphi\{t/x\}$. Escrevemos $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ para indicar que todas as variáveis livres de φ estão entre x_0, \dots, x_n .

\mathcal{PL} e suas sublinguagens são interpretadas em *estruturas de primeira ordem* da forma $I = \langle D^I, P_0^I, \dots, c_0^I, \dots \rangle$, onde

- D^I é um conjunto não vazio, o domínio de I ;
- para qualquer símbolo de predicado P_i da atribuição, P_i^I é uma relação sobre D^I com a mesma aridade que P_i ;
- para qualquer constante individual c_i na atribuição, c_i^I é um elemento de D^I .

Uma atribuição em I é uma função \mathbf{a} , de um conjunto de variáveis individuais, para D^I . O valor $\mathbf{a}(t)$ de um termo t em I sob a atribuição \mathbf{a} é $\mathbf{a}(x)$ se t é uma variável x , e c^I , se t é uma constante c .

A relação-verdade $I \models^{\mathbf{a}} \varphi$ (em palavras: “ φ é verdadeira em I sob a atribuição \mathbf{a} ”) é definida por indução na construção de φ da seguinte forma:

- $I \models^{\mathbf{a}} P_i(t_1, \dots, t_n)$ sse $\langle \mathbf{a}(t_1), \dots, \mathbf{a}(t_n) \rangle \in P_i^I$;
- $I \models^{\mathbf{a}} \top$ e $I \not\models^{\mathbf{a}} \perp$;
- $I \models^{\mathbf{a}} \psi \wedge \chi$ sse $I \models^{\mathbf{a}} \psi$ e $I \models^{\mathbf{a}} \chi$;
- $I \models^{\mathbf{a}} \psi \vee \chi$ sse $I \models^{\mathbf{a}} \psi$ ou $I \models^{\mathbf{a}} \chi$;
- $I \models^{\mathbf{a}} \psi \rightarrow \chi$ sse $I \models^{\mathbf{a}} \chi$ sempre que $I \models^{\mathbf{a}} \psi$;
- $I \models^{\mathbf{a}} \neg \psi$ sse $I \not\models^{\mathbf{a}} \psi$;
- $I \models^{\mathbf{a}} \forall x \psi$ sse $I \models^{\mathbf{b}} \psi$ para qualquer designação \mathbf{b} em I tal que $\mathbf{a}(y) = \mathbf{b}(y)$ para todas as variáveis y diferentes de x ;
- $I \models^{\mathbf{a}} \exists x \psi$ sse $I \models^{\mathbf{b}} \psi$ para alguma designação \mathbf{b} em I tal que $\mathbf{a}(y) = \mathbf{b}(y)$ para todas as variáveis y diferentes de x .

No caso de $PL^=$, adicionamos outro item: $I \models^{\mathbf{a}} t_1 = t_2$ sse $\mathbf{a}(t_1) = \mathbf{a}(t_2)$.

Portanto, a veracidade de uma fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ em I sob uma atribuição \mathbf{a} depende somente dos valores $a_1 = \mathbf{a}(x_1), \dots, a_n = \mathbf{a}(x_n)$. Então, em vez de $I \models^{\mathbf{a}} \varphi$, escrevemos, às vezes, $I \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Se $I \models^{\mathbf{a}} \varphi$ é válida para todas as designações \mathbf{a} em I , dizemos que φ é verdadeira em I e escrevemos $I \models \varphi$. Um conjunto Γ de fórmulas é verdadeiro em I se cada uma das fórmulas de Γ é verdadeira em I . Γ é verdadeiro em uma classe C de estruturas de primeira ordem (em símbolos: $C \models \Gamma$) se $I \models \Gamma$ para todos os $I \in C$. A teoria de C é o conjunto de sentenças que são verdadeiras em C . Dizemos que um conjunto Δ de sentenças implica uma sentença φ (ou que φ é uma consequência de Δ) e escrevemos $\Delta \models \varphi$, se φ é verdadeira em I toda vez que Δ é verdadeira em I , para qualquer estrutura I de primeira ordem. Dada uma sublinguagem de \mathcal{PL} , definimos a *lógica clássica de primeira ordem* (daquela sublinguagem) como o conjunto de fórmulas que são verdadeiras em todas as estruturas de primeira ordem (da atribuição apropriada) e denotamos essa lógica (abusando levemente da notação) por **QCI** (“**CI** quantificada”). As fórmulas de **QCI** são freqüentemente chamadas de *classicamente válidas*. De maneira similar, **QCI**⁼ denota a *lógica clássica de primeira ordem com igualdade*.

Sintaticamente, **QCI** pode ser definida por um cálculo com os seguintes esquemas de axiomas e regras de inferência.

Esquema de axiomas:

- (A1) – (A10) da lógica clássica proposicional **CI** considerado como *esquema de axiomas* (no sentido em que as variáveis proposicionais p_i podem ser substituídas por fórmulas arbitrárias da sublinguagem de \mathcal{PL} dada);

$$(A1) \quad p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0),$$

$$(A2) \quad (p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2)),$$

$$(A3) \quad p_0 \wedge p_1 \rightarrow p_0,$$

$$(A4) \quad p_0 \wedge p_1 \rightarrow p_1,$$

$$(A5) \quad p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0 \wedge p_1),$$

$$(A6) \quad p_0 \rightarrow p_0 \vee p_1,$$

$$(A7) \quad p_1 \rightarrow p_0 \vee p_1,$$

$$(A8) \quad (p_0 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_0 \vee p_1 \rightarrow p_2)),$$

$$(A9) \quad \perp \rightarrow p_0,$$

$$(A10) \quad p_0 \vee (p_0 \rightarrow \perp).$$

- $\forall x\varphi \rightarrow \varphi\{t/x\}$, onde t é livre para x em φ ;
- $\varphi\{t/x\} \rightarrow \exists x\varphi$, onde t é livre para x em φ .

Regras de inferência:

- modus ponens (MP);
- dado $\psi \rightarrow \varphi$, derive $\psi \rightarrow \forall x\varphi$, sempre que x não for livre em ψ ;
- dado $\varphi \rightarrow \psi$, derive $\exists x\varphi \rightarrow \psi$, sempre que x não for livre em ψ .

A fórmula φ é *derivável* a partir de um conjunto Γ de fórmulas se houver uma seqüência de fórmulas terminando com φ e tal que cada membro da seqüência:

- ou está em Γ ;
- ou é uma instância de substituição de um esquema de axiomas;
- ou é obtida a partir de membros anteriores da seqüência por aplicação de uma regra de inferência.

De acordo com o teorema da completude de Gödel, para cada conjunto Γ de sentenças, e para cada sentença φ , temos $\Gamma \models \varphi$ sse φ for derivável a partir de Γ .

1.1.2 A tradução padrão

Considere a sublinguagem de \mathcal{PL} com contavelmente muitos símbolos de predicado unário P_0, P_1, \dots e um único símbolo de predicado binário R . A *tradução padrão* $.*$ de \mathcal{ML} -fórmulas para essa linguagem de primeira ordem é definida indutivamente como segue, onde x é uma variável individual fixa. (Apresentamos a definição indutiva da tradução para todas as constantes e conetivos lógicos $\top, \perp, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \square$ e \diamond , embora fosse suficiente defini-la para, digamos, \wedge, \neg e \square .)

$$\begin{aligned} p_i^* &= P_i(x), \\ \top^* &= \top, \\ \perp^* &= \perp, \\ (\varphi \wedge \psi)^* &= \varphi^* \wedge \psi^*, \\ (\varphi \vee \psi)^* &= \varphi^* \vee \psi^*, \\ (\varphi \rightarrow \psi)^* &= \varphi^* \rightarrow \psi^*, \\ (\neg\varphi)^* &= \neg\varphi^*, \\ (\square\psi)^* &= \forall y(xRy \rightarrow \psi^*\{y/x\}), \\ (\diamond\psi)^* &= \exists y(xRy \wedge \psi^*\{y/x\}). \end{aligned}$$

Aqui y é uma variável nova que não ocorre em ψ^* . Como φ^* sempre tem pelo menos uma variável livre, podemos definir a tradução \star de uma maneira em que φ^* contenha, no máximo, duas variáveis (simplesmente reusando a segunda variável disponível, que não é livre em ψ^* , nas definições de $(\Box\psi)^*$ e de $(\Diamond\psi)^*$).

Cada modelo de Kripke $\mathbf{M} = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle$ pode ser considerado como uma estrutura de primeira ordem $I(\mathbf{M}) = \langle D^{I(\mathbf{M})}, R^{I(\mathbf{M})}, P_0^{I(\mathbf{M})}, P_1^{I(\mathbf{M})}, \dots \rangle$ para a sublinguagem de $\mathcal{P}\mathcal{L}$ acima, onde $D^{I(\mathbf{M})}$ é o conjunto de mundos em \mathbf{F} , $P_i^{I(\mathbf{M})} = \mathbf{v}(p_i)$, para cada i , e $R^{I(\mathbf{M})}$ é a relação de acessibilidade em \mathbf{F} . Percebe-se então que, para cada $\mathcal{M}\mathcal{L}$ -fórmula φ , cada modelo de Kripke \mathbf{M} e cada mundo ω em \mathbf{M} , temos $(\mathbf{M}, \omega) \models \varphi$ sse $I(\mathbf{M}) \models \varphi^*[\omega]$.

Por outro lado, cada estrutura de primeira ordem da forma $I = \langle D^I, R^I, P_0^I, \dots \rangle$ pode ser considerada como um modelo de Kripke $\mathbf{M}(I) = \langle \mathbf{F}(I), \mathbf{v}(I) \rangle$, onde $\mathbf{F}(I) = \langle D^I, R^I \rangle$, e $\mathbf{v}(I)(p_i) = P_i^I$, para todo i . E então temos, para todas as $\mathcal{M}\mathcal{L}$ -fórmulas φ , estruturas de primeira ordem I , e mundos $\omega \in D^I$, $I \models \varphi^*[\omega]$ sse $(\mathbf{M}(I), \omega) \models \varphi$. Portanto, $\varphi \in \mathbf{K}$ sse $\varphi^* \in \mathbf{QCl}$.

Note que, partindo de um modelo \mathbf{M} baseado em uma estrutura universal \mathbf{F} (na qual todos os pontos são acessíveis uns a partir dos outros), obtemos uma estrutura de primeira ordem $I(\mathbf{M})$, em que φ^* é equivalente à fórmula φ^\uparrow , assim definida:

$$\begin{aligned} p_i^\uparrow &= P_i(x), \\ \top^\uparrow &= \top, \\ \perp^\uparrow &= \perp, \\ (\varphi \wedge \psi)^\uparrow &= \varphi^\uparrow \wedge \psi^\uparrow, \\ (\varphi \vee \psi)^\uparrow &= \varphi^\uparrow \vee \psi^\uparrow, \\ (\varphi \rightarrow \psi)^\uparrow &= \varphi^\uparrow \rightarrow \psi^\uparrow, \\ (\neg\varphi)^\uparrow &= \neg\varphi^\uparrow, \\ (\Box\psi)^\uparrow &= \forall x\psi^\uparrow, \\ (\Diamond\psi)^\uparrow &= \exists x\psi^\uparrow. \end{aligned}$$

Como **S5** é caracterizado por estruturas universais, temos, então, que $\varphi \in \mathbf{S5}$ sse $\varphi^\uparrow \in \mathbf{QCl}$. Observe que x é a única variável que pode ocorrer em φ^\uparrow , e que φ^\uparrow é uma fórmula *monádica*, isto é, uma fórmula que contém apenas símbolos de predicados unários. Por outro lado, cada $\mathcal{P}\mathcal{L}$ -fórmula com uma variável é equivalente a uma fórmula monádica de uma variável. Portanto, *pela equivalência de módulos*, a tradução \cdot^\uparrow é um-para-um e interna ao conjunto de todas as fórmulas de primeira ordem de uma variável. Em outras palavras, a lógica **S5** pode ser considerada como o fragmento de uma variável da lógica clássica de primeira ordem [WAJ33].

1.1.3 Formalização explícita de lógicas modais

Assim como a tradução apresentada na seção anterior, os sistemas dedutivos estudados em nosso trabalho anterior [MAL2002] são todos chamados sistemas “implícitos”. A sua linguagem modal é como aquela que definimos no trabalho referido [MAL2002], e a sua sintaxe não permite referência explícita a mundos possíveis, nem à relação de acessibilidade R . Entretanto, “a necessidade de desenvolvermos provadores de teoremas eficientes para diversas aplicações motiva atualmente abordagens novas para lógicas modais, baseadas em métodos de tradução para a lógica clássica” [BRO2002]. Dentro dessas abordagens “explícitas”, uma teoria modal é traduzida para uma teoria de primeira ordem através da substituição dos operadores modais por expressões de primeira ordem

que refletem seus “significados semânticos”. Isso permite que provadores de teoremas clássicos padrão sejam aplicados diretamente à teoria da tradução para inferir teoremas clássicos que possam então ser “re”traduzidos de volta para fórmulas modais.

Vêm sendo desenvolvidos diversos métodos de tradução que podem ser classificados como traduções *relacionais* [MOO80] [OHL91], *funcionais* [OHL91] [ARS94] e *semifuncionais* [NON93]. Esses métodos geralmente são aplicáveis a qualquer lógica baseada em uma semântica de mundos possíveis cujos conetivos tenham definições semânticas que podem ser expressas em termos da lógica clássica.

No caso da tradução *relacional* [MOO80, OHL91], a estrutura de mundos possíveis da lógica modal é formalizada explicitamente através da introdução, na linguagem clássica, de um predicado binário diferenciado R para representar a relação de acessibilidade. A semântica dos operadores modais é refletida nas *regras de tradução*. Por exemplo, a condição de satisfatibilidade do operador \Box :

$$\omega \Vdash \Box p \text{ sse } \forall v w Rv \text{ implica } v \Vdash p$$

é refletida pela regra de tradução

$$trans(\Box p, w) = \forall v R(w, v) \rightarrow trans(p, v)$$

onde $trans$ é uma função que leva uma fórmula modal e um mundo possível a uma fórmula clássica. Suposições locais são consideradas válidas no mundo inicial 0, enquanto suposições globais são quantificadas universalmente de maneira apropriada. Portanto, para dar um exemplo, o axioma modal **D**: $\Box p \rightarrow \Diamond p$ é traduzido para a seguinte sentença de primeira ordem: $\forall x[\forall y(R(x, y) \rightarrow P(y)) \rightarrow \exists(R(x, y) \wedge P(y))]$, onde P é o símbolo de predicado unário associado à letra proposicional p da linguagem modal. Esse tipo de tradução tem a *desvantagem* de gerar fórmulas (exponencialmente) grandes. Algumas fórmulas modais com n operadores modais são traduzidas para fórmulas de primeira ordem com pelo menos 2^n literais.

Como alternativa, o método de tradução funcional proposto por Ohlbach [OHL91] adota uma formalização diferente da estrutura de mundos possíveis. As informações sobre os mundos acessíveis são representadas usando um conjunto de símbolos de funções unárias. Essas funções mapeiam cada mundo para um mundo acessível em “um passo”. Dessa forma, correntes ou cadeias de mundos acessíveis são expressas sintaticamente via um operador de concatenação sobre essas funções.

Por exemplo, $f \circ g$ mapeia cada mundo para um mundo acessível em dois passos. As propriedades da relação de acessibilidade são capturadas através da imposição de condições sobre o operador \circ ou através da imposição de propriedades específicas sobre os símbolos de função. Por exemplo, a reflexividade é expressa pela exigência da existência de uma função identidade; a simetria, pela exigência da existência de uma função inversa; e a transitividade, pela imposição de que o conjunto de funções seja fechado sob a operação \circ . Nesse último caso, as funções da forma $f \circ g$ também serão funções que mapeiam mundos para mundos acessíveis em um passo. Informalmente, o axioma 4 para a transitividade: $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ é traduzido para $\forall x[\forall f P(f(x)) \rightarrow (\forall g, h P(g \circ h(x)))]$, o que pode ser provado “classicamente” pela ligação de $g \circ h$ com f . Esse método tem a *vantagem* de que as fórmulas traduzidas têm a mesma complexidade (isto é, o mesmo número de subfórmulas atômicas) que a fórmula modal. Entretanto, exige procedimentos de unificação adequados para cada tipo de lógica modal.

A abordagem híbrida proposta por Nonnengart [NON93], chamada de método de *semistradução*, combina as duas técnicas novas descritas acima através da tradução *rela-*

cional da semântica do operador \Box , da tradução *funcional* da semântica do operador \Diamond e da introdução de axiomas específicos, chamados *axiomas simuladores*, que ligam a representação relacional e a funcional dos mundos possíveis, os quais são, grosso modo:

$$\forall s, t (R(s, t) \rightarrow \exists f (f(s) = t))$$

$$\forall s \forall f R(s, f(s))$$

Essa abordagem exige que a relação de acessibilidade satisfaça a propriedade de *serialidade* (isto é, para cada mundo possível, existe um mundo acessível). Essa também é uma limitação do método de tradução puramente funcional. Alguns métodos para eliminação dessa limitação foram sugeridos (veja [BRO2002] ou [GAB2000] para referências a discussões), mas eles têm o efeito de diminuir a eficiência dos sistemas, afastando-se do objetivo principal das abordagens explícitas para lógicas modais.

Entre os três métodos descritos acima, é evidente que o *relacional* é o mais natural, pois a semântica dos mundos possíveis já é baseada em estruturas relacionais clássicas (os “*frames*” ou “*estruturas*”). Mas, infelizmente, esse também é o método menos eficiente. Isso ocorre devido principalmente ao fato de que a abordagem usa (por razões de implementação) uma tradução “completa” da teoria modal dada para a teoria clássica. Uma questão interessante é se uma tradução “parcial” poderia ser usada para dar o mesmo poder sintático expressivo da tradução relacional, mas com teorias traduzidas mais simples.

A estrutura de trabalho (*framework*) do sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) proposto em [GAB96] que será descrito neste trabalho oferece uma resposta afirmativa a essa questão. Mostra que teorias modais mais simples, porém igualmente expressivas, podem ser formalizadas pela *combinação* de uma representação relacional de primeira ordem da estrutura de mundos possíveis com a linguagem modal padrão (implícita). Do ponto de vista da formalização sintática da lógica modal, essa estrutura oferece uma nova abordagem alternativa que supera muitas das limitações das abordagens implícitas e explícitas, enquanto herda muitas das suas vantagens.

1.2 A linguagem dedutiva rotulada modal

Como foi mencionado, uma das limitações da formalização implícita de lógicas modais é o fato de que hipóteses/suposições (ou teorias modais em geral) são avaliadas em apenas um mundo, o mundo *atual*. O sistema dedutivo rotulado modal (MLDS), proposto em [RUS95, GAB2000, BRO2002] e aqui descrito, generaliza a noção de um mundo *atual* único. As fórmulas são associadas com *rótulos* que denotam explicitamente os mundos possíveis. Os rótulos são termos de uma “*linguagem de rotulação*”, e as fórmulas são expressas em uma linguagem modal proposicional padrão \mathcal{L}_M (definida em [RUS95, GAB2000, BRO2002]). Essas duas linguagens juntas definem a *linguagem dedutiva rotulada modal* básica.

Definição 1.1 (*Linguagem de rotulação \mathcal{L}_L*) Uma linguagem L_L é uma linguagem de primeira ordem composta de:

- $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots$, um conjunto contável de símbolos constantes
- $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$, um conjunto contável de variáveis
- R um símbolo binário predicativo
- $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \equiv$ conetivos lógicos

- \forall, \exists *quantificadores*

As constantes e as variáveis de \mathcal{L}_L denotam os mundos possíveis, e o predicado binário R formaliza a relação de acessibilidade entre os mundos possíveis. Essa linguagem permite que as noções semânticas de estruturas de Kripke e de estruturas de mundos possíveis de Kripke sejam expressas sintaticamente. Por outro lado, a informação lógica é expressa na linguagem modal proposicional \mathcal{L}_M . A combinação dessas duas linguagens resulta em uma linguagem dedutiva rotulada modal.

Definição 1.2 (*Linguagem dedutiva rotulada modal (MLDL)*) Dada a linguagem de rotulação \mathcal{L}_L e a linguagem modal proposicional \mathcal{L}_M , uma linguagem dedutiva rotulada modal proposicional (MLDL proposicional) é o par ordenado $\langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle$.

Para propósitos prova-teóricos, a linguagem de rotulação é estendida com conjuntos adicionais de termos, que serão usados somente em derivações. Especificamente, dois conjuntos de símbolos de funções “*skolem*” são definidos junto com um símbolo de função *succ*. A linguagem resultante é chamada de *linguagem de rotulação semi-estendida*. (Símbolos de funções *skolem* são aqueles utilizados quando, dentro de uma prova de uma expressão do tipo $\diamond\alpha$ (onde α é uma fórmula modal), criamos um mundo particular na tentativa de provar α nesse mundo e, em conseqüência, deduzir $\diamond\alpha$.)

Definição 1.3 (*Linguagem de rotulação semi-estendida*) $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Seja \mathcal{L}_L uma linguagem de rotulação e \mathcal{L}_M uma linguagem modal proposicional. Seja $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ o conjunto ordenado de todas as wffs de \mathcal{L}_M . A linguagem de primeira ordem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ é definida como a linguagem \mathcal{L}_L estendida com o símbolo funcional *succ* e os dois conjuntos de símbolos de função unária. $\{f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n}, \dots\}$ e $\{box_{\alpha_1}, \dots, box_{\alpha_n}, \dots\}$.

Observamos que uma ordenação canônica é assumida para essa definição. O fato de que essa ordenação canônica existe segue da definição normal indutiva de uma wff em uma linguagem \mathcal{L}_L . Os termos da linguagem de rotulação \mathcal{L}_L construídos usando os símbolos funcionais f_{α_i} e box_{α_i} exercem papéis particulares. Para cada mundo possível λ e para cada fórmula modal α , $f_{\alpha}(\lambda)$ nomeia um mundo *particular* associado especificamente com α . Tais termos serão usados sempre que as noções semânticas de Kripke da forma “existe um mundo possível...” precisarem ser formalizadas. Por outro lado, termos da forma $box_{\alpha}(\lambda)$ podem ser pensados como se referindo a qualquer mundo *arbitrário* associado especificamente com α . Esses termos serão usados sempre que as noções semânticas de Kripke da forma “para todos os mundos possíveis...” precisarem ser expressas.

A função *succ* é usada principalmente para lógicas modais que incluem a propriedade de *serialidade*, que é uma função total que mapeia cada mundo possível para um mundo “existente”. Entretanto, formalmente, $f_{\alpha}(\lambda)$, $box_{\alpha}(\lambda)$ e *succ*(λ) são apenas termos de \mathcal{L}_L e, dentro de um modelo particular, podem referir-se ao mesmo mundo possível. O conjunto de todos os termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ define o conjunto de *rótulos*. Como eles denotam mundos atuais e acessíveis, as expressões “rótulos” e “mundos possíveis” serão usadas de maneira intercambiável.

A MLDL (Linguagem Dedutiva Rotulada Modal) facilita a formalização de dois tipos de informação:

1. o que é válido em mundos possíveis particulares; e

2. quais mundos estão relacionados com quais outros e quais não estão. Duas entidades sintáticas diferentes são definidas para capturar esses dois aspectos da linguagem. São chamadas, respectivamente, de *unidades declarativas* e *R-literais*. Uma unidade declarativa é um par separado por dois-pontos da forma “*fórmula modal* : *rótulo*”, expressando que uma fórmula modal é verdadeira em um mundo possível. Em um sentido bastante geral, o símbolo “:” entre os dois componentes pode ser considerado como uma espécie de predicado “*É válido*”. (Essa interpretação será refletida na semântica.) O componente *rótulo* é um termo raso da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, e o componente *fórmula modal* é uma *wff* da linguagem modal proposicional \mathcal{L}_M . Essa é a única entidade sintática que combina as duas entidades da linguagem dedutiva rotulada modal, e é formalmente definida como segue.

Definição 1.4 (*Unidade declarativa*) Dada a linguagem $\langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle$, uma unidade declarativa é um par $\alpha : \lambda$ onde λ é um termo raso de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, e α é uma *wff* de \mathcal{L}_M .

Uma unidade declarativa é dita *atômica* se o componente *wff* modal for uma fórmula atômica. No caso proposicional, considerado aqui, isso significa que a *wff* é apenas uma letra proposicional. Exemplos de unidades atômicas proposicionais são $q : \omega_1$ e $p : f_{\Box r}(\omega_4)$. Unidades declarativas arbitrárias incluem *wffs* modais arbitrárias, por exemplo, $\Box q : \omega_2$ e $q \rightarrow r : f_r(\omega_2)$.

Um *R-literal* é qualquer literal *raso* da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ da forma $R(\lambda_1, \lambda_2)$ ou $\neg R(\lambda_1, \lambda_2)$, onde λ_1 e λ_2 são rótulos, expressando que λ_2 é ou não é acessível a partir de λ_1 . Exemplos de *R-literais* são $R(\omega_1, \omega_2)$, $\neg R(\omega_2, box_p(\omega_2))$ e $R(\omega_0, f_p(\omega_2))$. Para distinguir um *R-literal* de seu oposto pelo sinal, a noção de *conjugado* de um *R-literal* também é apresentada.

Definição 1.5 (*R-literal*) Dada a linguagem $\langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle$, um *R-literal* é um literal da forma $R(\lambda_1, \lambda_2)$ ou da forma $\neg R(\lambda_1, \lambda_2)$, onde λ_1 e λ_2 são termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$.

Definição 1.6 (*Conjugado de um R-literal*) Seja Δ um *R-literal*. O conjugado de Δ , escrito $\overline{\Delta}$, é definido como

- $\neg R(\lambda_1, \lambda_2)$ se $\Delta = R(\lambda_1, \lambda_2)$
- $R(\lambda_1, \lambda_2)$ se $\Delta = \neg R(\lambda_1, \lambda_2)$

1.3 Teorias dedutivas rotuladas modais

A sintaxe do MLDS (Sistema Dedutivo Rotulado Modal) permite que conjuntos arbitrários de fórmulas modais sejam associados a rótulos (diferentes), descrevendo não só um conjunto inicial de suposições locais (como na abordagem implícita), mas permitindo que várias *teorias modais iniciais locais* (distintas) sejam especificadas. Com a adição de *R-literais*, essas teorias locais podem ser declaradas ou como sendo independentes (usando *R-literais* negativos) ou como interagindo umas com as outras (usando *R-literais* positivos). Isso gera uma definição de uma teoria dedutiva rotulada modal mais geral do que a noção tradicional de teoria modal. Isso contribui muito para oferecer um formalismo modal mais próximo das necessidades das aplicações (veja discussões em [BRO2002] e [GAB2000]).

Uma teoria dedutiva rotulada modal, chamada *configuração*, é composta por dois conjuntos de informações:

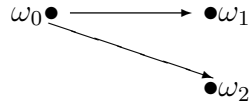


FIGURA 1.1 – Diagrama

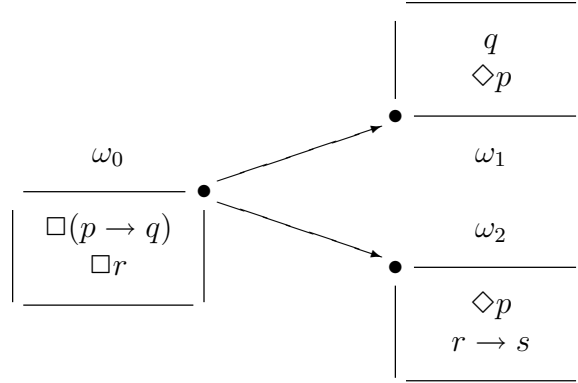


FIGURA 1.2 – Configuração

1. um conjunto de R -literais; e
2. um conjunto de unidades declarativas.

Conjuntos de unidades declarativas que têm os mesmos rótulos denotam *teorias modais locais associadas àquele rótulo*, enquanto unidades declarativas com rótulos diferentes expressam fórmulas modais que pertencem a mundos atuais locais (possivelmente) diferentes. O primeiro conjunto, consistindo de R -literais, é chamado de *diagrama* e oferece as informações “estruturais” sobre uma teoria dedutiva rotulada modal.

Definição 1.7 (*Diagrama*) Dada a linguagem $\langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle$, um diagrama \mathcal{D} é um conjunto de R -literais cujos argumentos são termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$.

Por exemplo, o conjunto $\{R(\omega_0, \omega_1), R(\omega_0, \omega_2), \neg R(\omega_1, \omega_2)\}$ é um diagrama que pode ser representado graficamente parcialmente como na Figura 1.1. Esse tipo de diagrama (conjunto) não nos diz, por exemplo, se ω_0 é acessível a partir de ω_1 ou não. Também não inclui representações de R -literais da forma $\neg R(\omega_1, \omega_2)$.

Em geral, as informações completas ou incompletas sobre qualquer grafo direcionado arbitrário podem ser formalizadas como um diagrama. Uma teoria modal local pode ser atribuída a cada nó do diagrama, adicionando-se as unidades declarativas apropriadas. Por exemplo, considerando o conjunto $\{\Box(p \rightarrow q) : \omega_0, \Box r : \omega_0, \Diamond p : \omega_1, r \rightarrow s : \omega_1, q : \omega_2, \Diamond p : \omega_2\}$ junto com o diagrama dado na Figura 1.1, a teoria resultante (*configuração*) também pode ser representada graficamente como na Figura 1.2. Uma definição formal de uma configuração é dada a seguir.

Definição 1.8 (*Configuração*) Dada uma linguagem dedutiva rotulada modal (MLDL), uma configuração é uma tupla $\langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ onde:

- \mathcal{D} é um diagrama; e
- \mathcal{F} é uma função do conjunto de termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ para o conjunto $\mathcal{P}(\text{wff}, \mathcal{L}_M)$ de conjuntos de wffs de \mathcal{L}_M .

A função \mathcal{F} é uma função total que atribui um conjunto vazio aos rótulos para os quais não há informação, e uma teoria modal local não-vazia aos demais. A descrição formal da configuração em questão, na qual configurações podem ser teorias infinitas, é dada na tabela 1.1.

$$\begin{aligned} D &= \{R(\omega_0, \omega_1), R(\omega_0, \omega_2), \neg R(\omega_1, \omega_2)\} \\ \mathcal{F}(\lambda) &= \{\Box(p \rightarrow q), \Box r\} \text{ se } \lambda = \omega_0 \\ &\quad \{\Diamond p, r \rightarrow s\} \text{ se } \lambda = \omega_1 \\ &\quad \{q, \Diamond p\} \text{ se } \lambda = \omega_2 \\ &\quad \{\}, \text{ caso contrário} \end{aligned}$$

TABELA 1.1 – Definição formal da configuração da Figura 1.2

Isso ocorre ou quando o diagrama \mathcal{D} é infinito (isto é, a configuração contém um número infinito de R -literais), ou quando, para algum rótulo λ da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, o valor de $\mathcal{F}(\lambda)$ é um conjunto infinito de fórmulas de \mathcal{L}_M (isto é, a configuração contém um número infinito de unidades declarativas referentes a λ), ou quando $\mathcal{F}(\lambda) \neq \emptyset$ para um número infinito de termos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Para expressar qual informação uma configuração contém, a seguinte notação será útil.

Notação 1.1 Dada uma configuração $\mathcal{C} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$, o R -literal Δ é dito membro de \mathcal{C} , o que é escrito $\Delta \in \mathcal{C}$, se $\Delta \in \mathcal{D}$, enquanto uma unidade declarativa $\alpha : \lambda$ é dita membro de \mathcal{C} , o que é escrito $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}$, se $\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$.

Como havia sido mencionado, os símbolos de função da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ foram apresentados por razões prova-teóricas. Portanto, qualquer teoria dedutiva rotulada modal especificada pelo usuário (*configuração inicial*) conterà usualmente (inicialmente) apenas símbolos constantes de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ como rótulos, enquanto configurações que contêm termos rasos gerais de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ aparecerão principalmente em derivações de provas como configurações inferidas, como será esclarecido mais adiante neste trabalho.

Os conceitos “básicos” de um MLDS (sistema dedutivo rotulado modal), como as noções de uma linguagem dedutiva rotulada modal, sua sintaxe e teoria, já foram definidos. Agora definiremos a noção de uma classe de estruturas de Kripke, que é capturada por uma axiomatização de primeira ordem chamada *álgebra de rotulação* (cujos fundamentos já foram apresentados anteriormente neste trabalho) escrita na linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$.

Definição 1.9 (*Álgebra de rotulação \mathcal{A}*) Uma álgebra de rotulação \mathcal{A} é uma teoria de primeira ordem (possivelmente vazia), escrita na linguagem rotulada semi-estendida $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, dada por algum subconjunto consistente do seguinte conjunto de axiomas (consistente no sentido padrão da lógica clássica – que, portanto, não pode incluir nem (\mathbf{T}) , nem (\mathbf{Irr})):

$$\begin{aligned}
\forall x(R(x, x)) & \quad (\mathbf{T}) \\
\forall x, y, z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)) & \quad (\mathbf{4}) \\
\forall x, y(R(x, y) \rightarrow R(y, x)) & \quad (\mathbf{B}) \\
\forall x(R(x, succ(x))) & \quad (\mathbf{D}) \\
\forall x, y, z((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow R(y, z)) & \quad (\mathbf{5}) \\
\forall x \neg R(x, x) & \quad (\mathbf{Irr})
\end{aligned}$$

Álgebras de rotulação que envolvem apenas os cinco primeiros axiomas definem classes de estruturas que são definíveis modalmente, isto é, para as quais existe um esquema de axiomas característico. Cada um desses esquemas identifica um sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) proposicional particular correspondente à lógica modal padrão relacionada. (Uma noção particular de “correspondência” será definida e provada mais adiante neste trabalho.)

Por outro lado, álgebras de rotulação que incluem o axioma (**Irr**) identificam a classe de estruturas cuja relação de acessibilidade satisfaz a propriedade de irreflexibilidade. Entretanto, essa propriedade não é definível modalmente, ou seja, não há um esquema de axiomas modais que possa caracterizar essa classe de estruturas. Porém, introduzindo-se o axioma (**Irr**) em uma álgebra de rotulação, é possível definir MLDSs proposicionais que facilitam o raciocínio modal sobre classes de estruturas irreflexivas. Esses sistemas geram, portanto, um novo conjunto de lógicas modais.

A notação seguinte será adotada para distinguir entre álgebras de rotulação diferentes. Destacamos que, na Definição 1.9, os axiomas que são definíveis modalmente são denotados com os mesmos nomes que seus esquemas de axiomas modais correspondentes, mas são escritos dentro de parênteses ().

Notação 1.2 *Seja $\{(\mathbf{T}), (\mathbf{4}), (\mathbf{D}), (\mathbf{B}), (\mathbf{5}), (\mathbf{Irr})\}$ o conjunto de axiomas dados na Definição 1.9 e seja $\delta \subseteq \{(\mathbf{T}), (\mathbf{4}), (\mathbf{D}), (\mathbf{B}), (\mathbf{5}), (\mathbf{Irr})\}$. δ será escrito algumas vezes como $A_{K\delta}$, com chaves e parênteses omitidos do subscrito δ .*

Notação 1.3 *Por simplicidade, o subscrito $K\delta$ será substituído pelo nome tradicional da lógica modal associada sempre que possível. Por exemplo, $A_{K\{\mathbf{T}, \mathbf{4}\}}$ será escrita algumas vezes como A_{S_4} . A Tabela 1.2 mostra alguns exemplos das álgebras de rotulação consideradas neste trabalho.*

Para dar uma definição completa de um MLDS proposicional, é necessário especificar um conjunto de regras de inferência junto com a linguagem e sua álgebra de rotulação particular. Isso é declarado formalmente como segue.

Definição 1.10 *(Sistema dedutivo rotulado modal) Dada uma linguagem dedutiva rotulada modal proposicional $MLDL = \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle$, um sistema dedutivo rotulado modal proposicional (MLDS proposicional) é uma tupla da forma $\langle \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ onde:*

- *A é uma álgebra de rotulação escrita em $Func(L_L, L_M)$; e*
- *R é um conjunto de regras de inferência que “geram” uma configuração a partir de outra.*

Nomes	Álgebras de Rotulação
\mathcal{A}_T	$\{\forall x R(x, x)\}$
\mathcal{A}_{Irr}	$\{\forall x \neg R(x, x)\}$
\mathcal{A}_{S4}	$\{\forall x (R(x, x),$ $\forall x, y, z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))\}$
$\mathcal{A}_{K4, \text{Irr}}$	$\{\forall x \neg R(x, x),$ $\forall x, y, z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))\}$
\mathcal{A}_{K4}	$\{\forall x, y, z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))\}$
\mathcal{A}_{KD}	$\{\forall x R(x, \text{succ}(x))\}$
$\mathcal{A}_{KD, \text{Irr}}$	$\{\forall x \neg R(x, x),$ $\forall x R(x, \text{succ}(x))\}$

TABELA 1.2 – Exemplos de álgebras de rotulação

A partir da definição acima, percebemos que, dado um conjunto de regras, podemos obter MLDSs proposicionais diferentes, considerando-se álgebras de rotulação diferentes. A seguinte notação será adotada para indicar cada MLDS proposicional particular considerado nos próximos capítulos.

Notação 1.4 *Seja $\mathcal{A}_{K\delta}$ uma álgebra de rotulação particular. $K\delta$ -MLDS denotará o MLDS proposicional associado, isto é, $K\delta$ -MLDS = $\langle \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle, \mathcal{A}_{K\delta}, \mathcal{R} \rangle$.*

Para cada $K\delta$ -MLDS, as regras de inferência são definidas como relações sobre o conjunto de configurações $K\delta$. A forma que essas relações tomam é descrita adiante neste trabalho.

1.4 Um sistema de dedução natural para MLDS

Como podemos perceber a partir de nosso estudo de alguns dos principais sistemas dedutivos modais tradicionais [MAL2002] e também do presente estudo dos sistemas dedutivos modais rotulados, uma importante diferença entre eles é que, nos rotulados, as regras de inferência são aplicadas não a *wffs*, mas a *configurações*. No sistema de inferência que apresentaremos, definido em [RUS95, GAB2000], todas as regras de inferência “geram” uma configuração nova a partir de uma configuração dada. Portanto, uma regra de inferência pode ser definida de maneira geral como segue:

Definição 1.11 *(Regra de inferência) Uma regra de inferência \mathcal{I} é um conjunto de pares de configurações, onde cada par é escrito como \mathcal{C}/\mathcal{C}' . Se $\mathcal{C}/\mathcal{C}' \in \mathcal{I}$, então dizemos que \mathcal{C} é uma configuração antecedente de \mathcal{I} , e que \mathcal{C}' é uma configuração inferida (ou consequência) de \mathcal{I} com respeito a \mathcal{C} . Também dizemos que \mathcal{I} gera \mathcal{C}' a partir de \mathcal{C} , e que \mathcal{I} infere \mathcal{C}' a partir de \mathcal{C} .*

No restante desta seção, assumiremos uma linguagem dedutiva rotulada modal (MLDL) $\langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle$. Definiremos as regras de inferência de um sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) $S = \langle \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ no estilo de dedução natural. As regras

de *Introdução* e de *Eliminação* serão definidas para cada conetivo clássico e para cada operador modal da linguagem \mathcal{L}_M . No restante desta seção, assumiremos que todos os termos a que nos referimos são termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e que todas as *wffs* a que nos referimos são *wffs* de \mathcal{L}_M .

Definição 1.12 (*Prova*) *Seja $S = \langle \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um MLDS. Uma prova em S é um par $\langle \mathcal{P}, m \rangle$, onde \mathcal{P} é uma seqüência de configurações $\{C_0, \dots, C_n\}$ com $n > 0$, e m é um mapeamento do conjunto $\{0, \dots, n-1\}$ para \mathcal{R} tal que, para cada $i, 0 \leq i < n$, $C_i/C_{i+1} \in m(i)$.*

Definição 1.13 (*Derivabilidade*) *Seja $S = \langle \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um MLDS e C e C' duas configurações de S . C' é derivável a partir de C , o que é escrito como $C \vdash_S C'$, se existe uma prova $\langle \{C, \dots, C'\}, m \rangle$.*

Onde a escolha de $K\delta$ for arbitrária, o símbolo de derivabilidade \vdash_S ou $\vdash_{K\delta-MLDS}$ será freqüentemente escrito como \vdash_{MLDS} . Essa notação assemelha-se à noção padrão de derivação (dada em nosso trabalho anterior, [MAL2002]), quando a configuração derivável C' é reduzida a uma só unidade declarativa cm rótulo ω_0 e a configuração (inicial) dada C inclui (apenas) suposições globais em $\mathcal{F}(\lambda)$, para qualquer rótulo λ da linguagem, e suposições locais em $\mathcal{F}(\omega_0)$. Uma relação de derivabilidade entre configurações e unidades de informação (unidades declarativas ou R -literais) pode ser expressa em termos do símbolo \vdash_{MLDS} , adotando-se a seguinte notação:

Notação 1.5 *São dados: uma configuração C , uma unidade declarativa $\alpha : \lambda$ e um R -literal Δ . Escrevemos:*

- $C \vdash_S \alpha : \lambda$ se existe uma configuração C' tal que $C \vdash_S C'$ e $\lambda : \alpha \in C'$;
- $C \vdash_S \Delta$ se existe uma configuração C' tal que $C \vdash_S C'$ e $\Delta \in C'$;
- $C \vdash_S \perp : \lambda$ se existe um termo λ e uma *wff* α tal que $C \vdash_S \alpha \wedge \neg\alpha : \lambda$.

Configurações são pares de conjuntos. Portanto, operações padrão sobre conjuntos, tais como união, diferença e inclusão também podem ser aplicadas a configurações.

Notação 1.6 *Dada uma configuração $C = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$, a unidade declarativa $\alpha : \lambda$ e o R -literal Δ , então:*

1. $C + [\alpha : \lambda]$ é a configuração $\langle \mathcal{D}, \mathcal{F}' \rangle$ tal que
 - $\mathcal{F}'(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda) \cup \{\alpha\}$
 - $\mathcal{F}'(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda')$ para cada termo raso $\lambda' \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $\lambda' \neq \lambda$
2. $C + [\Delta]$ é a configuração $\langle \mathcal{D}', \mathcal{F} \rangle$ tal que $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{\Delta\}$

Definição 1.14 (*Continência de configuração*) *Dadas duas configurações $C_1 = \langle \mathcal{D}_1, \mathcal{F}_1 \rangle$ e $C_2 = \langle \mathcal{D}_2, \mathcal{F}_2 \rangle$, dizemos que C_2 contém C_1 e escrevemos $C_1 \subseteq C_2$ se:*

- $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$; e
- $\mathcal{F}_1(\lambda) \subseteq \mathcal{F}_2(\lambda)$ para cada termo raso de λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$.

As regras de inferência de um MLDS proposicional são geralmente aplicadas a configurações para inferir “novas” configurações. A questão principal é *como* uma configuração inferida é gerada. Dada uma configuração antecedente \mathcal{C} , três tipos de passos de raciocínio podem ocorrer. Aqueles do primeiro tipo são “clássicos” e ocorrem dentro de qualquer teoria modal local particular incluída em \mathcal{C} , conforme as noções padrão de inferência para conectivos clássicos. Aquelas do segundo tipo são “modais” e dizem respeito à interação entre teorias modais locais diferentes em \mathcal{C} . Esses dois tipos de passos de raciocínio (clássicos e modais) são baseados sobre a informação lógica (clássica e modal) (as *wffs*) incorporadas nas unidades declarativas que pertencem a \mathcal{C} . Configurações inferidas são principalmente “expansões lógicas” (isto é, adições de unidades declarativas) das configurações antecedentes. O terceiro tipo de passo de raciocínio é relativo à informação do diagrama de \mathcal{C} e à “interação” entre o diagrama e as unidades declarativas. Neste caso, configurações inferidas são frequentemente “expansões estruturais” (isto é, adições de R -literais) às configurações antecedentes.

Portanto, podem ser identificadas três classes de regras de inferência, as quais correspondem aos três tipos de passos de raciocínio mencionados acima. Uma descrição formal de cada classe é dada a seguir, seguida por alguns exemplos de derivação. Para cada regra de inferência, é dada uma representação gráfica, baseada na seguinte notação chave:

Notação 1.7 *Uma configuração inferida sempre é denotada por \mathcal{C}' . Para as regras de dedução natural que têm subprovas como premissas, as configurações derivadas dentro dessas subprovas são denotadas por $\tilde{\mathcal{C}}$. A adição “temporária” de uma suposição π (onde π é uma unidade declarativa ou um R -literal que precisa ser descarregado) a uma configuração \mathcal{C} é representada graficamente como $\mathcal{C}\langle[\pi]\rangle$. Finalmente, para qualquer configuração \mathcal{C} e qualquer unidade declarativa ou R -literal π , a notação gráfica $\mathcal{C}\langle\pi\rangle$ significa que $\pi \in \mathcal{C}$.*

1.4.1 Regras para os conectivos clássicos

Nesta seção, regras de eliminação e de introdução são dadas para cada um dos conectivos clássicos incluídos na linguagem lógica \mathcal{L}_M .

Definição 1.15 *(Eliminação do \wedge , $\mathcal{I}_{\wedge E}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ e wffs α e β , $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\alpha : \lambda]$ e $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\beta : \lambda]$ são membros da regra de inferência Eliminação do \wedge (às vezes chamada de $\mathcal{I}_{\wedge E}$) se $\alpha \wedge \beta : \lambda \in \mathcal{C}$. Algumas vezes, escreveremos a Eliminação do \wedge como ilustrado na Tabela 1.3 ($\mathcal{I}_{\wedge E}$).*

Definição 1.16 *(Introdução do \wedge , $\mathcal{I}_{\wedge I}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ e wffs α e β , $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\alpha \wedge \beta : \lambda]$ é um membro da regra de inferência Introdução do \wedge (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\wedge I}$) se $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}$ e $\beta : \lambda \in \mathcal{C}$. Algumas vezes, escreveremos a Introdução do \wedge como ilustrado na Tabela 1.3 ($\mathcal{I}_{\wedge I}$).*

Definição 1.17 *(Eliminação do \vee , $\mathcal{I}_{\vee E}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ e wffs γ , $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\gamma : \lambda]$ é membro da regra de inferência Eliminação do \vee (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\vee E}$) se existirem wffs α e β tais que*

- $\alpha \vee \beta : \lambda \in \mathcal{C}$
- $\mathcal{C} + [\alpha : \lambda] \vdash_S \gamma : \lambda$

TABELA 1.3 – Regras para os conectivos clássicos

$\frac{C\langle\alpha \vee \beta : \lambda\rangle \quad \begin{array}{c} C\langle[\alpha : \lambda]\rangle \\ \vdots \\ \tilde{C}\langle\gamma : \lambda\rangle \end{array} \quad \begin{array}{c} C\langle[\beta : \lambda]\rangle \\ \vdots \\ \tilde{C}\langle\gamma : \lambda\rangle \end{array}}{C'\langle\gamma : \lambda\rangle} \mathcal{I}_{\vee E}$	$\frac{C\langle\alpha : \lambda\rangle}{C'\langle\alpha \vee \beta : \lambda\rangle} \mathcal{I}_{\vee I}$
$\frac{C\langle\alpha \wedge \beta : \lambda\rangle}{C'\langle\alpha : \lambda, \beta : \lambda\rangle} \mathcal{I}_{\wedge E}$	$\frac{C\langle\alpha : \lambda, \beta : \lambda\rangle}{C'\langle\alpha \wedge \beta : \lambda\rangle} \mathcal{I}_{\wedge I}$
$\frac{C\langle\alpha \rightarrow \beta : \lambda, \alpha : \lambda\rangle}{C'\langle\beta : \lambda\rangle} \mathcal{I}_{\rightarrow E}$	$\frac{\begin{array}{c} C\langle[\alpha : \lambda]\rangle \\ \vdots \\ \tilde{C}\langle\beta : \lambda\rangle \end{array}}{C'\langle\alpha \rightarrow \beta : \lambda\rangle} \mathcal{I}_{\rightarrow I}$
$\frac{C\langle\neg\neg\alpha : \lambda\rangle}{C'\langle\alpha : \lambda\rangle} \mathcal{I}_{\neg E}$	$\frac{\begin{array}{c} C\langle\alpha : \lambda\rangle \\ \vdots \\ \tilde{C}\langle\perp : \lambda'\rangle \end{array}}{C'\langle\neg\alpha : \lambda\rangle} \mathcal{I}_{\neg I}$

- $\mathcal{C} + [\beta : \lambda] \vdash_S \gamma : \lambda$

Algumas vezes, escreveremos a Eliminação do \vee como ilustrado na Tabela 1.3 ($\mathcal{I}_{\vee E}$).

Definição 1.18 (Introdução do \vee , $\mathcal{I}_{\vee I}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ e wffs α e β , $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\alpha \vee \beta : \lambda]$ e $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\beta \vee \alpha : \lambda]$ são membros da regra de inferência Introdução do \vee (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\vee I}$) se $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}$. Algumas vezes, escreveremos a Introdução do \vee como ilustrado na Tabela 1.3 ($\mathcal{I}_{\vee I}$).

Definição 1.19 (Eliminação da \rightarrow , $\mathcal{I}_{\rightarrow E}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ e wffs β , $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\beta : \lambda]$ é membro da regra de inferência Eliminação da \rightarrow (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\rightarrow E}$) se, para alguma wff α , $\alpha \rightarrow \beta : \lambda \in \mathcal{C}$ e $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}$. Algumas vezes, escreveremos a Eliminação da \rightarrow como ilustrado na Tabela 1.3 ($\mathcal{I}_{\rightarrow E}$).

Definição 1.20 (Introdução da \rightarrow , $\mathcal{I}_{\rightarrow I}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ e wffs α e β , $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\alpha \rightarrow \beta]$ é membro da regra de inferência Introdução da \rightarrow (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\rightarrow I}$) se $\mathcal{C} + [\alpha : \lambda] \vdash_S \beta : \lambda$. Algumas vezes, escreveremos a Introdução da \rightarrow como ilustrado na Tabela 1.3 ($\mathcal{I}_{\rightarrow I}$).

Definição 1.21 (Eliminação do \neg , $\mathcal{I}_{\neg E}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ e wffs α , $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\alpha : \lambda]$ é membro da regra de inferência Eliminação do \neg (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\neg E}$) se $\neg\neg\alpha : \lambda \in \mathcal{C}$. Algumas vezes, escreveremos a Eliminação do \neg como ilustrado na Tabela 1.3 ($\mathcal{I}_{\neg E}$).

Definição 1.22 (Introdução do \neg , $\mathcal{I}_{\neg I}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ e wffs $\alpha, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\neg\alpha : \lambda]$ é membro da regra de inferência Introdução do \neg (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\neg I}$) se, para algum termo λ' , $\mathcal{C} + [\alpha : \lambda] \vdash_S \perp : \lambda'$. Algumas vezes, escreveremos a Introdução do \neg como ilustrado na Tabela 1.3 ($\mathcal{I}_{\neg I}$).

Cada uma das regras acima tem o efeito de expandir a configuração antecedente com uma nova unidade declarativa. Com exceção da regra $\mathcal{I}_{\neg I}$, tanto as unidades declarativas adicionadas como as unidades declarativas envolvidas na premissa referem-se ao mesmo rótulo. Isso mostra que o raciocínio permitido por essas regras acontece inteiramente dentro do escopo do mundo atual local sob consideração. Essa característica é semanticamente motivada pelo fato de que, como destacado anteriormente, o fragmento clássico da lógica modal comporta-se como uma lógica clássica associada “localmente” com qualquer mundo possível particular. Mas, para a regra $\mathcal{I}_{\neg I}$, nem sempre é esse o caso.

De acordo com a interpretação clássica do conetivo \neg , a negação de uma fórmula geralmente pode ser provada, mostrando-se que a suposição de sua forma positiva leva a uma contradição. No raciocínio modal, as contradições podem surgir em mundos possíveis que são diferentes do mundo atual corrente. A semântica de um exemplo particular é discutida aqui. Considerando uma linguagem modal composta apenas pela letra proposicional p e o modelo $\mathbf{M} = \langle W, R, \mathbf{v} \rangle$, onde $W = \{\omega_0, \omega_1\}$, $R = \{(\omega_0, \omega_1)\}$ e $\mathbf{v}(p) = \{\omega_1\}$. Para mostrar que $\mathbf{M}, \omega_0 \Vdash \neg \Box \neg p$, é suficiente provar que $\mathbf{M}, \omega_0 \Vdash \Box \neg p$. Isso é dado pelo fato de que $\mathbf{M}, \omega_1 \Vdash p$ (dado pela definição de \mathbf{v}). Aqui, a contradição surge em um mundo possível (ω_1) diferente do mundo corrente (ω_0). Analogamente, na regra $\mathcal{I}_{\neg I}$ dada acima, a subderivação pode envolver raciocínio sobre mundos possíveis diferentes do mundo atual λ , nos quais as contradições podem surgir. Portanto, para capturar esses casos, usa-se um meta-símbolo diferente, λ' , que pode ou não ser igual a λ .

Uma abordagem semelhante foi adotada por Fitting [FIT83] em seu sistema de dedução natural I-estilo, onde a prova de uma contradição dentro de uma caixa estrita (isto é, de um mundo possível acessível) causa o fechamento da caixa e a inferência da inconsistência no mundo atual, permitindo que a regra $[\neg I]$ seja aplicada. No caso da regra $\mathcal{I}_{\neg I}$, isso é equivalente a impor a restrição de que λ' é um mundo acessível a partir de λ . Entretanto, a regra $\mathcal{I}_{\neg I}$ cobre um caso mais geral, para o qual o rótulo λ' refere-se a um mundo possível diferente e possivelmente não acessível a partir de λ . Isso ocorre porque, dado um tipo mais geral de teorias (configurações), a inconsistência também pode surgir em mundos atuais locais que são diferentes e não estão relacionados com o mundo possível sob consideração. Nesse caso, $\mathcal{I}_{\neg I}$ reflete o princípio clássico “qualquer fórmula pode ser inferida a partir de uma contradição”. Mais adiante, mostraremos que o mesmo princípio é válido para inconsistências causadas por R -literais.

1.4.2 Regras para os operadores modais

O próximo grupo de regras de inferência refere-se aos operadores modais \Box e \Diamond da linguagem \mathcal{L}_M . Essas regras são baseadas na estrutura dos diagramas internos às configurações. Cada uma dessas regras descreve como podem interagir os conjuntos de informações pertencentes a mundos possíveis diferentes relacionados uns com os outros. Devido a isso, são as únicas regras de inferência em que R -literais da forma $R(\lambda_i, \lambda_j)$ são referenciados explicitamente para expressar a inferência de fórmulas novas em um mundo acessível.

TABELA 1.4 – Regras para os operadores modais

$ \begin{array}{c} C \cup \{[R(\lambda, box_\alpha(\lambda))]\} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{C}\langle\alpha : box_\alpha(\lambda)\rangle}{C'\langle\square\alpha : \lambda\rangle} \mathcal{I}_{\square I} \end{array} $	$ \frac{C'\langle\square\alpha, R(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1\rangle}{C'\langle\alpha : \lambda_2\rangle} \mathcal{I}_{\square E} $
$ \frac{C'\langle\alpha : \lambda\rangle}{C'\langle\alpha, R(\lambda, f_\alpha(\lambda)) : f_\alpha(\lambda)\rangle} \mathcal{I}_{\diamond E} $	$ \frac{C'\langle\alpha, R(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_2\rangle}{C'\langle\diamond\alpha : \lambda_1\rangle} \mathcal{I}_{\diamond I} $

Definição 1.23 (Eliminação do \diamond , $\mathcal{I}_{\diamond E}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ e wffs $\alpha, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\alpha : f_\alpha(\lambda)] + [R(\lambda, f_\alpha(\lambda))]$ é membro da regra de inferência Eliminação do \diamond (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\diamond E}$) se $\diamond\alpha : \lambda \in \mathcal{C}$. Algumas vezes, escreveremos a Eliminação do \diamond como ilustrado na Tabela 1.4 ($\mathcal{I}_{\diamond E}$).

$\mathcal{I}_{\diamond E}$ pode ser visto (informalmente) como uma “skolemização” do quantificador existencial sobre os mundos possíveis, o que é implicado semanticamente pela fórmula $\diamond\alpha$ na premissa. O termo $f_\alpha(\lambda)$ define um mundo possível particular associado univocamente com a fórmula α e que se inferiu ser acessível a partir do mundo possível λ (isto é, $R(\lambda, f_\alpha(\lambda))$). A partir da definição, é evidente que essa regra tem o efeito de expandir os dois componentes (o diagrama e o conjunto de unidades declarativas) da configuração antecedente.

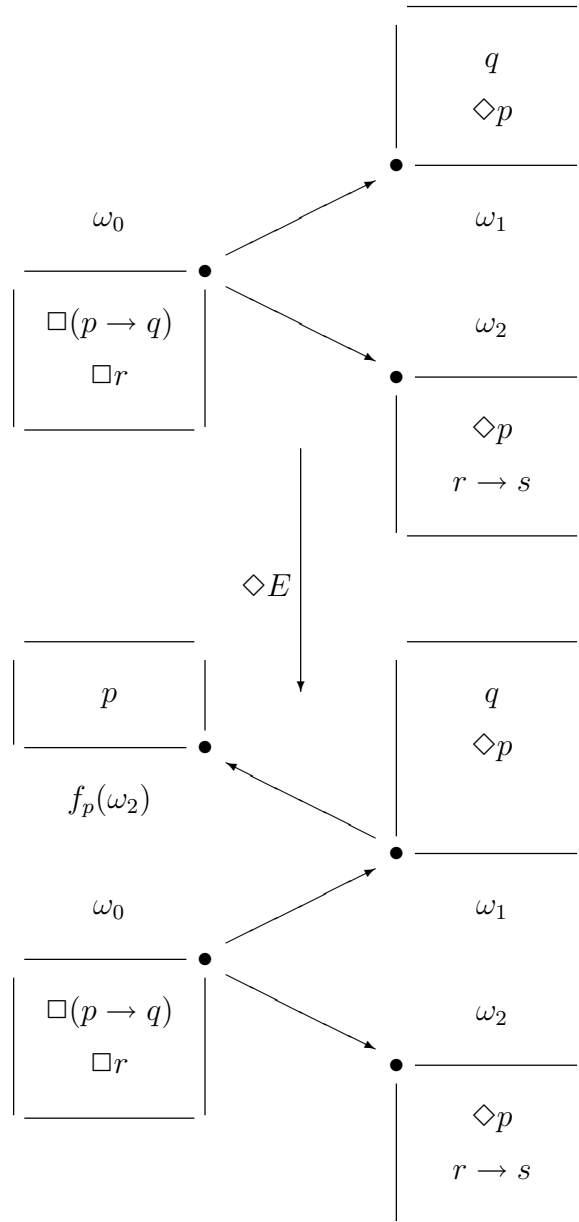
Mais adiante neste texto, veremos que a inferência de rótulos e relações novas na estrutura de um diagrama interno a uma configuração é consistente com a álgebra estendida \mathcal{A}^+ , na qual o processo de definição de rótulos novos via símbolos de funções é controlado pelo esquema de axiomas (*Ax5*). Um exemplo de aplicação da regra de Eliminação do \diamond é representado graficamente na Figura 1.3.

Definição 1.24 (Introdução do \diamond , $\mathcal{I}_{\diamond I}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ_1 e λ_2 e wffs $\alpha, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\diamond\alpha : \lambda_1]$ é membro da regra de inferência Introdução do \diamond (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\diamond I}$) se $\alpha : \lambda_2 \in \mathcal{C}$ e $R(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}$. Algumas vezes, escreveremos a Introdução do \diamond como ilustrado na Tabela 1.4 ($\mathcal{I}_{\diamond I}$).

Definição 1.25 (Eliminação do \square , $\mathcal{I}_{\square E}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ_1 e λ_2 e wffs $\alpha, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\alpha : \lambda_2]$ é membro da regra de inferência Eliminação do \square (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\square E}$) se $\square\alpha : \lambda_1 \in \mathcal{C}$ e $R(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}$. Algumas vezes, escreveremos a Eliminação do \square como ilustrado na Tabela 1.4 ($\mathcal{I}_{\square E}$).

As regras $\mathcal{I}_{\diamond I}$ e $\mathcal{I}_{\square E}$ são um tanto simétricas. Ambas baseiam-se na informação estrutural sobre a configuração antecedente (isto é, nas relações entre os mundos possíveis).

Definição 1.26 (Introdução do \square , $\mathcal{I}_{\square I}$) Para todas as configurações \mathcal{C} , termos λ e wffs $\alpha, \mathcal{C}/\mathcal{C} + [\square\alpha : \lambda]$ é membro da regra de inferência Introdução do \square (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\square I}$) se $\mathcal{C} + [R(\lambda, box_\alpha(\lambda))] \vdash_S \alpha : box_\alpha(\lambda)$. Algumas vezes, escreveremos a Introdução do \square como ilustrado na Tabela 1.4 ($\mathcal{I}_{\square I}$).

FIGURA 1.3 – Regra de Eliminação do \diamond

Na regra acima, a suposição temporária deveria ser lida como “dado um mundo acessível arbitrário $box_\alpha(\lambda)$ ”. Embora, de um ponto de vista sintático, o uso de um termo é visto frequentemente como uma maneira de nomear objetos particulares (mundos possíveis), neste caso isso é adotado para referir um mundo possível arbitrário. Isso serve para garantir que os rótulos são sempre termos rasos. O papel do símbolo de função box_α ficará mais claro mais adiante neste texto.

As regras clássicas e modais acima são efetivamente generalizações das regras de dedução natural de Fitting [FIT83]. Especificamente, as regras $\mathcal{I}_{\diamond E}$ e $\mathcal{I}_{\square E}$ generalizam a criação de caixas restritas, respectivamente, no sistema de I-estilo e a criação de caixas estritas no sistema A-estilo, enquanto $\mathcal{I}_{\square E}$ é algo similar à regra de iteração restrita básica para a lógica modal **K**. (A regra $\mathcal{I}_{\diamond I}$ não é diretamente comparável.)

Além disso, sob a limitação de permitir apenas configurações iniciais compostas de unidades declarativas que se referem ao único mundo atual inicial ω_0 , os dois conjuntos de regras acima oferecem um sistema de prova rotulado para a lógica modal **K**. Para dar um exemplo, são dadas a seguir derivações formais e gráficas nas quais a interdefinibilidade dos dois operadores modais \square e \diamond é obtida, usando-se apenas os dois conjuntos de regras acima.

Notação 1.8 *Nos exemplos que seguem, o número de traços (\cdot) incluídos como sobrescrito em cada símbolo de configuração (\mathcal{C}) corresponde ao número de suposições novas introduzidas a partir da configuração inicial \mathcal{C}_0 . Os índices subscritos (1, 2, etc.) correspondem a cada passo em cada “subprova” relativa a uma suposição nova.*

Exemplo 1.1 $(\mathcal{C} \langle \square p : \omega_0 \rangle \vdash_S \neg \diamond \neg p : \omega_0)$

Seja $\mathcal{C}_0 = \langle \mathcal{D}_0, \mathcal{F} \rangle$ onde $\mathcal{D}_0 = \{ \}$, $\mathcal{F}(\omega_0) = \{ \square p \}$ e $\mathcal{F}(\lambda) = \{ \}$ para todo $\lambda \in \text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ tal que $\lambda \neq \omega_0$. Mostraremos que $\mathcal{C}_0 \vdash_S \neg \diamond \neg p : \omega_0$.

Derivação: Seja $\mathcal{C}'_0 = \mathcal{C}_0 + [\diamond \neg p : \omega_0]$ e seja $\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}'_0 + [\neg p : f_{\neg p}(\omega_0)] + [R(\omega_0, f_{\neg p}(\omega_0))]$.

(i) Então a Eliminação do \diamond produz \mathcal{C}'_1 a partir de \mathcal{C}'_0

Seja $\mathcal{C}'_2 = \mathcal{C}'_1 + [p : f_{\neg p}(\omega_0)]$.

(ii) Então a Eliminação do \square produz \mathcal{C}'_2 a partir de \mathcal{C}'_1

Seja $\mathcal{C}'_3 = \mathcal{C}'_2 + [p \wedge \neg p : f_{\neg p}(\omega_0)]$.

(iii) Então a Introdução do \wedge produz \mathcal{C}'_3 a partir de \mathcal{C}'_2

Por (i), (ii) e (iii), $\mathcal{C}'_0, \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \mathcal{C}'_3$ é uma prova. Então, por (iii)

(iv) $\mathcal{C}_0 + [\diamond \neg p : \omega_0] \vdash_S \perp : f_{\neg p}(\omega_0)$

Portanto, por (iv), a Introdução do \neg produz $\mathcal{C}_0 + [\neg \diamond \neg p : \omega_0]$ a partir de \mathcal{C}_0 .

Então $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_0 + [\neg \diamond \neg p : \omega_0]$ é uma prova.

Portanto, $\mathcal{C}_0 \vdash_S \neg \diamond \neg p : \omega_0$.

O exemplo de prova acima $(\mathcal{C}_0 \langle \square p : \omega_0 \rangle \vdash_S \neg \diamond \neg p : \omega_0)$ pode ser representado graficamente como segue:

$\mathcal{C}_0 \langle \square p : \omega_0 \rangle$	
$\mathcal{C}'_0 \langle \square p : \omega_0, [\diamond \neg p : \omega_0] \rangle$	(nova hipótese)
$\mathcal{C}'_1 \langle \square p : \omega_0, R(\omega_0, f_{\neg p}(\omega_0)), \neg p : f_{\neg p}(\omega_0) \rangle$	($\diamond E$)
$\mathcal{C}'_2 \langle p : f_{\neg p}(\omega_0), \neg p : f_{\neg p}(\omega_0) \rangle$	($\square E$)
$\mathcal{C}'_3 \langle \perp : f_{\neg p}(\omega_0) \rangle$	($\wedge I$)
$\mathcal{C}_0 \langle \neg \diamond \neg p : \omega_0 \rangle$	($\neg I$)

Exemplo 1.2 ($\mathcal{C} \langle \neg \diamond \neg p : \omega_0 \rangle \vdash_S \Box p : \omega_0$)

Seja $\mathcal{C}_0 = \langle \mathcal{D}_0, \mathcal{F} \rangle$, onde $\mathcal{D}_0 = \{\}$, $\mathcal{F}(\omega_0) = \{\neg \diamond \neg p\}$ e $\mathcal{F}(\lambda) = \{\}$ para todo $\lambda \in \text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ tal que $\lambda \neq \omega_0$. Mostraremos que $\mathcal{C}_0 \vdash_S \Box p : \omega_0$.

Seja $\mathcal{C}'_0 = \mathcal{C}_0 + [R(\omega_0, \text{box}_p(\omega_0))]$, seja $\mathcal{C}''_0 = \mathcal{C}'_0 + [\neg p : \text{box}_p(\omega_0)]$. (No mundo assumido $\text{box}_p(\omega_0)$, precisamos provar p para aplicar a regra de Introdução do \Box . Para provar $p : \text{box}_p(\omega_0)$ pela regra de inferência Eliminação do \neg , precisamos provar $\neg \neg p : \text{box}_p(\omega_0)$, o que exige a regra de Introdução do \neg . Portanto, a segunda hipótese: $\neg p : \text{box}_p(\omega_0)$. Seja $\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}''_0 + [\diamond \neg p : \omega_0]$ e seja $\mathcal{C}''_2 = \mathcal{C}'_1 + [(\diamond \neg p) \wedge (\neg \diamond \neg p) : \omega_0]$.

Então a Introdução do \wedge produz \mathcal{C}''_2 a partir de \mathcal{C}'_1 , e a Introdução do \diamond produz \mathcal{C}'_1 a partir de \mathcal{C}''_0 , e, portanto, $\mathcal{C}''_0, \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}''_2$ é uma prova. Então

(i) $\mathcal{C}'_0 + [\neg p : \text{box}_p(\omega_0)] \vdash_S \perp : \omega_0$

Seja $\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}'_0 + [\neg \neg p : \text{box}_p(\omega_0)]$

(ii) Por (i), a Introdução do \neg produz \mathcal{C}'_1 a partir de \mathcal{C}'_0 .

Seja $\mathcal{C}'_2 = \mathcal{C}'_1 + [p : \text{box}_p(\omega_0)]$

(iii) Por (ii), a Eliminação do \neg produz \mathcal{C}'_2 a partir de \mathcal{C}'_1 .

Portanto, $\mathcal{C}'_0, \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2$ é uma prova, e $\mathcal{C}_0 + [R(\omega_0, \text{box}_p(\omega_0))] \vdash_S p : \text{box}_p(\omega_0)$.

Seja $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0 + [\Box p : \omega_0]$.

Por (iii), a Introdução do \Box produz \mathcal{C}_1 a partir de \mathcal{C}_0 .

Portanto, $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ é uma prova, e, portanto, $\mathcal{C}_0 \vdash_S \Box p : \omega_0$.

O exemplo acima ($\mathcal{C}_0 \langle \neg \diamond \neg p : \omega_0 \rangle \vdash_S \Box p : \omega_0$) pode ser representado graficamente como segue:

\mathcal{C}_0	$\langle \neg \diamond \neg p : \omega_0 \rangle$	
\mathcal{C}'_0	$\langle \neg \diamond \neg p : \omega_0, [R(\omega_0, \text{box}_p(\omega_0))] \rangle$	(nova hipótese)
\mathcal{C}''_0	$\langle \neg \diamond \neg p : \omega_0, [\neg p : \text{box}_p(\omega_0)] \rangle$	(nova hipótese)
\mathcal{C}'_1	$\langle \neg \diamond \neg p : \omega_0, \diamond \neg p : \omega_0 \rangle$	$(\diamond I)$
\mathcal{C}''_2	$\langle \perp : \omega_0 \rangle$	$(\wedge I)$
\mathcal{C}'_2	$\langle \neg \neg p : \text{box}_p(\omega_0) \rangle$	$(\neg I)$
\mathcal{C}_1	$\langle p : \text{box}_p(\omega_0) \rangle$	$(\neg E)$
\mathcal{C}_0	$\langle \Box p : \omega_0 \rangle$	$(\Box I)$

1.4.3 Regras estruturais

Para permitir o raciocínio sobre configurações arbitrárias e para capturar os diferentes $K\delta$ -MLDSs, um terceiro conjunto de regras de inferência precisa ser incluído como parte de um MLDS proposicional. Essas regras facilitam o raciocínio sobre diagramas de uma configuração, usando a álgebra de rotulação particular $\mathcal{A}_{K\delta}$ sob consideração, e inferem R -literais e unidades declarativas que não são implicadas pelas regras modais.

Definição 1.27 (Afirmação do R , \mathcal{I}_{R-A}) Para todas as configurações $\mathcal{C} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ e R -literais Δ , $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\Delta]$ é membro da regra de inferência Afirmação do R (às vezes escrita \mathcal{I}_{R-A}) se $\mathcal{D}, \mathcal{A} \vdash_{\text{FOL}} \Delta$, onde \mathcal{A} é uma álgebra de rotulação.

Na seção anterior, foi enfatizado que álgebras de rotulação diferentes definem MLDSs proposicionais diferentes. Sob o aspecto prova-teórico, essas diferenças são impostas pela regra \mathcal{I}_{R-A} . Essa regra facilita a inferência de novos R -literais de acordo com as propriedades da relação de acessibilidade dada por uma álgebra de rotulação particular \mathcal{A} . Por exemplo, se a álgebra de rotulação $\mathcal{A}_{K\{\mathbf{D}\}}$ é considerada, a regra acima permite a inferência de R -literais da forma $R(\lambda, succ(\lambda))$, para qualquer rótulo λ , incorporando, portanto, a propriedade de serialidade da relação de acessibilidade no processo de derivação. Isso permite a derivação de unidades declarativas da forma $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha : \lambda$, para qualquer rótulo arbitrário λ , caracterizando, portanto, o MLDS como um $K\{\mathbf{D}\}$ -MLDS. Dessa forma, o conjunto de regras modais permanece inalterado para toda a família de MLDSs proposicionais, o que torna uniforme o sistema de dedução natural.

As duas regras seguintes formalizam formas extras de interações entre R -literais e unidades declarativas. A regra $\mathcal{I}_{\neg I}$ descrita anteriormente detecta informações inconsistentes (isto é, $\perp : \lambda$) em configurações. Mas a questão é, como uma inconsistência pode surgir? Em uma teoria modal padrão, uma contradição geralmente é devida a suposições (iniciais ou temporárias) que negam-se umas às outras. Em uma teoria de MLDS, suposições contraditórias podem ser tanto um R -literal e seu conjugado como uma unidade declarativa e sua negação (A negação de uma unidade declarativa $\alpha : \lambda$ é uma unidade declarativa da forma $\neg\alpha : \lambda$.) Enquanto as últimas são capturadas pela regra da Introdução da \neg , os primeiros são identificados pela seguinte regra de Introdução da \perp , que novamente reflete o princípio clássico da qualquer fórmula ser derivada a partir de uma contradição.

Definição 1.28 (Introdução do \perp , $\mathcal{I}_{\perp I}$) *Para todas as configurações \mathcal{C} , qualquer R -literal Δ e qualquer unidade declarativa $\alpha : \lambda$, $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\alpha : \lambda]$ é membro da regra de inferência Introdução do \perp (às vezes escrita $\mathcal{I}_{\perp I}$) se $\Delta \in \mathcal{C}$ e $\overline{\Delta} \in \mathcal{C}$. Algumas vezes, escreveremos a Introdução do \perp como*

$$\frac{C\langle\Delta, \overline{\Delta}\rangle}{C'\langle\alpha : \lambda\rangle}$$

Um exemplo que mostra por que essa regra é incluída e como ela é usada é dado abaixo.

Exemplo 1.3 *Seja \mathcal{A} a álgebra de rotulação dada pelo conjunto $\{\forall x\forall y\neg R(x, y)\}$. Esse conjunto formaliza a classe de estruturas na qual os mundos possíveis são independentes uns dos outros - isto é, para cada mundo possível, não há qualquer mundo acessível a partir dele. Nessa classe de estruturas, qualquer unidade declarativa da forma $\Box\alpha : \lambda$ é provável. É dada abaixo uma derivação gráfica que mostra, em particular, que a unidade declarativa $\Box\alpha : \omega_0$ (onde α é qualquer wff arbitrária) é derivável a partir da configuração $\mathcal{C}_0 = \{\}, \mathcal{F}_\emptyset(\lambda) = \{\}$ para qualquer termo λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$.*

$$\begin{array}{l} \mathcal{C}_0 \\ \hline C'_1 \langle \neg R(\omega_0, box_\alpha(\omega_0)) \rangle \quad \text{(Afirmção do } R) \\ \hline C'_1 \langle \neg R(\omega_0, box_\alpha(\omega_0), [R(\omega_0, box_\alpha(\omega_0))] \rangle \quad \text{(suposição)} \\ \hline C_1 \langle \alpha : box_\alpha(\omega_0) \rangle \quad (\perp I) \\ \hline C'_2 \langle \Box\alpha : \omega_0 \rangle \quad (\Box I) \end{array}$$

Até aqui, as unidades declarativas eram deriváveis a partir de informações inconsistentes (usando as regras de Introdução da \neg e de Introdução da \perp). Entretanto, um tipo de raciocínio semelhante pode ser aplicado aos R -literais. Uma segunda forma de interação entre R -literais e unidades declarativas é capturada pela seguinte regra de inferência, na qual os R -literais são derivados sempre que uma inconsistência lógica surge dentro de uma configuração.

Definição 1.29 (*Introdução do R , \mathcal{I}_{R-I}*) Para todas as configurações \mathcal{C} e R -literais Δ , $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\Delta]$ é membro da regra de inferência *Introdução do R* (às vezes escrita \mathcal{I}_{R-I}) se, para algum termo λ' , $\mathcal{C} + [\overline{\Delta}] \vdash_S \perp : \lambda'$. Algumas vezes, escreveremos a *Introdução do R* como:

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{C} + [\overline{\Delta}] \\ \vdots \\ \tilde{\mathcal{C}} \langle \perp : \lambda' \rangle \end{array}}{\mathcal{C}' \langle \Delta \rangle}$$

Um exemplo que mostra quando e como essa regra é usada é o seguinte: seja \mathcal{C} a configuração $\langle \{\}, \mathcal{F} \rangle$, onde $\mathcal{F}(\omega_0) = \{\Box p\}$, $\mathcal{F}(\omega_1) = \{\neg p\}$ e, para qualquer rótulo λ diferente de ω_0 e de ω_1 , $\mathcal{F}(\lambda) = \{\}$. Então $\mathcal{C} \vdash_S \neg R(\omega_0, \omega_1)$. Isso é obtido pela aplicação da regra \mathcal{I}_{R-I} e da regra $\mathcal{I}_{\Box E}$.

As regras estruturais descritas acima e as regras clássicas e modais dadas nas subseções anteriores têm, todas, o efeito de expandir suas configurações antecedentes. Para completude, a seguinte regra é incluída em cada MLDS proposicional, o que simplesmente permite a derivação de qualquer configuração contida naquela antecedente.

Definição 1.30 (*Redução da \mathcal{C} , \mathcal{I}_{C-R}*) Para todas as configurações \mathcal{C} e \mathcal{C}' , \mathcal{C}/\mathcal{C}' é membro da regra de inferência *Redução da \mathcal{C}* (às vezes escrita \mathcal{I}_{C-R}) se $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$.

Para compreensão das duas derivações de exemplo (suas representações gráficas) dadas a seguir, algumas reescritas equivalentes de unidades declarativas são assumidas implicitamente. Por exemplo: $\neg \diamond r : box_{\diamond r}(\omega_0)$ é substituída por $\Box \neg r : box_{\diamond r}(\omega_0)$; e $\neg \Box \Box p : \omega_0$ é substituída por $\diamond \diamond \neg p$.

Exemplo 1.4 Considere o MLDS $K\{\mathbf{B}, 4\}$ -MLDS. Seja \mathcal{C} a configuração $\langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ onde $\mathcal{D} = \{\}$, $\mathcal{F}(\omega_0) = \{\Box \Box p \rightarrow r\}$ e $\mathcal{F}(\lambda) = \{\}$ para cada $\lambda \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ tal que $\lambda \neq \omega_0$. Então $\mathcal{C} \vdash_{K\{\mathbf{B}, 4\}\text{-MLDS}} \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box \diamond r : \omega_0$.

Derivação:		
\mathcal{C}	$\langle \Box \quad \Box p \quad \rightarrow r \quad : \omega_0 \rangle$	
\mathcal{C}	$\langle [\Box \quad (p \wedge \quad q) : \omega_0] \rangle$	(suposição)
\mathcal{C}	$\langle [R(\omega_0, \text{box}_{\diamond r}(\omega_0))] \rangle$	(suposição)
$\tilde{\mathcal{C}}$	$\langle R \quad (\text{box}_{\diamond r}(\omega_0), \omega_0) \rangle$	(Afirmação do R)
$\tilde{\mathcal{C}}$	$\langle [R(\omega_0, \text{box}_{\Box p}(\omega_0))] \rangle$	(suposição)
$\tilde{\mathcal{C}}$	$\langle [R(\text{box}_{\Box p}(\omega_0), \text{box}_p(\text{box}_{\Box p}(\omega_0)))] \rangle$	(suposição)
$\tilde{\mathcal{C}}_1$	$\langle R(\omega_0, \text{box}_p(\text{box}_{\Box p}(\omega_0))) \rangle$	(Afirmação do R)
$\tilde{\mathcal{C}}_2$	$\langle p \wedge q : \text{box}_p(\text{box}_{\Box p}(\omega_0)) \rangle$	($\Box E$)
$\tilde{\mathcal{C}}_3$	$\langle p : \text{box}_p(\text{box}_{\Box p}(\omega_0)) \rangle$	($\wedge E$)
$\tilde{\mathcal{C}}_4$	$\langle \Box p : \text{box}_{\Box p}(\omega_0) \rangle$	($\Box I$)
$\tilde{\mathcal{C}}_5$	$\langle \Box \quad \Box p : \omega_0 \rangle$	($\Box I$)
$\tilde{\mathcal{C}}_6$	$\langle r : \omega_0 \rangle$	($\rightarrow E$)
$\tilde{\mathcal{C}}_7$	$\langle \diamond \quad r : \text{box}_{\diamond r}(\omega_0) \rangle$	($\diamond I$)
$\tilde{\mathcal{C}}_8$	$\langle \Box \quad \diamond r : \omega_0 \rangle$	($\Box I$)
\mathcal{C}'	$\langle \Box \quad (p \wedge \quad q) \quad \rightarrow \Box \diamond r : \omega_0 \rangle$	($\rightarrow I$)

Uma derivação alternativa		
\mathcal{C}	$\langle \Box \quad \Box \quad p \rightarrow r : \omega_0 \rangle$	
\mathcal{C}	$\langle [\Box \quad (p \wedge q) : \omega_0] \rangle$	(suposição)
\mathcal{C}	$\langle [R(\omega_0, \text{box}_{\diamond r}(\omega_0))] \rangle$	(suposição)
\mathcal{C}	$\langle [\neg \diamond r : \text{box}_{\diamond r}(\omega_0)] \rangle$	(suposição)
$\tilde{\mathcal{C}}_1$	$\langle R(\text{box}_{\diamond r}(\omega_0), \omega_0) \rangle$	(Afirm. R)
$\tilde{\mathcal{C}}_2$	$\langle \neg r : \omega_0 \rangle$	($\Box E$)
$\tilde{\mathcal{C}}_3$	$\langle \neg \Box \Box p : \omega_0 \rangle$	($\rightarrow E$)
$\tilde{\mathcal{C}}_4$	$\langle \diamond \neg p : f_{\diamond \neg p}(\omega_0), R(\omega_0, f_{\diamond \neg p}(\omega_0)) \rangle$	($\diamond E$)
$\tilde{\mathcal{C}}_5$	$\langle \neg p : f_{\neg p}(f_{\diamond \neg p}(\omega_0)), R(f_{\diamond \neg p}(\omega_0), f_{\neg p}(f_{\diamond \neg p}(\omega_0))) \rangle$	($\diamond E$)
$\tilde{\mathcal{C}}_6$	$\langle R(\omega_0, f_{\neg p}(f_{\diamond \neg p}(\omega_0))) \rangle$	(Afirm. R)
$\tilde{\mathcal{C}}_7$	$\langle p \wedge q : f_{\neg p}(f_{\diamond \neg p}(\omega_0)) \rangle$	($\Box E$)
$\tilde{\mathcal{C}}_8$	$\langle p : f_{\neg p}(f_{\diamond \neg p}(\omega_0)) \rangle$	($\wedge E$)
$\tilde{\mathcal{C}}_9$	$\langle \perp : f_{\neg p}(f_{\diamond \neg p}(\omega_0)) \rangle$	($\wedge I$)
$\tilde{\mathcal{C}}_{10}$	$\langle \diamond r : \text{box}_{\diamond r}(\omega_0) \rangle$	($\neg I$)
$\tilde{\mathcal{C}}_{11}$	$\langle \Box \quad \diamond r : \omega_0 \rangle$	($\Box I$)
\mathcal{C}'	$\langle \Box \quad (p \wedge q) \rightarrow \Box \diamond r : \omega_0 \rangle$	($\rightarrow I$)

1.5 Uma semântica

Um MLDS proposicional pode ser considerado uma abordagem “semi-traduzida” para a lógica modal - uma relação de acessibilidade como as de Kripke é expressa sintaticamente, mas sem exigir a tradução completa das fórmulas modais para sentenças de primeira ordem. Portanto, uma semântica modelo-teórica poderia ser dada igualmente em termos da semântica de mundos possíveis de Kripke tradicional (veja discussões em [GAB96]) ou em termos de uma semântica de primeira ordem, usando algum método de tradução. A segunda abordagem foi escolhida para este trabalho, e as razões para tanto serão apresentadas na próxima seção. Um método de tradução de um MLDS proposicional para uma lógica de primeira ordem é definido e a noção semântica de relação de

consequência, \models_{MLDS} , assim como a definição de um modelo e da satisfatibilidade de uma configuração, são dados em termos da semântica clássica.

Como já foi destacado, a unidade declarativa $\alpha : \lambda$ pode ser interpretada como “a fórmula α é verdadeira no mundo possível λ ”. No que segue, essas noções semânticas de Kripke são expressas em termos de declarações de primeira ordem da forma $[\alpha]^*(\lambda)$, onde $[\alpha]^*$ é um símbolo predicativo unário. Portanto, a linguagem de rotulação semiestendida $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ é mais estendida para incluir o símbolo predicativo $[\alpha]^*$ para cada wff α de \mathcal{L}_M . As relações entre esses predicados são restritas por um conjunto de esquemas de axiomas de primeira ordem que capturam as condições de satisfatibilidade de cada tipo de fórmula α (O tipo de uma wff é dado pelo conetivo principal da própria wff. Por exemplo, a wff $\diamond(p \rightarrow q)$ é uma fórmula- \diamond). Esses esquemas de axiomas estendem a álgebra de rotulação \mathcal{A} de um MLDS proposicional para uma teoria de primeira ordem chamada de álgebra estendida. Definições formais são dadas a seguir.

Definição 1.31 (*Linguagem de rotulação estendida $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$*) *Seja $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_L)$ uma linguagem de rotulação semiestendida. Seja $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ o conjunto ordenado de todas as wffs de \mathcal{L}_M . A linguagem de rotulação estendida $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ é definida como a linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_L)$ estendida com o seguinte conjunto de símbolos predicativos unários: $\{[\alpha_1]^*, \dots, [\alpha_1]^*, \dots\}$.*

Definição 1.32 (*Álgebra estendida \mathcal{A}^+*) *Dada uma linguagem de rotulação estendida $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e uma álgebra de rotulação \mathcal{A} escrita em $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_L)$, a álgebra estendida \mathcal{A}^+ é a teoria de primeira ordem em $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, consistindo do seguinte esquema de axiomas (Ax1) – (Ax8), junto com os axiomas de \mathcal{A} :*

Para toda wff α e β de \mathcal{L}_M :

$$\begin{aligned} \forall x([\alpha \wedge \beta]^*(x) &\equiv ([\alpha]^*(x) \wedge [\beta]^*(x))) & (Ax1) \\ \forall x([\neg\alpha]^*(x) &\equiv \neg[\alpha]^*(x)) & (Ax2) \\ \forall x([\alpha \vee \beta]^*(x) &\equiv ([\alpha]^*(x) \vee [\beta]^*(x))) & (Ax3) \\ \forall x([\alpha \rightarrow \beta]^*(x) &\equiv ([\alpha]^*(x) \rightarrow [\beta]^*(x))) & (Ax4) \\ \forall x([\diamond\alpha]^*(x) &\rightarrow (R(x, f_\alpha(x)) \wedge [\alpha]^*(f_\alpha(x)))) & (Ax5) \\ \forall x([\exists y(R(x, y) \wedge & [\alpha]^*(y))] \rightarrow [\diamond\alpha]^*(x)) & (Ax6) \\ \forall x([\Box\alpha]^*(x) &\rightarrow ([\alpha]^*(Box_\alpha(x)) \rightarrow [\Box\alpha]^*(x))) & (Ax7) \\ \forall x([\Box\alpha]^*(x) &\rightarrow (\forall y(R(x, y) \rightarrow [\alpha]^*(y)))) & (Ax8) \end{aligned}$$

Os quatro primeiros esquemas de axiomas expressam as propriedades distributivas dos conectivos lógicos entre os predicados monádicos de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Eles cobrem a definição semântica de Kripke de satisfatibilidade dos conectivos \wedge, \neg, \vee e \rightarrow , respectivamente. (Ax5) força a relação de acessibilidade R sobre os rótulos gerados pela aplicação dos símbolos funcionais f_{α_i} de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Os esquemas de axiomas (Ax5) – (Ax6) juntos cobrem a definição semântica de Kripke do operador modal \diamond . (isto é, a declaração $\forall x([\exists y(R(x, y) \wedge [\alpha]^*(y))] \equiv [\diamond\alpha]^*(x))$ pode ser derivada a partir de (Ax5) – (Ax6)). Analogamente, os esquemas de axiomas (Ax7) – (Ax8) cobrem a definição semântica de Kripke do operador modal \Box . (isto é, a declaração $\forall x([\Box\alpha]^*(x) \equiv \forall y(R(x, y) \rightarrow [\alpha]^*(y))$) pode ser derivada a partir de (Ax7) – (Ax8)). Elas confirmam semanticamente que a regra de introdução do \Box funciona corretamente. Portanto, os esquemas de axiomas (Ax1) – (Ax8) de \mathcal{A}^+ refletem a definição semântica de Kripke de satisfatibilidade de

wffs modais. É fácil ver, pela interpretação da verdade de $[\alpha]^*(x)$ como a verdade da fórmula modal α no mundo possível x .

Uma maneira alternativa de descrever a semântica de Kripke na lógica clássica é traduzir *wffs* da linguagem \mathcal{L}_M para termos rasos da linguagem clássica e usar um predicado *É válido* para definir as condições de satisfatibilidade semântica dos operadores clássicos e modais. Um exemplo é descrito em [ARS94] para lógicas de crenças. Entretanto, a complexidade sintática extra dada por essa abordagem não é necessária no caso proposicional. Por outro lado, para o caso de predicados, o uso de símbolos de função para representar *wffs* como termos dentro de um predicado *É válido* ajuda a lidar com quantificadores e variáveis, que de outra forma seriam embutidos nos nomes dos predicados monádicos, portanto sendo ainda mais “inacessíveis”.

Note que como uma álgebra estendida também inclui os axiomas da relação de acessibilidade, álgebras de rotulação \mathcal{A} diferentes estendem a álgebra \mathcal{A}^+ . Portanto, subcritos da forma $K\delta$ serão, às vezes, adicionados ao símbolo \mathcal{A}^+ para denotar álgebras estendidas particulares associadas com MLDS- $K\delta$ particulares.

A proposição seguinte mostra que a interdefinibilidade padrão de \Box e \Diamond pode ser derivada a partir de qualquer álgebra estendida \mathcal{A}^+ , em particular, do conjunto de esquemas de axiomas acima.

Proposição 1 Dada a linguagem estendida $\text{Mon}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e uma álgebra estendida associada \mathcal{A}^+ , para qualquer fórmula $\alpha \in \mathcal{L}_M$, a seguinte equivalência é satisfeita: $\mathcal{A}^+ \vdash_{\text{FOL}} \forall x([\Box\alpha]^*(x) \equiv [\neg\Diamond\neg\alpha]^*(x))$.

Prova: É suficiente provar os dois resultados seguintes para um termo raso arbitrário λ .

- (a) $\mathcal{A}^+ \vdash_{\text{FOL}} [\Box\alpha]^*(\lambda) \rightarrow [\neg\Diamond\neg\alpha]^*(\lambda)$
 (b) $\mathcal{A}^+ \vdash_{\text{FOL}} [\neg\Diamond\neg\alpha]^*(\lambda) \rightarrow [\Box\alpha]^*(\lambda)$

Prova de (a)	
$[\Box\alpha]^*(\lambda)$	(i)
$\forall y(R(\lambda, y) \rightarrow [\alpha]^*(y))$	(ii)
$\forall y(R(\lambda, y) \rightarrow \neg[\neg\alpha]^*(y))$	(iii)
$\forall y\neg(R(\lambda, y) \wedge [\neg\alpha]^*(y))$	(iv)
$\neg(R(\lambda, f_{\neg\alpha}(x)) \wedge [\neg\alpha]^*(f_{\neg\alpha}(\lambda)))$	(iv)
$\neg[\Diamond\neg\alpha]^*(\lambda)$	(vi)
$[\neg\Diamond\neg\alpha]^*(\lambda)$	(vii)

Prova de (a):

- (i) é uma suposição inicial,
 (ii) é derivada a partir de (i) e (Ax8) pela aplicação de modus ponens,
 (iii) é obtida a partir de (ii) e (Ax2),
 (iv) é obtida por reescrita equivalente de (iii),
 (v) é derivada a partir de (iv) usando regras clássicas para a quantificação universal, e
 (vi) é obtida a partir de (v) e do contrapositivo de (Ax5) usando modus ponens.
 Finalmente, (vii) é derivado a partir de (vi) e de (Ax2).

Prova de (b)	
$[\neg\Diamond\neg\alpha]^*(\lambda)$	(i)
$\neg\exists y(R(\lambda, y) \wedge [\neg\alpha]^*(y))$	(ii)
$\forall y(\neg R(\lambda, y) \vee \neg[\neg\alpha]^*(y))$	(iii)
$\forall y(R(\lambda, y) \rightarrow [\alpha]^*(y))$	(iv)
$R(\lambda, \text{box}_\alpha(\lambda)) \rightarrow [\alpha]^*(\text{box}_\alpha(\lambda))$	(v)
$[\Box\alpha]^*(\lambda)$	(vi)

Prova de (b):

- (i) é uma suposição inicial,
- (ii) é derivada de (i), (Ax2) e (Ax6),
- (iii) é obtida a partir de (ii) por reescrita equivalente,
- (iv) é obtida a partir de (iii) e (Ax2),
- (v) é derivada de (iv) usando regras clássicas para quantificação universal, e, finalmente,
- (vi) é derivada de (v) e (Ax7) por modus ponens.

Um método de tradução é definido a seguir. Ele associa expressões sintáticas de uma MLDL proposicional com sentenças da linguagem de primeira ordem $\text{Mon}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, e portanto associa teorias (configurações) com teorias de primeira ordem da linguagem $\text{Mon}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Cada unidade declarativa $\alpha : \lambda$ é traduzida para a sentença $[\alpha]^*(\lambda)$, e R -literais são traduzidos para si mesmos. Portanto, a tradução de primeira ordem de uma configuração é uma teoria de primeira ordem que inclui os R -literais, que estão presentes no diagrama da configuração, e o conjunto de fórmulas monádicas $[\alpha]^*(\lambda)$ que correspondem às unidades declarativas presentes na configuração. Uma definição formal é dada abaixo.

Definição 1.33 (*Tradução de primeira ordem para uma configuração*) Considere uma MLDL $\langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle$ e a linguagem estendida associada $\text{Mon}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Seja $\mathcal{C} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ uma configuração. A tradução de primeira ordem de \mathcal{C} , escrita $\text{FOT}(\mathcal{C})$, é a teoria escrita em $\text{Mon}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e definida pela expressão: $\text{FOT}(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cup \text{DU}$, onde $\text{DU} = \{[\alpha]^*(\lambda) \mid \alpha \in F(\lambda), \lambda \text{ é um termo raso de } \text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)\}$.

Uma tradução de uma configuração é, portanto, uma teoria de primeira ordem que inclui os R -literais que estão presentes no diagrama da configuração, e o conjunto de fórmulas monádicas $[\alpha]^*(\lambda)$ que corresponde às unidades declarativas presentes na configuração. Note que, como os rótulos só podem ser termos rasos de $\text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, a tradução de primeira ordem de uma dada configuração é um conjunto de literais rasos da linguagem $\text{Mon}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$.

As noções de modelos, satisfatibilidade e acarretamento semântico são dadas em termos da semântica clássica usando as definições acima.

Definição 1.34 (*Estrutura semântica de um MLDS- $K\delta$*) Dado um $\text{MLDS-}K\delta S = \langle \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ e a álgebra estendida associada $\mathcal{A}_{K\delta}^+$, \mathcal{M} é uma estrutura semântica do $\text{MLDS-}K\delta S$ se \mathcal{M} é um modelo de $\mathcal{A}_{K\delta}^+$.

Classes diferentes de estruturas semânticas podem ser obtidas pela consideração de álgebras de rotulação subjacentes diferentes. Portanto, o símbolo \mathcal{M} será escrito algumas vezes com o subscrito $K\delta$ (isto é, $\mathcal{M}_{K\delta}$) para identificar modelos de uma classe particular.

Definição 1.35 (*Satisfatibilidade de uma unidade declarativa*) Seja $\alpha : \lambda$ uma unidade declarativa. $\alpha : \lambda$ é satisfável (com respeito ao $\text{MLDS-}K\delta$) se existe uma estrutura semântica $\mathcal{M}_{K\delta}$ tal que $\mathcal{M}_{K\delta} \Vdash_{\text{FOL}} [\alpha]^*(\lambda)$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{M}_{K\delta}$ satisfaz $\alpha : \lambda$ e escrevemos $\mathcal{M}_{K\delta} \Vdash_{\text{MLDS-}K\delta} \alpha : \lambda$.

Note que o símbolo \Vdash_{FOL} significa a noção clássica padrão de satisfatibilidade, e a expressão $\mathcal{M} \Vdash_{\text{FOL}} [\alpha]^*(\lambda)$ significa que \mathcal{M} é um modelo clássico para a sentença $[\alpha]^*(\lambda)$.

Definição 1.36 (*Satisfatibilidade de um R-literal*) Seja Δ um R-literal. Δ é satisfatível (com respeito a um MLDS- $K\delta$) se há uma estrutura semântica $\mathcal{M}_{K\delta}$ tal que $\mathcal{M}_{K\delta} \Vdash_{FOL} \Delta$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{M}_{K\delta}$ satisfaz Δ e escrevemos $\mathcal{M}_{K\delta} \Vdash_{MLDS-K\delta} \Delta$.

As duas definições acima estabelecem o valor verdade de cada uma das entidades sintáticas de um MLDS proposicional. Agora a definição de satisfatibilidade de uma teoria de MLDS pode ser dada.

Definição 1.37 (*Satisfatibilidade de uma configuração*) Seja \mathcal{C} uma configuração. \mathcal{C} é satisfatível (com respeito a um MLDS- $K\delta$) se existir uma estrutura semântica $\mathcal{M}_{K\delta}$ tal que, para cada $\pi, \pi' \in \mathcal{C}$, MLDS- $K\delta$ ($\mathcal{M}_{K\delta}$) satisfaz π , (onde π pode ser uma unidade declarativa ou um R-literal). Nesse caso, dizemos que o MLDS- $K\delta$ satisfaz \mathcal{C} e escrevemos $\mathcal{M}_{K\delta} \Vdash_{MLDS-K\delta} \mathcal{C}$.

Finalmente, a noção de acarretamento semântico para um MLDS proposicional é dada em termos do acarretamento semântico clássico.

Definição 1.38 (*Acarretamento semântico em um MLDS*) Seja $\mathcal{A}_{K\delta}^+$ a álgebra estendida de um MLDS- $K\delta$. Seja $\mathcal{C} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$, e sejam $\mathcal{C}' = \langle \mathcal{D}', \mathcal{F}' \rangle$ duas configurações, e sejam $FOT(\mathcal{C}) = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}\mathcal{U}$ e $FOT(\mathcal{C}') = \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}'\mathcal{U}'$ suas respectivas traduções de primeira ordem. A configuração \mathcal{C} acarreta semanticamente \mathcal{C}' , o que é escrito $\mathcal{C} \models_{MLDS-K\delta} \mathcal{C}'$ se:

- $\mathcal{A}_{K\delta}^+ \cup FOT(\mathcal{C}) \models_{FOL} \Delta$ para cada $\Delta \in \mathcal{D}'$
- $\mathcal{A}_{K\delta}^+ \cup FOT(\mathcal{C}) \models_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$ para cada $[\alpha]^*(\lambda) \in \mathcal{D}'\mathcal{U}'$

Assim como para a derivabilidade (\vdash_{MLDS}), onde $K\delta$ for arbitrário o símbolo $\models_{MLDS-K\delta}$ será algumas vezes abreviado para \models_{MLDS} . A notação seguinte é baseada nas definições padrão da relação de derivabilidade clássica e no acarretamento semântico clássico.

Notação 1.9 Dadas duas configurações \mathcal{C} e \mathcal{C}' e suas traduções de primeira ordem $FOT(\mathcal{C}) = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}\mathcal{U}$ e $FOT(\mathcal{C}') = \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}'\mathcal{U}'$, a expressão $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}')$ significa que:

- $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}) \vdash_{FOL} \Delta$ para cada $\Delta \in \mathcal{D}'$
- $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}) \vdash_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$ para cada $[\alpha]^*(\lambda) \in \mathcal{D}'\mathcal{U}'$

e analogamente, $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}) \models_{FOL} FOT(\mathcal{C}')$ se:

- $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}) \models_{FOL} \Delta$ para cada $\Delta \in \mathcal{D}'$
- $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}) \models_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$ para cada $[\alpha]^*(\lambda) \in \mathcal{D}'\mathcal{U}'$

A notação acima permite que a definição de acarretamento semântico entre configurações seja alternativamente declarada como: $\mathcal{C} \models_{MLDS} \mathcal{C}'$ sse $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}) \models_{FOL} FOT(\mathcal{C}')$.

1.6 Estendendo o sistema dedutivo rotulado modal

A estrutura de trabalho descrita neste capítulo oferece uma metodologia geral o suficiente para acompanhar a classe de lógicas modais “padrão” \mathbf{K} , \mathbf{T} , $\mathbf{S4}$, etc., e é o esquema MLDS básico que é o foco principal desta parte do trabalho. Entretanto, muitas extensões da estrutura de trabalho sugerem a si próprias para estudos futuros, e é importante mencionar brevemente duas em particular, que as investigações preliminares mostram ser naturais e sem problemas. Ambas envolvem a extensão da linguagem de rotulação \mathcal{L}_L com outros símbolos predicativos binários, o primeiro para acompanhar “lógicas multimodais”, e o segundo para incluir álgebras de rotulação com o predicado de igualdade.

Em lógicas multimodais, a semântica subjacente inclui não apenas uma, mas uma coleção de relações de acessibilidade. Cada relação R_i tem um par de operadores modais \Box_i e \Diamond_i associados. Por exemplo, a Lógica Dinâmica [HAR79] tem um operador de necessidade $[A]$ correspondente a cada “ação” A , e a fórmula $[A]\alpha$ pretende significar “ α é sempre verdadeira após a ação A ”. Estender MLDS com múltiplas modalidades é direto. A linguagem de rotulação \mathcal{L}_L é estendida com uma relação binária R_i para cada modalidade i , e a álgebra de rotulação inclui axiomas extras ou esquemas de axiomas extras envolvendo cada ou todas essas relações, análogo àquelas da Tabela 1.2. A linguagem semiestendida $\text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ inclui símbolos de função f_α^i e box_α^i para cada *wff* α e modalidade i , e as regras de inferência modais e estruturais são apropriadamente duplicadas para cada modalidade. É fácil ver que a álgebra estendida \mathcal{A}^+ pode também ser apropriadamente estendida, de modo que a definição de acarretamento semântico seja também facilmente generalizada para o caso de multimodalidades.

Estender a álgebra de rotulação para incluir o predicado de igualdade é similarmente direto, mas envolve a inclusão de uma regra de inferência especializada, que reflete um aspecto da teoria da igualdade que é adicionado à álgebra de rotulação \mathcal{A} . A inclusão de $=$ seria útil para descrever certas lógicas modais, cujos axiomas característicos a Teoria da Correspondência mostra que representam propriedades das estruturas descritas por sentenças de primeira ordem contendo tanto R como $=$. Por exemplo, a álgebra de rotulação dada pela condição de primeira ordem $\forall x \forall y [R(\text{succ}(x), y) \rightarrow y = \text{succ}(x)]$, junto com os axiomas (\mathbf{T}) , (\mathbf{D}) e $(\mathbf{4})$ da Definição 1.9, representaria a classe de estruturas associadas com a lógica modal $S4.1$, que estende a lógica modal $S4$ com o “Axioma de McKinsey” $\Box \Diamond \alpha \rightarrow \Diamond \Box \alpha$. No MLDS estendido apropriado, os diagramas incluem os literais da igualdade (e da desigualdade), assim como R -literais, e as “regras estruturais” são consideradas como aplicáveis tanto a literais de igualdade e de desigualdade como a R -literais. Adicionalmente, a seguinte regra tem que ser incluída, refletindo a propriedade de substitutividade de termos iguais em unidades declarativas.

$$\frac{\alpha : \lambda_1 \quad \lambda_1 = \lambda_2}{\alpha : \lambda_2} \mathcal{I}_{Sub}$$

Até onde a semântica se ocupa, o esquema de axiomas padrão para igualdade (já incluído na álgebra de rotulação \mathcal{A}) é estendido em \mathcal{A}^+ até cobrir cada um dos predicados monádicos $[\alpha]^*$. Embora intuitivamente diretas, as extensões descritas acima não são consideradas em grande detalhe neste trabalho. Entretanto, uma breve descrição das modificações que seriam necessárias para as provas de correção, completude e correspondência são dadas por [GAB2000].

1.7 Comentários

MLDSs proposicionais são claramente sistemas híbridos de lógica modal, combinando teorias relacionais de primeira ordem (álgebras rotuladas) com uma linguagem modal padrão. Nesta abordagem, tanto os mundos possíveis como a relação de acessibilidade são representados declarativamente como parte da lógica. A partir de um ponto de vista puramente sintático, esta abordagem pode ser vista como um *compromisso* entre as abordagens implícita e explícita descritas anteriormente. São incorporadas representações sintáticas de mundos possíveis e de relações de acessibilidade, o que permite que informações lógicas sejam expressas com uma sintaxe modal *concisa*, sem exigir uma tradução completa para a lógica de primeira ordem.

Quando uma configuração de MLDS tem apenas um único rótulo ω_0 , é análoga à noção tradicional de um conjunto de suposições locais, mas a introdução de rótulos e R -literais generaliza a noção de teoria modal (como um conjunto de suposições locais), pois permite efetivamente a existência de mais de um mundo atual. Além disso, as suposições globais podem ser incorporadas simplesmente pela inclusão delas na função $\mathcal{F}(\lambda)$ para cada rótulo λ da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Como resultado, a expressividade declarativa dos MLDSs é comparável à expressividade oferecida pela técnica de tradução relacional, com a vantagem adicional de *não* resultar em sentenças que são exponencialmente longas comparadas a suas correspondentes modais implícitas.

Sobre o sistema de dedução natural para MLDS, apresentamos, nas seções anteriores, o conjunto das regras de introdução e de eliminação para os conectivos clássicos e para os operadores modais, definidas em [RUS95, GAB2000]. As regras para os *conectivos clássicos* refletem fielmente a teoria de prova por dedução natural para a lógica proposicional definida em [PRA65]. A única diferença é que, no sistema aqui descrito, as fórmulas são rotuladas. Como essas regras não definem rótulos novos, elas podem ser consideradas “regras de dedução natural locais” para a lógica proposicional.

Por outro lado, as regras de inferência para os *operadores modais* envolvem algumas unidades declarativas com rótulos diferentes. Elas expressam a interação entre as teorias modais locais internas a uma configuração. Permitem-nos inferir rótulos específicos para mundos acessíveis específicos junto com relações novas (por exemplo, a regra da Eliminação do \diamond), e inferir quais fórmulas são válidas dentro desses rótulos (por exemplo, as regras de Introdução do \diamond e de Eliminação do \square). Como *vantagem*, não é necessário apresentar as noções extras de “derivações subordinadas estritas”, nem de “regras de iteração estrita” definidas em [FIT83] (Essas regras são apresentadas também em nosso trabalho anterior, [MAL2002]). Além disso, a distinção de Fitting entre as provas por dedução natural no “I-estilo” e no “A-estilo” não são necessárias aqui.

Um sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) também inclui algumas regras de inferência que são relativas aos R -literais de uma configuração. A regra da Afirmção do R permite-nos inferir novos R -literais de acordo com a álgebra de rotulação \mathcal{A} . Devido a sua modularidade, não é necessário diferenciar regras modais de acordo com a lógica modal específica que queremos representar, como é feito no sistema de dedução natural modal de Fitting. A regra de Introdução do R é equivalente a uma regra de Introdução do \neg para R -literais. A regra de Introdução do \perp permite-nos inferir a falsidade (isto é, $\perp : \lambda$) a qualquer momento em que um R -literal e *sua negação* estiverem presentes em uma configuração. Isso é necessário porque nenhuma fórmula clássica componente com R -literais pode ser inferida em uma configuração. Finalmente, com a regra de redução

da \mathcal{C} , é possível inferir qualquer configuração contida em uma existente. Essa regra deve ser incluída porque todas as outras regras têm o efeito de expandir suas configurações antecedentes.

Como a semântica para o sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) foi definida em termos de uma semântica de primeira ordem, as noções tradicionais de um modelo de Kripke junto com as condições de satisfatibilidade associadas são embutidas na axiomatização da álgebra estendida \mathcal{A}^+ . Dessa maneira, uma estrutura semântica do MLDS é dada pelo modelo clássico de \mathcal{A}^+ . Os esquemas de axiomas $(Ax7)$ e $(Ax8)$ caracteriza semanticamente os rótulos gerados pelo símbolo de função box_α com “mundos acessíveis arbitrários”, e os esquemas de axiomas $(Ax5)$ e $(Ax6)$ caracteriza semanticamente os rótulos gerados pelo símbolo de função f_α como “mundos acessíveis particulares”. Caracterizações teóricas de provas correspondentes serão apresentadas no próximo capítulo.

Para concluir, a escolha de uma abordagem semântica baseada em uma tradução de primeira ordem para a lógica clássica oferece as duas vantagens seguintes. Primeiramente, a metodologia é facilmente aplicável a qualquer família de lógicas cuja semântica seja axiomatizável em primeira ordem. Isso deve facilitar também o desenvolvimento de uma semântica modelo-teórica para lógicas “novas” resultantes da “combinação” de outras lógicas existentes. Além disso, a partir do ponto de vista de definir um sistema de prova automatizado para lógicas modais, a álgebra estendida oferece uma opção alternativa. Provedores de teoremas clássicos poderiam ser desenvolvidos para raciocinar com a teoria \mathcal{A}^+ . Isso poderia explorar as técnicas de reescrita equivalente, portanto aperfeiçoando os sistemas baseados na tradução relacional.

Em resumo, este capítulo descreveu um sistema de prova de estilo de dedução natural para MLDS proposicionais, que são uniformes no sentido em que as regras de dedução natural individuais são independentes da álgebra de rotulação particular. Uma semântica para uma ampla família de MLDSs proposicionais também foi definida, baseada em uma tradução para lógica de primeira ordem. Além disso, foram feitos comentários breves e uma comparação com trabalhos relacionados. Destacamos agora alguns pontos gerais que precisam ser enfatizados, como, por exemplo, as características principais do sistema de prova descrito acima:

- (i) ele usa uma formalização sintática explícita da noção modal de verdade relativa a um “mundo possível” particular (isto é, fórmulas são rotuladas),
- (ii) ele estende a noção padrão de teoria modal a partir de um mundo atual único para uma configuração de mundos atuais locais,
- (iii) ele incorpora condições diferentes na relação de acessibilidade de uma maneira uniforme, e finalmente
- (iv) ele está em um estilo natural.

Embora existam trabalhos teóricos de provas relacionados sobre lógica modal proposicional, ainda não há outro sistema de dedução no qual todos esses quatro aspectos co-existam [BRO2002].

2 Propriedades de Sistemas Dedutivos Rotulados Modais

Nos capítulos anteriores, as noções de uma relação de conseqüência sintática e semântica foram definidas, completando assim a descrição de um MLDS proposicional como estrutura de trabalho lógica. Três resultados importantes serão provados neste capítulo:

1. as duas noções da relação de conseqüência são equivalentes; e
2. o MLDS proposicional realmente é uma generalização da família $K\delta$ de lógicas modais padrão.

Para demonstrar (1), provaremos que a relação de derivabilidade \vdash_{MLDS} é *correta e completa* com respeito à relação de implicação semântica \models_{MLDS} , enquanto para demonstrar (2), provaremos que qualquer lógica modal $K\delta$ é *estritamente tratada* pelo $K\delta$ -MLDS proposicional correspondente.

Muitas das proposições e dos teoremas deste capítulo são provados através de *raciocínio por casos*. Para tornar as provas mais legíveis, os casos que são muito similares a algum caso anterior são omitidos do corpo principal da prova, podendo ser encontrados em [BRO2002].

Os resultados deste capítulo podem ser resumidos como segue. O sistema de prova por dedução natural de um $K\delta$ -MLDS é correto e completo com respeito à semântica modelo-teórica baseada em um método de tradução para a lógica clássica (conforme o capítulo anterior). Finalmente, qualquer teoria axiomática modal tradicional arbitrária pode ser traduzida para uma configuração de MLDS equivalente. Essa tradução preserva tanto a derivabilidade quanto a implicação semântica tradicional como definido em termos de semântica de Kripke. MLDSs são mais gerais do que sistemas axiomáticos no sentido de que a tradução inversa não pode ser aplicada a qualquer configuração arbitrária.

2.1 Correção

Esta seção mostra que nosso sistema de dedução natural é *correto*, ou seja, mostra que a relação \vdash_{MLDS} implica a relação \models_{MLDS} . Em outras palavras, prova-se que sempre que existir uma prova por dedução natural de uma configuração C' a partir de uma configuração C , então C implica semanticamente C' . Em geral, este tipo de teorema é provado por indução no número de passos de inferência da derivação assumida. Entretanto, a característica da dedução natural de usar hipóteses novas temporárias em uma derivação precisa de atenção particular, pois ela altera temporariamente a teoria inicial. Provas de correção descritas na literatura geralmente adotam uma técnica particular, que é a de definir, para cada passo da derivação, a noção de um *contexto* - isto é, o conjunto de todas as hipóteses que foram introduzidas e ainda não descarregadas. (Para um exemplo de prova de correção, veja o capítulo 4 de [FIT83].) Entretanto, uma técnica diferente é adotada aqui. Tiraremos proveito da correção e da completude da lógica clássica de primeira ordem, como podemos ver no diagrama da Figura 2.1. A idéia básica é definir as noções de tamanho de uma regra de inferência e de tamanho de uma prova, e aplicar a indução sobre o tamanho da derivação assumida. Dessa maneira, não há diferença (exceto pelo tamanho) entre as regras de inferência que introduzem hipóteses novas e aquelas que não introduzem hipóteses novas. No passo de indução, a consideração importante é o tamanho total da subprova sob consideração.

As noções de *tamanho de um membro de uma regra de inferência* e de *tamanho de uma derivação* em um MLDS proposicional são apresentadas abaixo e serão usadas no Lema 2.1.

Notação 2.1 *No sistema de prova dedutivo rotulado modal, as regras de inferência podem ser classificadas em quatro categorias.*

1. A primeira é o conjunto unitário $\mathcal{I}^{00} = \{\mathcal{I}_{C-R}\}$. \mathcal{I}_{C-R} é a única regra de inferência que não infere unidades declarativas novas, nem R -literais novos, e não usa qualquer subderivação de MLDS como condição.
2. A segunda categoria consiste de regras de inferência que inferem unidades declarativas novas e/ou R -literais novos sem usar subderivações como condições. Isto é: $\mathcal{I}^0 = \{\mathcal{I}_{\wedge E}, \mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{I}_{\vee I}, \mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{I}_{\neg E}, \mathcal{I}_{\neg I}, \mathcal{I}_{\diamond E}, \mathcal{I}_{\diamond I}, \mathcal{I}_{\square E}, \mathcal{I}_{\square I}, \mathcal{I}_{R-A}, \mathcal{I}_{\perp I}\}$.
3. A terceira categoria consiste daquelas regras de inferência que exigem uma subderivação como condição e é definida como $\mathcal{I}^+ = \{\mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{I}_{\neg I}, \mathcal{I}_{\square I}, \mathcal{I}_{R-I}\}$.
4. A quarta categoria refere-se às regras de inferência que usam duas derivações como condições. Isto é o conjunto unitário: $\mathcal{I}^{++} = \{\mathcal{I}_{\vee E}\}$.

Observe que $\mathcal{I}^{00} \cup \mathcal{I}^0 \cup \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^{++} = \mathcal{R}$.

Definição 2.1 (*Tamanho de um membro de uma regra de inferência*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário, seja $\mathcal{I}_i \in \mathcal{R}$ e seja $C/C' \in \mathcal{I}_i$. O tamanho de C/C' com respeito a \mathcal{I}_i , escrito como $l(C/C', \mathcal{I}_i)$, é definido como segue:

- Se $\mathcal{I}_i \in \mathcal{I}^{00}$, então $l(C/C', \mathcal{I}_i) = 0$
- Se $\mathcal{I}_i \in \mathcal{I}^0$, então $l(C/C', \mathcal{I}_i) = 1$
- Se $\mathcal{I}_i \in \mathcal{I}^+$, então $l(C/C', \mathcal{I}_i) = 1 + l_i$, onde l_i é o menor dos tamanhos de todas as subderivações (definidas abaixo) que podem ser usadas como uma condição da regra.
- Se $\mathcal{I}_i \in \mathcal{I}^{++}$, então $l(C/C', \mathcal{I}_i) = 1 + l_1 + l_2$, onde l_1 é o menor dos tamanhos de todas as subderivações que podem ser usadas como sua primeira condição, e l_2 é o menor dos tamanhos de todas as subderivações que podem ser usadas como sua segunda condição.

Definição 2.2 (*Tamanho de uma prova*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário. Definimos o tamanho de uma prova $\langle \{C_0, \dots, C_n\}, m \rangle$, escrito $l(\langle \{C_0, \dots, C_n\}, m \rangle)$, como segue:

$$l(\langle \{C_0, \dots, C_n\}, m \rangle) = \sum_{k=0}^{n-1} l(C_k/C_{k+1}, m(k))$$

Dado que a semântica é baseada em um método de tradução de primeira ordem, a prova da propriedade de correção de \vdash_{MLDS} com respeito a \models_{MLDS} será baseada na correção da relação de derivabilidade clássica de primeira ordem \vdash_{FOL} . A declaração formal do teorema é dada abaixo, e uma breve apresentação explanatória e lemas intermediários precederão sua prova.

Teorema 2.1 (*Correção*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário, e sejam C, C' duas configurações de $K\delta$ -MLDS. Se $C \vdash_{MLDS} C'$, então $C \models_{MLDS} C'$.*

$$\begin{array}{ccc}
C \vdash_{MLDS} C' & \xrightarrow{(1)} & C \models_{MLDS} C' \\
\downarrow (2) & & \uparrow (4) \\
\mathcal{A} \cup FOT(C) \vdash_{FOL} FOT(C') & \xrightarrow{(3)} & \mathcal{A} \cup FOT(C) \models_{FOL} FOT(C')
\end{array}$$

FIGURA 2.1 – Diagrama da Prova do Teorema da Correção

Uma representação gráfica dos principais passos da prova é dada no diagrama da Figura 2.1. A declaração da correção, que corresponde à seta rotulada com (1), é provada pela composição de três passos principais, setas (2), (3) e (4), respectivamente. O primeiro passo (seta (2)) prova que a hipótese, $C \vdash_{MLDS} C'$, implica que $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \vdash_{FOL} FOT(C')$. Isso é provado no Lema 2.1 dado abaixo. Esse resultado implica (dada a correção da lógica de primeira ordem) que $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \models_{FOL} FOT(C')$ (Proposição 2.1), que dá o segundo passo da prova (seta (3)). A seta (4) é dada pela Definição 1.38.

Proposição 2.1 (*Correção clássica*) *Seja \mathcal{A}^+ a álgebra estendida de algum $K\delta$ -MLDS arbitrário e sejam $C = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ e $C' = \langle \mathcal{D}', \mathcal{F}' \rangle$ duas configurações. Se $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \vdash_{FOL} FOT(C')$, então $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \models_{FOL} FOT(C')$.*

Prova: A hipótese $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \vdash_{FOL} FOT(C)$ significa $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \vdash_{FOL} \Delta$ para cada $\Delta \in \mathcal{D}'$ e $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \vdash_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$ para cada $[\alpha]^*(\lambda) \in \mathcal{DU}'$. Portanto, pela correção da lógica de primeira ordem, $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \models_{FOL} \Delta$ (para todo $\Delta \in \mathcal{D}'$) e $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \models_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$ (para todo $[\alpha]^*(\lambda) \in \mathcal{DU}'$). Portanto, $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \models_{FOL} FOT(C')$.

Pela Proposição 2.1 e pela Definição 1.38, é suficiente provar que, se uma configuração C' é derivável a partir de uma configuração C , então todas as fórmulas de sua tradução de primeira ordem são deriváveis a partir da tradução de primeira ordem de C , junto com a álgebra estendida \mathcal{A}^+ (seta (2) do diagrama da Figura 2.1).

Proposição 2.2 *Seja \mathcal{A}^+ a álgebra estendida de algum $K\delta$ -MLDS arbitrário. Seja $\langle \{C_0, \dots, C_k, \dots, C_n\}, m \rangle$ uma prova onde $k \geq 0$ e $n > k$. Seja $m(j) = \mathcal{I}_{C-R}$ para todo $k \leq j < n$ e seja $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C_0) \vdash_{FOL} FOT(C_k)$. Então $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C_0) \vdash_{FOL} FOT(C_n)$.*

Prova: Para todo $j, k \leq j < n, C_{j+1} \subseteq C_j$, como $m(j) = \mathcal{I}_{C-R}$, então $C_n \subseteq C_k$ e, pela reflexividade de \vdash_{FOL} , $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C_k) \vdash_{FOL} FOT(C_n)$. Além disso, pela hipótese e pela reflexividade de \vdash_{FOL} , $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C_0) \vdash_{FOL} \mathcal{A}^+ \cup FOT(C_k)$. Portanto, pela transitividade de \vdash_{FOL} , $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C_0) \vdash_{FOL} FOT(C_n)$.

Lema 2.1 (*Correção com respeito a traduções*) *Seja \mathcal{A}^+ a álgebra estendida de um $K\delta$ -MLDS arbitrário. Sejam C e C' as duas configurações e seja $FOT(C)$ e $FOT(C')$ suas respectivas traduções de primeira ordem. Se $C \vdash_{MLDS} C'$ então $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \vdash_{FOL} FOT(C')$.*

Prova: A prova é por indução no menor tamanho das derivações da forma $\langle \{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n\}, \bar{m} \rangle$, onde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}'$. No que segue, $\langle \{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n\}, m \rangle$ é uma prova desse menor tamanho.

CASO BASE: Quando $l(\langle \{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n\}, m \rangle) = 0$, $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}_0$ (pela Definição 2.2), e $FOT(\mathcal{C}_n) \subseteq FOT(\mathcal{C}_0)$. Portanto, $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_0) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}_n)$.

PASSO DE INDUÇÃO: Suponha que $l(\langle \{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n\}, m \rangle) = L$, $L > 0$, e o lema é verdadeiro sempre que houver uma derivação de tamanho mínimo, menor do que L . Sem perda de generalidade, podemos assumir que $m(n-1) \neq \mathcal{I}_{C-R}$ (Pois a Proposição 2.2 permite-nos estender o fim de qualquer prova com qualquer número finito de aplicações de \mathcal{I}_{C-R} sem afetar a declaração do lema, ou o tamanho da prova.) Portanto, há dois casos para considerar:

1. $n = 1$. Nesse caso, $n - 1 = 0$ e $l(\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n, m(n-1)) = L$. Resta mostrar, através de casos, que $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}_n)$ para qualquer regra $m(n-1) \in \mathcal{R} - \{\mathcal{I}_{C-R}\}$.
2. $n > 1$. Nesse caso, $0 < l(\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n, m(n-1)) \geq L$ e $0 \leq l(\langle \{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_{n-1}\}, m' \rangle) < L$ (onde $m'(i) = m(i)$ para todo $0 \leq i \leq n-2$). Portanto, pela hipótese de indução, $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_0) \vdash_{FOL} \mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_n)$. Então, como no caso (1), resta mostrar, através de casos, que $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}_n)$ para qualquer regra $m(n-1) \in \mathcal{R} - \{\mathcal{I}_{C-R}\}$, pois então, $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_0) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}_n)$.

CASO 1: Eliminação do \wedge ($\mathcal{I}_{\wedge E}$). Neste caso, $\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n \in \mathcal{I}_{\wedge E}$. Portanto, existe uma unidade declarativa da forma $\alpha \wedge \beta \lambda \in \mathcal{C}_{n-1}$, e \mathcal{C}_n também é igual a $\mathcal{C}_{n-1} + [\alpha : \lambda]$ ou a $\mathcal{C}_{n-1} + [\beta : \lambda]$. Somente o primeiro caso é considerado, pois o argumento para o segundo caso é análogo. Portanto, $[\alpha \wedge \beta]^*(\lambda) \in FOT(\mathcal{C}_{n-1})$ e $FOT(\mathcal{C}_n) = FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{[\alpha]^*(\lambda)\}$. Como $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}_{n-1})$, resta mostrar que $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$. Isso é provado, aplicando-se o esquema de axiomas ($Ax1$), como mostrado na seguinte derivação:

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{A}^+ \\ \vdots \\ [\alpha \wedge \beta]^*(\lambda) \rightarrow ([\alpha]^*(\lambda) \wedge [\beta]^*(\lambda)) \end{array} \quad \begin{array}{c} FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \\ \vdots \\ [\alpha \wedge \beta]^*(\lambda) \end{array}}{[\alpha]^*(\lambda) \wedge [\beta]^*(\lambda)} \\ \hline [\alpha]^*(\lambda)$$

CASO 2: Eliminação do \diamond ($\mathcal{I}_{\diamond E}$). Neste caso, $\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n \in \mathcal{I}_{\diamond E}$. Portanto, existe uma unidade declarativa da forma $\diamond \alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{n-1}$, e \mathcal{C}_n é igual a $\mathcal{C}_{n-1} + [\alpha : f_\alpha(\lambda)] + [R(\lambda, f_\alpha(\lambda))]$ (onde $f_\alpha(\lambda)$ é um termo raso de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$). Portanto, $\{[\diamond \alpha]^*(\lambda)\} \subseteq FOT(\mathcal{C}_{n-1})$ e $FOT(\mathcal{C}_n) = FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{R(\lambda, f_\alpha(\lambda)), [\alpha]^*(f_\alpha(\lambda))\}$. Como \mathcal{A}^+ , $FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}_{n-1})$, resta mostrar que \mathcal{A}^+ , $FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} R(\lambda, f_\alpha(\lambda))$ e \mathcal{A}^+ , $FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} [\alpha]^*(f_\alpha(\lambda))$. Isto é provado, aplicando-se o esquema de axiomas ($Ax6$), com mostrado na seguinte derivação:

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{A}^+ \\ \vdots \\ \forall x([\diamond \alpha]^*(x) \rightarrow (R(x, f_\alpha(x)) \wedge [\alpha]^*(f_\alpha(x)))) \end{array} \quad \begin{array}{c} FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \\ \vdots \\ [\diamond \alpha]^*(\lambda) \end{array}}{([\diamond \alpha]^*(\lambda) \rightarrow (R(\lambda, f_\alpha(\lambda)) \wedge [\alpha]^*(f_\alpha(\lambda))))} \\ \hline R(\lambda, f_\alpha(\lambda)) \wedge [\alpha]^*(f_\alpha(\lambda))$$

CASOS 3 a 8 ($\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{I}_{\vee I}, \mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{I}_{\diamond I}$ e $\mathcal{I}_{\square E}$) são análogas ao CASO 2 (Veja [BRO2002, RUS95] para provas específicas para cada um desses casos).

CASO 9: Introdução da \perp ($\mathcal{I}_{\perp I}$). Neste caso, $\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n \in \mathcal{I}_{\perp I}$. Portanto, existe um R -literal Δ tal que $\Delta \in \mathcal{C}_{n-1}$ e $\neg\Delta \in \mathcal{C}_{n-1}$ e \mathcal{C}_n é igual a $\mathcal{C}_{n-1} + [\alpha : \lambda]$ onde $\alpha : \lambda$ é uma unidade declarativa. Portanto, $\{\Delta, \neg\Delta\} \subseteq FOT(\mathcal{C}_{n-1})$ e $FOT(\mathcal{C}_n) = FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{[\alpha]^*(\lambda)\}$. Como $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}_{n-1})$, resta provar que $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$. Como $\{\Delta, \neg\Delta\} \subseteq FOT(\mathcal{C}_{n-1})$, $FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} \perp$. Portanto, $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$.

CASO 10: Afirmação do R (\mathcal{I}_{R-A}). Neste caso, $\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n \in \mathcal{I}_{R-A}$. Seja $\mathcal{C}_{n-1} = \langle \mathcal{D}_{n-1}, \mathcal{F}_{n-1} \rangle$. Então existe um R -literal Δ tal que existe uma derivação de primeira ordem $\mathcal{D}_{n-1}, \mathcal{A} \vdash_{FOL} \Delta$ e tal que \mathcal{C}_n é igual a $\mathcal{C}_{n-1} + [\Delta]$. Portanto, $FOT(\mathcal{C}_n) = FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{\Delta\}$. Como $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}_{n-1})$, resta mostrar que $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} \Delta$. Como $\mathcal{D}_{n-1} \subseteq FOT(\mathcal{C}_{n-1})$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^+$ e $\mathcal{D}_{n-1}, \mathcal{A} \vdash_{FOL} \Delta$, pela monotonicidade de \vdash_{FOL} , $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} \Delta$.

CASO 11: Introdução do \square ($\mathcal{I}_{\square I}$). Neste caso, $\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n \in \mathcal{I}_{\square I}$. Portanto, existe um R -literal da forma $R(\lambda, box_\alpha(\lambda))$ e uma *wff* α tal que $\mathcal{C}_{n-1} + [R(\lambda, box_\alpha(\lambda))] \vdash_{MLDS} \alpha : box_\alpha(\lambda)$ e \mathcal{C}_n é igual a $\mathcal{C}_{n-1} + [\square\alpha : \lambda]$. Portanto, $FOT(\mathcal{C}_n) = FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{[\square\alpha]^*(\lambda)\}$. Como, pela reflexividade de \vdash_{FOL} , $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}_{n-1})$, resta mostrar que $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} [\square\alpha]^*(\lambda)$. Seja $\langle \{\mathcal{C}_{n-1} + [R(\lambda, box_\alpha(\lambda))], \dots, \tilde{\mathcal{C}}\}, \tilde{m} \rangle$, com $\alpha : box_\alpha(\lambda) \in \tilde{\mathcal{C}}$, uma prova do menor tamanho de $\mathcal{C}_{n-1} + [R(\lambda, box_\alpha(\lambda))] \vdash_{MLDS} \alpha : box_\alpha(\lambda)$. Pela hipótese do passo de indução, $0 < l(\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n, \mathcal{I}_{\square I}) = 1 + l_1 \leq L$. Portanto, $0 \leq l_1 = l(\langle \{\mathcal{C}_{n-1} + [R(\lambda, box_\alpha(\lambda))], \dots, \tilde{\mathcal{C}}\}, \tilde{m} \rangle) < L$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{R(\lambda, box_\alpha(\lambda))\} \vdash_{FOL} FOT(\tilde{\mathcal{C}})$ e, em particular, $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{R(\lambda, box_\alpha(\lambda))\} \vdash_{FOL} [\alpha]^*(box_\alpha(\lambda))$. Pelo Teorema da Dedução da lógica de primeira ordem, $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} R(\lambda, box_\alpha(\lambda)) \rightarrow [\alpha]^*(box_\alpha(\lambda))$.

Então, pelo esquema de axiomas ($Ax8$), $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} [\square\alpha]^*(\lambda)$ como mostrado na seguinte derivação:

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{A}^+ \\ \vdots \\ (Ax8) \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \\ \vdots \\ R(\lambda, box_\alpha(\lambda)) \rightarrow [\alpha]^*(box_\alpha(\lambda)) \end{array}}{[\square\alpha]^*(\lambda)}$$

CASOS 12 e 13 ($\mathcal{I}_{\rightarrow I}$ e $\mathcal{I}_{\rightarrow I}$) são análogas ao CASO 11. Veja [BRO2002, RUS95] para provas específicas para cada um desses casos).

CASO 14: Introdução do R (\mathcal{I}_{R-I}). Neste caso, $\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n \in \mathcal{I}_{R-I}$. Portanto, existe um R -literal Δ tal que $\mathcal{C}_{n-1} + [\overline{\Delta}] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda'$ para algum termo λ' , e \mathcal{C}_n é igual a $\mathcal{C}_{n-1} + [\Delta]$. Portanto, $FOT(\mathcal{C}_n) = FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{\Delta\}$. Como $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}_{n-1})$, resta mostrar que $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} \Delta$. Seja $\langle \{\mathcal{C}_{n-1} + [\overline{\Delta}], \dots, \tilde{\mathcal{C}}\}, \tilde{m} \rangle$, com $\perp : \lambda' \in \tilde{\mathcal{C}}$, uma prova do menor tamanho de $\mathcal{C}_{n-1} + [\overline{\Delta}] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda'$. Pela hipótese do passo de indução, $0 < l(\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n, \mathcal{I}_{R-I}) = 1 + l_1 \leq L$. Portanto $0 \leq l_1 = l(\langle \{\mathcal{C}_{n-1} + [\overline{\Delta}], \dots, \tilde{\mathcal{C}}\}, \tilde{m} \rangle) < L$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{\overline{\Delta}\} \vdash_{FOL} FOT(\tilde{\mathcal{C}})$ e, em particular, $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{\overline{\Delta}\} \vdash_{FOL} \perp$. Pelo Teorema da Dedução da lógica de primeira ordem, $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} \overline{\Delta} \rightarrow \perp$. Como $\overline{\Delta} \rightarrow \perp$ é equivalente a $\neg\overline{\Delta}$, que também é equivalente a Δ , $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} \Delta$.

CASO 15: Eliminação do \vee ($\mathcal{I}_{\vee E}$). Neste caso, $\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n \in \mathcal{I}_{\vee E}$. Portanto, existem unidades declarativas da forma $\alpha \vee \beta : \lambda, \alpha : \lambda, \beta : \lambda$ e $\gamma : \lambda$, tais que $\alpha \vee \beta : \lambda \in \mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{C}_{n-1} + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda, \mathcal{C}_{n-1} + [\beta : \lambda] \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda$, e \mathcal{C}_n é igual a $\mathcal{C}_{n-1} + [\gamma : \lambda]$. Portanto, $FOT(\mathcal{C}_n) = FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{[\gamma]^*(\lambda)\}$. Como, pela reflexividade de \vdash_{FOL} , $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}_{n-1})$, resta mostrar que $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} [\gamma]^*(\lambda)$. Seja $\langle \{\mathcal{C}_{n-1} + [\alpha : \lambda], \dots, \tilde{\mathcal{C}}\}, \tilde{m} \rangle$, com $\gamma : \lambda \in \tilde{\mathcal{C}}$ uma prova do menor tamanho de $\mathcal{C}_{n-1} + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda$ (a primeira condição de $\mathcal{I}_{\vee I}$). Analogamente, seja $\langle \{\mathcal{C}_{n-1} + [\beta : \lambda], \dots, \tilde{\mathcal{C}}'\}, \tilde{m}' \rangle$, com $\gamma : \lambda \in \tilde{\mathcal{C}}'$ uma prova do menor tamanho de $\mathcal{C}_{n-1} + [\beta : \lambda] \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda$ (a segunda condição de $\mathcal{I}_{\vee I}$). Pela hipótese do passo de indução, $0 < l(\mathcal{C}_{n-1}/\mathcal{C}_n, \mathcal{I}_{\vee I}) = 1 + l_1 + l_2 \leq L$.

Então:

$$0 \leq l_1 = l(\langle \{\mathcal{C}_{n-1} + [\alpha : \lambda], \dots, \tilde{\mathcal{C}}\}, \tilde{m} \rangle) < L$$

$$0 \leq l_2 = l(\langle \{\mathcal{C}_{n-1} + [\beta : \lambda], \dots, \tilde{\mathcal{C}}'\}, \tilde{m}' \rangle) < L$$

Pela hipótese de indução,

$$\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{[\alpha]^*(\lambda)\} \vdash_{FOL} [\gamma]^*(\lambda)$$

$$\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \{[\beta]^*(\lambda)\} \vdash_{FOL} [\gamma]^*(\lambda)$$

Pelo Teorema da Dedução da lógica de primeira ordem,

$$\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} [\alpha]^*(\lambda) \rightarrow [\gamma]^*(\lambda)$$

$$\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} [\beta]^*(\lambda) \rightarrow [\gamma]^*(\lambda)$$

Portanto, pelo esquema de axiomas ($Ax3$), $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \vdash_{FOL} [\gamma]^*(\lambda)$ como mostrado na seguinte derivação:

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \\ \vdots \\ [\alpha]^*(\lambda) \rightarrow [\gamma]^*(\lambda) \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \\ \vdots \\ [\beta]^*(\lambda) \rightarrow [\gamma]^*(\lambda) \end{array}}{\frac{(([\alpha]^*(\lambda) \rightarrow [\gamma]^*(\lambda)) \wedge [\beta]^*(\lambda) \rightarrow [\gamma]^*(\lambda))}{([\alpha]^*(\lambda) \vee [\beta]^*(\lambda) \rightarrow [\gamma]^*(\lambda))} \quad \begin{array}{c} \mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{n-1}) \\ \vdots \\ [\alpha]^*(\lambda) \vee [\beta]^*(\lambda) \end{array}}{[\gamma]^*(\lambda)}$$

Prova do Teorema 2.1 (Seja $S = \langle \langle \mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M \rangle, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um MLDS e sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ duas configurações de S . Se $\mathcal{C} \vdash_S \mathcal{C}'$, então $\mathcal{C} \models_S \mathcal{C}'$).

Por hipótese, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$.

Pelo Lema 2.1, $\mathcal{A}^+ \cup FOT(\mathcal{C}) \vdash_{FOL} FOT(\mathcal{C}')$,

onde \mathcal{A}^+ é a álgebra estendida associada com o $K\delta$ -MLDS arbitrário, e $FOT(\mathcal{C}), FOT(\mathcal{C}')$ são as respectivas traduções de primeira ordem de \mathcal{C} e de \mathcal{C}' .

Pela Proposição 2.1, $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}) \models_{FOL} FOT(\mathcal{C}')$. Reescrever $FOT(\mathcal{C}')$ como $\mathcal{D}' \cup \mathcal{D}\mathcal{U}'$, $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}) \models_{FOL} FOT(\mathcal{C}')$ significa que $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}) \models_{FOL} \Delta$ para cada $\Delta \in \mathcal{D}'$ e $\mathcal{A}^+, FOT(\mathcal{C}) \models_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$ para cada $[\alpha]^*(\lambda) \in \mathcal{D}\mathcal{U}'$. Portanto, pela Definição 1.38, $\mathcal{C} \models_{MLDS} \mathcal{C}'$.

2.2 Completude

Esta seção mostra que a relação de derivabilidade \vdash_{MLDS} é completa com respeito à implicação semântica \models_{MLDS} . Em outras palavras, é provado que, dado um $K\delta$ -MLDS arbitrário, se uma configuração \mathcal{C} implica semanticamente uma configuração \mathcal{C}' , então \mathcal{C}' é derivável a partir de \mathcal{C} . A prova é baseada em uma metodologia do estilo de Henkin (para uma discussão mais geral sobre o método, veja [HUG96]). Definições, proposições e teoremas preliminares são dados na Seção 2.2.1, onde a noção de *consistência* é descrita, e algumas propriedades úteis associadas são mostradas. Na Seção 2.2.2, a construção de uma configuração consistente máxima é dada, e várias propriedades dessa configuração particular são provadas. Finalmente, o lema principal (conhecido na literatura como *lema da existência do modelo*) do teorema da completude é provado junto com o próprio teorema.

2.2.1 Noções preliminares

Uma das noções básicas que dizem respeito à completude é a da teoria *consistente*. Na lógica modal padrão, uma teoria é consistente se nenhuma contradição pode ser derivada a partir dela. Analogamente, em um MLDS proposicional, uma configuração é consistente se nenhuma unidade declarativa da forma $\perp : \lambda$ é derivável a partir dele, para qualquer rótulo λ da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Uma definição formal é dada abaixo.

Definição 2.3 (*Configuração inconsistente*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário e seja \mathcal{C} uma configuração de $K\delta$ -MLDS. \mathcal{C} é inconsistente se $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$ para algum termo λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$.*

Definição 2.4 (*Configuração consistente*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS e seja \mathcal{C} uma configuração de $K\delta$ -MLDS. \mathcal{C} é consistente se não for inconsistente.*

Na definição de uma configuração, rótulos são termos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. A semântica dada no capítulo anterior mostra que os termos gerados pelos símbolos de função f_α e box_α são estritamente relacionadas à interpretação dos operadores modais. Essa relação implica que as ocorrências de rótulos da forma $f_\alpha(\lambda)$ e $box_\alpha(\lambda)$ em uma teoria de MLDS deveriam satisfazer certas condições para providenciar uma configuração consistente. Isso é mostrado na seguinte proposição.

Proposição 2.3 (*Restrições sobre configurações consistentes*) *Seja $\mathcal{C} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ uma configuração consistente de um $K\delta$ -MLDS arbitrário. Seja λ um termo raso da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e seja α uma wff de \mathcal{L}_M . As duas declarações seguintes são válidas.*

1. Se $\diamond\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$, então $\neg R(\lambda, f_\alpha(\lambda)) \notin \mathcal{D}$ e $\neg\alpha \notin \mathcal{F}(f_\alpha(\lambda))$
2. Se $\neg\Box\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$, então $\neg R(\lambda, box_\alpha(\lambda)) \notin \mathcal{D}$ e $\alpha \notin \mathcal{F}(box_\alpha(\lambda))$

Prova: A prova é por contradição.

1. Suponha que $\diamond\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$ e que $\neg R(\lambda, f_\alpha(\lambda)) \in \mathcal{D}$. Então, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$, como mostrado na seguinte derivação. Portanto \mathcal{C} é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

$$\frac{\mathcal{C}\langle \diamond\alpha : \lambda, \neg R(\lambda, f_\alpha(\lambda)) \rangle}{\frac{\mathcal{C}'_1\langle R(\lambda, f_\alpha(\lambda)), \neg R(\lambda, f_\alpha(\lambda)), \alpha : f_\alpha(\lambda) \rangle}{\mathcal{C}'_2\langle \perp : \lambda \rangle}} \quad \begin{array}{l} \diamond E \\ \perp I \end{array}$$

Agora suponha que $\diamond\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$ e que $\neg\alpha \in \mathcal{F}(f_\alpha(\lambda))$. Então $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \perp : f_\alpha(\lambda)$ como mostrado na seguinte derivação. Portanto, \mathcal{C} é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

$$\frac{\mathcal{C}\langle \diamond\alpha : \lambda, \neg\alpha : f_\alpha(\lambda) \rangle}{\frac{\mathcal{C}'_1\langle R(\lambda, f_\alpha(\lambda)), \alpha : f_\alpha(\lambda), \neg\alpha : f_\alpha(\lambda) \rangle}{\mathcal{C}'_2\langle \perp : f_\alpha(\lambda) \rangle}} \quad \begin{array}{l} \diamond E \\ \wedge I \end{array}$$

2. Suponha que $\neg\Box\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$ e que $\neg R(\lambda, box_\alpha(\lambda)) \in \mathcal{D}$. Então, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$ como mostrado na seguinte derivação. Portanto, \mathcal{C} é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

$$\frac{\mathcal{C} \quad \langle \neg\Box\alpha : \lambda, \neg R(\lambda, box_\alpha(\lambda)) \rangle}{\frac{\mathcal{C}\langle \neg R(\lambda, box_\alpha(\lambda)) \rangle + [R(\lambda, box_\alpha(\lambda))]}{\mathcal{C}'_1\langle \alpha : box_\alpha(\lambda) \rangle}} \quad \begin{array}{l} \text{(hipótese)} \\ (\perp I) \end{array}$$

$$\frac{\mathcal{C}'_1 \quad \langle \neg\Box\alpha : \lambda, \Box\alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}'_2 \quad \langle \perp : \lambda \rangle} \quad (\Box I)$$

$$\frac{}{\mathcal{C}'_2 \quad \langle \perp : \lambda \rangle} \quad (\wedge I)$$

Agora suponha que $\neg\Box\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$ e que $\alpha \in \mathcal{F}(box_\alpha(\lambda))$. Então $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$ como mostrado na seguinte derivação. Portanto, \mathcal{C} é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

$$\frac{\mathcal{C}\langle \neg\Box\alpha : \lambda, \alpha : box_\alpha(\lambda) \rangle}{\frac{\mathcal{C}'_1\langle \Box\alpha : \lambda, \neg\Box\alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}'_2\langle \perp : \lambda \rangle}} \quad \begin{array}{l} \Box I \\ \wedge I \end{array}$$

São provadas abaixo algumas propriedades da relação de derivabilidade \vdash_{MLDS} , as quais serão usadas mais tarde neste capítulo para o teorema da completude. Em particular, é mostrado que \vdash_{MLDS} satisfaz as propriedades padrão de uma relação de derivabilidade clássica (isto é, reflexividade, monotonicidade e transitividade), bem como a propriedade da compacidade.

Proposição 2.4 (Monotonicidade) *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ três configurações de um $K\delta$ -MLDS arbitrário tal que $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$ e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}''$. Então $\mathcal{C}'' \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$.*

Prova: Seja $\langle \{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n\}, m \rangle$ (onde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}'$) uma prova de $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$. Por hipótese, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, então $\mathcal{C}''/\mathcal{C} \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}-R}$. Seja m' um mapeamento do conjunto $\{0, \dots, n\}$ para o conjunto \mathcal{R} tal que $m'(0) = \mathcal{I}_{\mathcal{C}-R}$ e para cada $i, 1 \leq i \leq n, m'(i) = m(i-1)$. Então o par $\langle \{\mathcal{C}'', \mathcal{C}, \dots, \mathcal{C}'\}, m' \rangle$ é uma prova em $K\delta$ -MLDS. Portanto, $\mathcal{C}'' \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$.

Proposição 2.5 (Reflexividade) *Seja \mathcal{C} uma configuração de um $K\delta$ -MLDS arbitrário, então $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}$.*

Prova: Pela Definição 1.30, $\mathcal{C}/\mathcal{C} \in \mathcal{I}_{\mathcal{C}-R}$. Então seja m um mapeamento do conjunto $\{0\}$ para o conjunto \mathcal{R} tal que $m(0) = \mathcal{I}_{\mathcal{C}-R}$. O par $\langle \{\mathcal{C}, \mathcal{C}\}, m \rangle$ é uma prova em $K\delta$ -MLDS. Portanto, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}$.

Proposição 2.6 (Transitividade) *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ três configurações de um $K\delta$ -MLDS arbitrário tal que $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}' \vdash_{MLDS} \mathcal{C}''$. Então $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}''$.*

Prova: Seja o par $\langle \{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_h\}, m \rangle$ (onde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_h = \mathcal{C}'$) uma prova de $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$ e o par $\langle \{\mathcal{C}'_0, \dots, \mathcal{C}'_k\}, m' \rangle$ (onde $\mathcal{C}'_0 = \mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}'_k = \mathcal{C}''$) uma prova de $\mathcal{C}' \vdash_{MLDS} \mathcal{C}''$. Seja \bar{m} um mapeamento do conjunto $\{0, \dots, h+k-1\}$ para o conjunto \mathcal{R} tal que, para cada $i, 0 \leq i \leq h-1, \bar{m}(i) = m(i)$, e para cada $i, h \leq i \leq h+k-1, \bar{m}(i) = m'(i-h)$. Então o par $\langle \{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_h, \dots, \mathcal{C}'_k\}, \bar{m} \rangle$ é uma prova em $K\delta$ -MLDS. Portanto, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}''$.

Note que as propriedades de monotonicidade, reflexividade e transitividade da relação de derivabilidade \vdash_{MLDS} mantêm-se válidas para configurações tanto finitas como infinitas.

No capítulo anterior, foi apresentada uma notação para capturar a noção padrão de uma relação de derivabilidade entre teorias (configurações) e fórmulas (unidades singulares de informação). Isso foi expresso em termos da definição mais geral da relação de derivabilidade entre duas configurações dada por \vdash_{MLDS} . Uma caracterização “vice-versa” pode ser mostrada – uma configuração \mathcal{C}' é derivável a partir de uma configuração \mathcal{C} se cada unidade de informação de \mathcal{C}' for derivável a partir de \mathcal{C} . Esse resultado (declarado no teorema abaixo) também oferece uma caracterização da não-derivabilidade de uma configuração a partir de outra, o que será usado na prova por contrapositivo do teorema da completude.

Lema 2.2 *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário, seja \mathcal{I} uma regra de inferência, e $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ e $\bar{\mathcal{C}}$ três configurações de $K\delta$ -MLDS. Seja $\mathcal{C}/\mathcal{C}' \in \mathcal{I}$. Então $(\mathcal{C} \cup \bar{\mathcal{C}})/(\mathcal{C}' \cup \bar{\mathcal{C}}) \in \mathcal{I}$.*

Prova: Isto segue diretamente a partir da Definição 1.11 (definição de \mathcal{I}) e da Proposição 2.4 (monotonicidade).

Teorema 2.2 *(Caracterização de derivabilidade) Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' duas configurações de um $K\delta$ -MLDS arbitrário tal que a configuração $\mathcal{C}' - \mathcal{C}$ é finita. $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$ se e somente se, para cada $\pi \in \mathcal{C}' - \mathcal{C}, \mathcal{C} \vdash_{MLDS} \pi$, onde π é ou uma unidade declarativa ou um R -literal.*

Prova: (Metade “somente se”:) Por hipótese, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$. Se $\pi \in \mathcal{C}' - \mathcal{C}$, então $\pi \in \mathcal{C}'$. Portanto, pela Notação 1.5, para cada $\pi \in \mathcal{C}' - \mathcal{C}, \mathcal{C} \vdash_{MLDS} \pi$.

(Metade “se”:) Para provar que $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$, é necessário mostrar que existe uma prova $\langle \{\mathcal{C}, \dots, \mathcal{C}'\}, m \rangle$. Seja $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n$ uma enumeração (possivelmente vazia) de todos os elementos (unidades declarativas e R -literais) da configuração $\mathcal{C}' - \mathcal{C}$. A prova é por indução sobre n .

CASO BASE: O caso base é quando $n = 0$ (enumeração vazia). Então $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, o que implica que $\mathcal{C}/\mathcal{C}' \in \mathcal{I}_{C-R}$. Então, $\langle \{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1\}, m \rangle$ é uma prova, onde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}, \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}'$ e $m(0) = \mathcal{I}_{C-R}$. Portanto, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$.

PASSO DE INDUÇÃO: Assuma, por hipótese de indução, que, para cada par de configurações $\bar{\mathcal{C}}$ e $\bar{\mathcal{C}}'$, tal que $\bar{\mathcal{C}}' - \bar{\mathcal{C}} = [\tilde{\pi}, \dots, \tilde{\pi}_{n-1}]$, e tal que, para cada $\tilde{\pi} \in \bar{\mathcal{C}}' - \bar{\mathcal{C}}, \bar{\mathcal{C}} \vdash_{MLDS} \tilde{\pi}$, então $\bar{\mathcal{C}} \vdash_{MLDS} \bar{\mathcal{C}}'$.

Seja $\bar{\mathcal{C}}$ a configuração $\mathcal{C} + [\pi_1, \dots, \pi_{n-1}]$ e seja $\bar{\mathcal{C}}' = \bar{\mathcal{C}} + [\pi_n]$, tal que, para cada $\pi \in \mathcal{C}' - \mathcal{C}, \mathcal{C} \vdash_{MLDS} \pi$. Note que, pela hipótese de indução, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \bar{\mathcal{C}}$ e, portanto, $\mathcal{C}' \subseteq \bar{\mathcal{C}}', \bar{\mathcal{C}}' \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$. Portanto, pela propriedade da transitividade de \vdash_{MLDS} , para provar que $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'$, é suficiente provar que $\bar{\mathcal{C}} \vdash_{MLDS} \bar{\mathcal{C}}'$. Pela hipótese original, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \pi_n$. Como $\mathcal{C} \subseteq \bar{\mathcal{C}}$, pela propriedade de monotonicidade de \vdash_{MLDS} , $\bar{\mathcal{C}} \vdash_{MLDS} \pi_n$. Então, existe uma configuração \mathcal{C}_{π_n} tal que $\bar{\mathcal{C}} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}_{\pi_n}$ e $\pi_n \in \mathcal{C}_{\pi_n}$. Seja

$\langle \{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_h\}, m \rangle$ (i)

uma prova de $\bar{\mathcal{C}} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}_{\pi_n}$, onde $\mathcal{C}_0 = \bar{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{C}_h = \mathcal{C}_{\pi_n}$, e m é um mapeamento do conjunto $\{0, \dots, (h-1)\}$ para o conjunto \mathcal{R} . Uma prova correspondente

$\langle \{\tilde{\mathcal{C}}_0, \dots, \tilde{\mathcal{C}}_h\}, m \rangle$ (ii)

pode ser construída da seguinte maneira. $\tilde{\mathcal{C}}_0 = \mathcal{C}_0$ e, para cada $0 \leq i \leq (h-1)$, se $m(i) = \mathcal{I}_{C-R}$, então $\tilde{\mathcal{C}}_{i+1} = \tilde{\mathcal{C}}_i$, caso contrário, $\tilde{\mathcal{C}}_{i+1} = \tilde{\mathcal{C}}_i \cup \mathcal{C}_{i+1}$. Pelo Lema 2.2, (ii) é uma prova. Além disso, como em qualquer regra de inferência diferente de \mathcal{I}_{C-R} , a configuração inferida contém a configuração antecedente, segue que $\mathcal{C}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_h$. Como $\mathcal{C}_0 = \bar{\mathcal{C}}$ e $\pi_n \in \tilde{\mathcal{C}}_h$, então $\mathcal{C}'' \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_h$, então $\mathcal{C}'' \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_h$. Então $\tilde{\mathcal{C}}_h/\mathcal{C}'' \in \mathcal{I}_{C-R}$. Então, a partir da prova (ii), uma prova final pode ser construída

$\langle \{\tilde{\mathcal{C}}_0, \dots, \tilde{\mathcal{C}}_h, \tilde{\mathcal{C}}_{h+1}\}, \bar{m} \rangle$ (iii)

onde $\tilde{\mathcal{C}}_{h+1} = \mathcal{C}''$ e \bar{m} é um mapeamento do conjunto $\{0, \dots, h\}$ para o conjunto \mathcal{R} tal que, para cada $i, 0 \leq i \leq (h-1)$, $\bar{m}(i) = m(i)$ e $\bar{m}(h) = \mathcal{I}_{C-R}$. Portanto, $\bar{\mathcal{C}} \vdash_{MLDS} \mathcal{C}''$.

Dois propriedades importantes de uma configuração consistente são mostradas abaixo.

Proposição 2.7 (*Consistência de subconfigurações*) *Seja \mathcal{C} uma configuração consistente de um $K\delta$ -MLDS arbitrário e seja π uma unidade declarativa ou um R -literal. Se $\mathcal{C} + [\pi]$ é uma configuração consistente, então, para qualquer configuração \mathcal{C}' , $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{C}' + [\pi]$ também é consistente.*

Prova: A prova é por contradição. Suponha que $\mathcal{C}' + [\pi]$ não é consistente. Então, pela definição de inconsistência, $\mathcal{C}' + [\pi] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$, para algum termo raso λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Como $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{C}' + [\pi] \subseteq \mathcal{C} + [\pi]$. Então, pela propriedade da monotonicidade de \vdash_{MLDS} , $\mathcal{C} + [\pi] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$. Portanto, $\mathcal{C} + [\pi]$ é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

A Proposição 2.7 mostra uma propriedade da consistência de uma configuração \mathcal{C} com respeito ao conjunto de suas “subconfigurações” \mathcal{C}' ($\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$). Nenhuma suposição é feita sobre a finitude de \mathcal{C}' . Uma segunda propriedade de uma configuração consistente \mathcal{C} , conhecida como propriedade da *compacidade*, é provada no Corolário 2.1 (veja abaixo) que mostra que uma configuração é consistente se toda subconfiguração finita é consistente. Esse é um corolário direto do seguinte teorema, que declara que, devido à finitude de uma prova MLDS, apenas uma parte finita de uma dada configuração (possivelmente finita) é usada dentro de uma derivação.

Teorema 2.3 (*Finitude*) *Seja \mathcal{C} uma configuração de um $K\delta$ -MLDS arbitrário. Seja π uma unidade declarativa ou um R -literal. Se $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \pi$, então existe uma configuração \mathcal{C}' tal que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{C}' \vdash_{MLDS} \pi$ e \mathcal{C}' é finita.*

Prova: É necessário apenas provar o caso em que \mathcal{C} não é finita. Por hipótese, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \pi$. Então, pela Notação 1.5, existe uma configuração $\bar{\mathcal{C}}$ tal que $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \bar{\mathcal{C}}$ e $\pi \in \bar{\mathcal{C}}$. A prova é por indução sobre o menor tamanho das derivações da forma $\langle \{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n\}, \bar{m} \rangle$, onde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_n = \bar{\mathcal{C}}$. No que segue, $\langle \{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n\}, m \rangle$ é uma prova do menor tamanho.

CASO BASE: O caso base é quando $l(\langle \{C_0, \dots, C_n\}, m \rangle) = 0$. Então $C_n \subseteq C_0$. Como $\pi \in C_n$, então $\pi \in C_0$. Se π é um R -literal então seja $C' = \langle \mathcal{D}', \mathcal{F}' \rangle$, onde $\mathcal{D}' = \{\pi\}$ e, para cada termo raso $\lambda \in \text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $\mathcal{F}'(\lambda) = \{\}$. Se π é uma unidade declarativa, $\alpha : \lambda$, então seja $C' = \langle \mathcal{D}', \mathcal{F}' \rangle$, onde $\mathcal{D}' = \{\}$, $\mathcal{F}'(\lambda) = \{\alpha\}$ e, para cada termo raso $\lambda' \in \text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $\lambda' \neq \lambda$, $\mathcal{F}'(\lambda') = \{\}$. Em ambos os casos, C' é finita, e $C' \subseteq C_0$. Note que $\pi \in C'$ e $C'/C' \in \mathcal{I}_{C-R}$. Então $\langle \{C'_0, C'_1\}, m' \rangle$ é uma prova, onde $C'_0 = C'_1 = C'$ e $m'(0) = \mathcal{I}_{C-R}$. Então $C' \vdash_{MLDS} C'$, portanto $C' \vdash_{MLDS} \pi$.

PASSO DE INDUÇÃO: Assuma, por hipótese de indução, que para qualquer configuração C^* e π^* tal que exista uma menor derivação $\langle \{C_0^*, \dots, C_n^* - n\}, m^* \rangle$ (onde $C_0^* = C^*$ e $\pi^* \in C_n^*$) de tamanho $l(\langle \{C_0^*, \dots, C_n^*\}, m^* \rangle) < L$, então existe uma configuração finita C_f^* tal que $C_f^* \subseteq C_0^*$ e $C_f^* \vdash_{MLDS} \pi^*$.

Suponha que $l(\langle \{C_0, \dots, C_n\}, m \rangle) = L$, $L > 0$. Assuma, sem perda de generalidade, que $m(0) \neq \mathcal{I}_{C-R}$ e que $\pi \notin C_0$. Então $\pi \in C_n - C_0$. Para todo j , $0 \leq j \leq n-1$, e para todo $m(j) \in \mathcal{R} - \mathcal{I}_{C-R}$, o símbolo $[]_j = C_{j+1} - C_j$, representa a(s) nova(s) unidade(s) declarativa(s) e/ou R -literal(is) inferidos no passo j da prova. Assuma também, sem perda de generalidade, que $n > 1$. Então, $0 < l(C_0/C_1, m(0)) \leq L$ e $0 \leq l(\langle \{C_1, \dots, C_n\}, m' \rangle) < L$ (onde $m'(i) = m(i)$ para todo $1 \leq i \leq n-1$). (Para $n = 1$, sempre é possível estender uma prova de tamanho mínimo $\langle \{C_0, C_1\}, m(0) \rangle$, onde $m(0) \in \mathcal{R}$, para uma prova do mesmo tamanho da forma $\langle \{C_0, C_1, C_1\}, m' \rangle$, onde $m'(0) = m(0)$ e $m'(1) = \mathcal{I}_{C-R}$.) Pela hipótese de indução, existe uma configuração finita $C'_1 \subseteq C_1$ tal que $C'_1 \vdash_{MLDS} \pi$. Note que $C_1 = C_0 + []_0$. Então, se $C'_1 \subseteq C_0$, então o teorema está provado. Suponha agora que $C'_1 \not\subseteq C_0$. Então, pela propriedade da transitividade de \vdash_{MLDS} , resta mostrar que existe uma configuração finita $C' \subseteq C_0$ tal que $C' \vdash_{MLDS} C'_1$. Isso é provado através de casos sobre $m(0)$.

CASO 1: Eliminação do \wedge : Neste caso, $m(0) = \mathcal{I}_{\wedge E}$. Então existe uma unidade declarativa da forma $\alpha \wedge \beta : \lambda \in C_0$ e C_1 também é igual a $C_0 + [\alpha : \lambda]$ ou igual a $C_0 + [\beta : \lambda]$. Somente o primeiro caso é considerado, porque o argumento para o segundo caso é análogo. $[]_0 = [\alpha : \lambda]$. Pela hipótese de indução, $C'_1 \subseteq C_1$ e C'_1 é finita. Por suposição, $C'_1 \not\subseteq C_0$. Então $[\alpha : \lambda] \in C'_1$, mas não é necessariamente o caso em que $\alpha \wedge \beta : \lambda \in C'_1$. Então, seja C' a configuração $(C'_1 - [\alpha : \lambda]) + [\alpha \wedge \beta : \lambda]$. Então C' é uma configuração finita, e $\langle \{C', C' + [\alpha : \lambda], C'_1\}, \bar{m} \rangle$ é uma prova, onde $\bar{m}(0) = \mathcal{I}_{\wedge E}$ e $\bar{m}(1) = \mathcal{I}_{C-R}$. Portanto, $C' \vdash_{MLDS} C'_1$.

CASO 2: Afirmação do R : Neste caso, $m(0) = \mathcal{I}_{R-A}$. Seja $C_0 = \langle \mathcal{D}_0, \mathcal{F}_0 \rangle$. Então existe um R -literal Δ tal que $\mathcal{D}_0, \mathcal{A} \vdash_{FOL} \Delta$. $C_1 = C_0 + [\Delta]$. Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{D}_0$ o conjunto de suposições R -literais usadas na derivação de primeira ordem $\mathcal{D}_0, \mathcal{A} \vdash_{FOL}$. Como uma prova, em lógica clássica, é uma seqüência finita de regras de inferência, e cada regra de inferência usa um conjunto finito de suposições, então Γ é finito. Note agora que $[]_0 = [\Delta]$. Pela hipótese de indução, $C'_1 \subseteq C_1$ e C'_1 é finita. Por suposição, $C'_1 \not\subseteq C_0$. Então $[\Delta] \in C'_1$, mas não é necessariamente o caso em que $\Gamma \subseteq C'_1$. Seja $C' = (C'_1 - [\Delta]) + \Gamma$. Então C' é uma configuração finita, e $\langle \{C', C' + [\Delta], C'_1\}, \bar{m} \rangle$ é uma prova, onde $\bar{m}(0) = \mathcal{I}_{R-A}$ e $\bar{m}(1) = \mathcal{I}_{C-R}$. Portanto, $C' \vdash_{MLDS} C'_1$.

Para os casos 3 a 10 ($\mathcal{I}_{\wedge I}, \mathcal{I}_{\vee I}, \mathcal{I}_{\rightarrow E}, \mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{I}_{\perp I}, \mathcal{I}_{\diamond E}, \mathcal{I}_{\diamond I}, \mathcal{I}_{\square I}$), o argumento é análogo ao do caso 1.

CASO 11: Introdução da \rightarrow : Neste caso, $m(0) = \mathcal{I}_{\rightarrow I}$. Então existem unidades declarativas da forma $\alpha : \lambda, \beta : \lambda, \alpha \rightarrow \beta : \lambda$ tal que $C_0 + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \beta : \lambda$ e $C_1 = C_0 + [\lambda \alpha \rightarrow \beta]$. Então $[]_0 = [\alpha \rightarrow \beta : \lambda]$. Pela hipótese de indução, $C'_1 \subseteq C_1$ e C'_1 é finita. Além disso, por suposição, $C'_1 \not\subseteq C_0$, então $[\alpha \rightarrow \beta : \lambda] \in C'_1$. Seja $\langle \{C_0 + [\alpha :$

$\lambda], \dots, \tilde{\mathcal{C}}_n\}, \tilde{m}\rangle$ (com $\beta : \lambda \in \tilde{\mathcal{C}}_n$) uma prova de tamanho mínimo de $\mathcal{C}_0 + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \beta : \lambda$. Por hipótese, $0 < l(\mathcal{C}_n/\mathcal{C}_1, \mathcal{I}_{\rightarrow I}) \leq L$, então $0 \leq l(\langle \{\mathcal{C}_0 + [\alpha : \lambda], \dots, \tilde{\mathcal{C}}_n\}, \tilde{m}\rangle) < L$. Então, pela hipótese de indução, existe uma configuração finita $\mathcal{C}^*_0 \subseteq \mathcal{C}_0 + [\alpha : \lambda]$ tal que $\mathcal{C}^*_0 \vdash_{MLDS} \beta : \lambda$. Seja \mathcal{C}' a configuração $(\mathcal{C}'_1 - [\alpha \rightarrow \beta : \lambda]) \cup (\mathcal{C}^*_0 - [\alpha : \lambda])$. Então \mathcal{C}' é uma configuração finita e $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_0$. Como $\mathcal{C}^*_0 \subseteq \mathcal{C}' + [\alpha : \lambda]$, por monotonicidade $\mathcal{C}' + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} [\beta : \lambda]$. Então $\mathcal{C}'/\mathcal{C}' + [\alpha \rightarrow \beta : \lambda] \in \mathcal{I}_{\rightarrow I}$. Portanto, $\langle \{\mathcal{C}', \mathcal{C}' + [\alpha \rightarrow \beta : \lambda], \mathcal{C}'_1\}, \bar{m}\rangle$ é uma prova, onde $\bar{m}(0) = \mathcal{I}_{\rightarrow I}$ e $\bar{m}(1) = \mathcal{I}_{C-R}$. Portanto $\mathcal{C}' \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'_1$.

Para os casos 12 a 14 ($\mathcal{I}_{\square I}, \mathcal{I}_{\rightarrow I}, \mathcal{I}_{R-I}$), o argumento é análogo ao do caso 11.

CASO 15: Eliminação do \vee : Neste caso, $m(0) = \mathcal{I}_{\vee E}$. Então existem unidades declarativas da forma $\alpha : \lambda, \beta : \lambda, \alpha \vee \beta : \lambda$ e $\gamma : \lambda$ tal que $\alpha \vee \beta : \lambda \in \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_0 + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda, \mathcal{C}_0 + [\beta : \lambda] \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda$ e \mathcal{C}_1 é igual a $\mathcal{C}_0 + [\gamma : \lambda]$. Então $[\]_0 = [\gamma : \lambda]$. Pela hipótese de indução, $\mathcal{C}'_1 \subseteq \mathcal{C}_1$ e \mathcal{C}'_1 é finita. Por suposição, $\mathcal{C}'_1 \not\subseteq \mathcal{C}_0$, então $[\gamma : \lambda] \in \mathcal{C}'_1$. Seja $\langle \{\mathcal{C}_0 + [\alpha : \lambda], \dots, \tilde{\mathcal{C}}\}, \tilde{m}\rangle$ (com $\gamma : \lambda \in \tilde{\mathcal{C}}$) uma prova de tamanho mínimo de $\mathcal{C}_0 + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda$. Analogamente seja $\langle \{\mathcal{C}_0 + [\beta : \lambda], \dots, \tilde{\mathcal{C}}'\}, \tilde{m}'\rangle$ (com $\gamma : \lambda \in \tilde{\mathcal{C}}'$) uma prova do tamanho mínimo de $\mathcal{C}_0 + [\beta : \lambda] \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda$. Como, por hipótese, $0 < l(\mathcal{C}_0/\mathcal{C}_1, \mathcal{I}_{\vee I}) \leq L$, pela Definição 2.1,

$$0 \leq l(\langle \{\mathcal{C}_0 + [\alpha : \lambda], \dots, \tilde{\mathcal{C}}\}, \tilde{m}\rangle) < L$$

$$0 \leq l(\langle \{\mathcal{C}_0 + [\beta : \lambda], \dots, \tilde{\mathcal{C}}'\}, \tilde{m}'\rangle) < L$$

Pela hipótese de indução, existem configurações $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}_0 + [\alpha : \lambda]$ e $\tilde{\mathcal{C}}^* \subseteq \mathcal{C}_0 + [\beta : \lambda]$ tal que $\mathcal{C}^* \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda$ e $\tilde{\mathcal{C}}^* \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda$. Seja

$$\mathcal{C}' = ((\mathcal{C}'_1 - [\gamma : \lambda]) + [\alpha \vee \beta : \lambda]) \cup (\mathcal{C}^* - [\alpha : \lambda]) \cup (\tilde{\mathcal{C}}^* - [\beta : \lambda])$$

Então \mathcal{C}' é uma configuração finita, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_0$ e $\alpha \vee \beta : \lambda \in \mathcal{C}'$. Além disso, como $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}' + [\alpha : \lambda]$, por monotonicidade, $\mathcal{C}' + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda$. Analogamente, como $\tilde{\mathcal{C}}^* \subseteq \mathcal{C}' + [\beta : \lambda]$, pela monotonicidade $\mathcal{C}' + [\beta : \lambda] \vdash_{MLDS} \gamma : \lambda$. Então $\mathcal{C}'/\mathcal{C}' + [\gamma : \lambda] \in \mathcal{I}_{\vee E}$ e $\langle \{\mathcal{C}', \mathcal{C}' + [\gamma : \lambda], \mathcal{C}'_1\}, \bar{m}\rangle$ é uma prova, onde $\bar{m}(0) = \mathcal{I}_{\vee E}$ e $\bar{m}(1) = \mathcal{I}_{C-R}$. Portanto, $\mathcal{C}' \vdash_{MLDS} \mathcal{C}'_1$.

Corolário 2.1 (*Compacidade*) *Seja \mathcal{C} uma configuração de um $K\delta$ -MLDS arbitrário. Se, para qualquer configuração finita $\mathcal{C}', \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ é consistente, então \mathcal{C} é consistente.*

Prova: A declaração contrapositiva é provada. Suponha que \mathcal{C} é inconsistente. Pela definição de inconsistência, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$ para algum termo raso λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Portanto, pelo Teorema 2.3, existe uma configuração finita $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C}' \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$, portanto \mathcal{C}' é inconsistente.

2.2.2 Descrição da prova da completude

Até aqui, a noção de consistência foi descrita junto com suas propriedades relevantes. Esses resultados, que são válidos para qualquer $K\delta$ -MLDS arbitrário, formam a base para provar a completude da relação de derivabilidade \vdash_{MLDS} com respeito à relação de implicação semântica \models_{MLDS} . Antes de entrar em detalhes da prova formal, é dada uma breve descrição dos passos principais para tornar o restante deste capítulo mais fácil de seguir. Primeiramente, o enunciado do teorema.

Teorema 2.4 (*Completude*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS proposicional arbitrário. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' duas configurações de $K\delta$ -MLDS tal que a diferença de configurações $\mathcal{C}' - \mathcal{C}$ seja finita.*

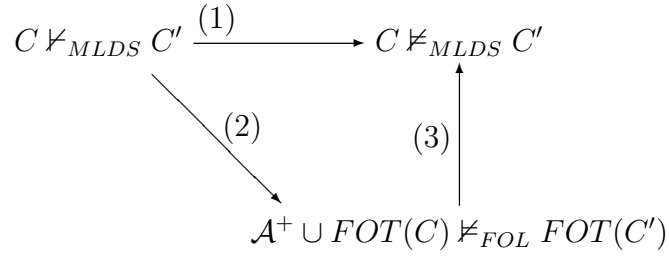


FIGURA 2.2 – Diagrama da Prova do Teorema da Completude

$$\text{Se } C \models_{MLDS} C' \text{ então } C \vdash_{MLDS} C'$$

A condição de finitude de $C' - C$ no enunciado acima não constitui uma restrição significativa sobre a propriedade da completude de \vdash_{MLDS} . Pelo contrário, ela permite que C e C' sejam infinitos, embora as derivações sejam finitas.

O teorema é provado por contraposição como mostrado no diagrama dado na Figura 2.2.2. A prova é dada pela composição dos dois passos principais, as setas (2) e (3). A seta (3) é dada diretamente pela Definição 1.38, enquanto a seta (2) constitui a parte principal do teorema da completude.

Em particular, a suposição $C \not\vdash_{MLDS} C'$ implica que exista um $\pi \in C' - C$ (onde π é uma unidade declarativa ou um R -literal) tal que $C \not\vdash_{MLDS} \pi$. (Isso já foi provado pelo Teorema 2.2.) Portanto, $C + [\neg\pi]$ é uma configuração consistente (veja a Proposição 2.33.) Isso implica, pelo *Lema da Existência do Modelo*, que a configuração $C + [\neg\pi]$ é satisfatível. Portanto, existe uma estrutura semântica $\mathcal{M}_{K\delta}$ de $K\delta$ -MLDS que satisfaz C e que também satisfaz $\neg\pi$. Portanto, como mostrado abaixo, essa estrutura semântica $\mathcal{M}_{K\delta}$ não satisfaz π . Como $\pi \in C'$, pela definição de satisfatibilidade de uma configuração, $\mathcal{M}_{K\delta}$ não satisfaz C' também. Portanto, $\mathcal{A}_{K\delta}^+ \cup FOT(C) \not\vdash_{FOL} FOT(C')$.

A descrição informal acima mostra que a parte principal desta prova de completude do estilo de Henkin é o lema da existência do modelo. Isso se liga às noções semânticas e prova-teóricas de consistência – isto é, qualquer teoria consistente é satisfatível. (Semanticamente, uma teoria é consistente se existe um modelo que a satisfaz [HUG96].) Isto é provado nos dois passos seguintes. Primeiramente, é mostrado que, para qualquer configuração consistente C , é possível construir uma *configuração consistente máxima* C_{mcc} que satisfaz propriedades (veja as Proposições 2.9 a 2.26) sobre as unidades de informação π (unidades declarativas e R -literals) que pertencem a ela. Em segundo lugar, é mostrado que é possível construir uma estrutura semântica $\mathcal{M}_{K\delta}(C_{mcc})$ que satisfaça C_{mcc} . Como a configuração consistente máxima contém a configuração consistente inicial C , essa estrutura semântica $\mathcal{M}_{K\delta}(C_{mcc})$ também satisfaz C .

2.2.3 Provas formais

Esta seção é composta de duas partes principais. Na primeira parte, a noção de uma configuração consistente máxima é dada junto com as provas de suas propriedades. A maioria dessas é comum a toda a família de $K\delta$ -MLDSs considerada neste trabalho, mas algumas poucas são específicas a $K\delta$ -MLDSs particulares. Na segunda parte, a construção de uma estrutura semântica canônica para um K -MLDS é descrita, e é provado

que isso é um modelo para uma configuração consistente máxima relativa a \mathbf{K} -MLDS. Esses passos são então estendidos para estruturas semânticas associadas com qualquer $K\delta$ -MLDS, considerando-se a álgebra de rotulação específica $\mathcal{A}_{K\delta}$.

Configurações consistentes máximas

Definição 2.5 (*Configuração consistente máxima, C_{mcc}*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS proposicional. C_{mcc} é uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS, se for uma configuração consistente e se, para qualquer $\pi \notin C_{mcc}$ (onde π é uma unidade declarativa ou um R -literal), a configuração $C_{mcc} + [\pi]$ não é consistente.*

Agora, é mostrado que, dada uma configuração consistente \mathcal{C} de um $K\delta$ -MLDS, sempre é possível construir uma configuração consistente máxima C_{mcc} que a contém. Para fazê-lo, é assumido que o conjunto de todas as unidades declarativas e R -literals de $K\delta$ -MLDS é ordenado de tal forma que é possível falar sobre o primeiro, o segundo, o terceiro, . . . , o enésimo elemento π de $K\delta$ -MLDS (onde π é uma unidade declarativa ou um R -literal). Usando essa suposição, na Definição 2.6 e na Proposição 2.8, é descrito como expandir uma configuração consistente inicial \mathcal{C} para uma configuração consistente máxima C_{mcc} . Informalmente, a construção é baseada no seguinte procedimento. Iniciando a partir da configuração \mathcal{C} , e percorrendo todos os elementos π_i de $K\delta$ -MLDS (onde π_i é uma unidade declarativa ou um R -literal), em uma certa ordenação escolhida, cada um em sua vez é adicionado a \mathcal{C} se e somente se isso puder ser feito de maneira consistente. Isso é formalmente definido como segue.

Definição 2.6 (*Construção de $MCC(\mathcal{C})$*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário. Seja $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n$ uma ordenação sobre o conjunto de todas as unidades declarativas e de todos os R -literals de $K\delta$ -MLDS. Seja \mathcal{C} uma configuração consistente de $K\delta$ -MLDS. Seja $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$. Considere o primeiro elemento π_1 na ordenação escolhida. Se $\mathcal{C}_0 + [\pi_1]$ é consistente, então seja $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0 + [\pi_1]$, caso contrário, seja $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0$. Então tome o segundo elemento π_2 da ordenação escolhida. Se $\mathcal{C}_1 + [\pi_2]$ é consistente, então seja $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 + [\pi_2]$, caso contrário seja $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$. Então aplique o mesmo processo sobre cada elemento π_i de S a cada vez de acordo com a ordenação escolhida.*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \mathcal{C} \\ \mathcal{C}_1 &= \mathcal{C}_0 + [\pi_1], \text{ se } \mathcal{C}_0 + [\pi_1] \text{ é consistente} \\ \mathcal{C}_1 &= \mathcal{C}_0, \text{ caso contrário} \\ \dots & \quad \dots \\ \mathcal{C}_n &= \mathcal{C}_{n-1} + [\pi_n], \text{ se } \mathcal{C}_{n-1} + [\pi_n] \text{ é consistente} \\ \mathcal{C}_n &= \mathcal{C}_{n-1}, \text{ caso contrário} \\ \dots & \quad \dots \end{aligned}$$

Sejam $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n, \dots$ a seqüência de configurações construídas acima. Então $MCC(\mathcal{C})$ é a configuração que contém todos os elementos π_i (unidades declarativas e R -literals) que estão em alguma configuração \mathcal{C}_i . Esta será escrita algumas vezes como C_{mcc} .

$$MCC(\mathcal{C}) = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{C}_i$$

Observação 2.1 *A seqüência de configurações $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n, \dots$, descrita na Definição 2.6, é tal que, para cada $i \geq 0$, $\mathcal{C}_i \subseteq C_{mcc}$. Além disso, a configuração \mathcal{C}_0 é consistente*

por suposição ($\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$), e para cada $i \geq 0$, se \mathcal{C}_i é consistente, então, por “construção”, \mathcal{C}_{i+1} também é consistente. Portanto, para cada $i \geq 0$, \mathcal{C}_i é uma configuração consistente.

A seguinte proposição mostra que a configuração \mathcal{C}_{mcc} , descrita na Definição 2.6, é realmente uma configuração consistente máxima.

Proposição 2.8 *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário, seja \mathcal{C} uma configuração consistente, e seja \mathcal{C}_{mcc} a configuração especificada na Definição 2.6. Os dois enunciados seguintes são válidos: (1) \mathcal{C}_{mcc} é consistente; (2) \mathcal{C}_{mcc} é máximo.*

Prova:

1. Prova por contradição. Suponha que \mathcal{C}_{mcc} não é consistente. Então, pela Definição 2.3, para algum termo $\lambda \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$. Então, pelo Teorema 2.3, existe uma configuração \mathcal{C}' tal que \mathcal{C}' é finita, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$ e $\mathcal{C}' \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$. Enumere todos os elementos (unidades declarativas e R -literais) de \mathcal{C}' de acordo com a ordenação escolhida para construir \mathcal{C}_{mcc} . Seja π_n o último elemento de \mathcal{C}' . Então $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_n$. Pela monotonicidade, $\mathcal{C}_n \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$ o que está em contradição com a Observação 2.1.
2. Para provar que \mathcal{C}_{mcc} é uma configuração máxima, é suficiente provar, usando a Definição 2.5, que, para qualquer π de $K\delta$ -MLDS (onde π é ou uma unidade declarativa ou um R -literal), que é consistente com \mathcal{C}_{mcc} , $\pi \in \mathcal{C}_{mcc}$. Seja π_n uma unidade declarativa ou um R -literal de $K\delta$ -MLDS, na ordenação escolhida especificada para construir \mathcal{C}_{mcc} , tal que π_n seja consistente com \mathcal{C}_{mcc} . Como \mathcal{C}_{mcc} é uma configuração consistente, pela Proposição 2.7, para qualquer configuração $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$, $\mathcal{C}' + [\pi_n]$ também é uma configuração consistente. Seja \mathcal{C}_{n-1} a configuração do passo n da construção de \mathcal{C}_{mcc} , então $\mathcal{C}_{n-1} \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$, pela Observação 2.1. Portanto, $\mathcal{C}_{n-1} + [\pi_n]$ é uma configuração consistente. Portanto, como $\mathcal{C}_{n-1} + [\pi_n] = \mathcal{C}_n$, e $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$, $\pi_n \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Até aqui, foi mostrado que, dada uma configuração consistente \mathcal{C} de um $K\delta$ -MLDS proposicional, sempre é possível construir uma configuração consistente máxima \mathcal{C}_{mcc} relativa a $K\delta$ -MLDS tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$. Algumas propriedades de configurações consistentes máximas são oferecidas agora.

Proposição 2.9 *(Consistência w.r.t. unidades declarativas) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário e seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Então, para qualquer unidade declarativa $\alpha : \lambda$, $\alpha : \lambda$ e $\neg\alpha : \lambda$ não estão ambas em \mathcal{C}_{mcc} .*

Prova: A prova segue diretamente da definição da regra de Introdução do \wedge .

Proposição 2.10 *(Consistência w.r.t. R -literais) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário e seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Então, para qualquer R -literal Δ , Δ e $\neg\Delta$ não estão ambos em \mathcal{C}_{mcc} .*

Prova: A prova segue diretamente da definição da regra de Introdução do \perp .

As duas proposições acima garantem que nenhuma informação contraditória está em uma configuração consistente máxima. Nas extensões de MLDSs proposicionais que raciocinam com igualdades (e desigualdades) entre rótulos, a Proposição 2.10 também incluirão literais de igualdade e de desigualdade, pois a regra de introdução do \perp será considerada como aplicação a esses tipos de unidades de informação também (veja a seção 1.6 no capítulo anterior).

Proposição 2.11 (*Maximalidade de unidades declarativas*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário e seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Para qualquer unidade declarativa $\alpha : \lambda$, ou $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$, ou $\neg\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$.*

Prova: A prova é por contradição. Suponha que $\alpha : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$ e que $\neg\alpha : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, como \mathcal{C}_{mcc} é uma configuração consistente máxima, $\mathcal{C}_{mcc} + [\alpha : \lambda]$ e $\mathcal{C}_{mcc} + [\neg\alpha : \lambda]$ são configurações inconsistentes. Portanto, $\mathcal{C}_{mcc} + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda'$, e $\mathcal{C}_{mcc} + [\neg\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda''$, para alguns termos rasos λ', λ'' de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Pelo Teorema 2.3, existem duas configurações finitas $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$ e $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$, tal que $\mathcal{C}_1 + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda'$, e $\mathcal{C}_2 + [\neg\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda''$. Seja \mathcal{C}' a configuração $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Pela monotonicidade, $\mathcal{C}' + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda'$. Portanto $\mathcal{C}' / \mathcal{C}' + [\neg\alpha : \lambda] \in \mathcal{I}_{-I}$ e $\langle \{\mathcal{C}', \mathcal{C}' + [\neg\alpha : \lambda]\}, m \rangle$ é uma prova, onde $m(0) = \mathcal{I}_{-I}$. Então $\mathcal{C}' \vdash_{MLDS} \mathcal{C}' + [\neg\alpha : \lambda]$. Além disso, pela monotonicidade, $\mathcal{C}' + [\neg\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda''$. Então, pela transitividade, $\mathcal{C}' \vdash_{MLDS} \perp : \lambda''$. Como $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$, pela monotonicidade, $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda''$. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

Proposição 2.12 (*Maximalidade de R-literais*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário e seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Para qualquer R-literal Δ , ou $\Delta \in \mathcal{C}_{mcc}$ ou $\neg\Delta \in \mathcal{C}_{mcc}$.*

Prova: A prova é por contradição. Suponha que $\Delta \notin \mathcal{C}_{mcc}$ e que $\neg\Delta \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Como \mathcal{C}_{mcc} é uma configuração consistente máxima, $\mathcal{C}_{mcc} + [\Delta]$ e $\mathcal{C}_{mcc} + [\neg\Delta]$ são configurações inconsistentes. Então $\mathcal{C}_{mcc} + [\Delta] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda'$ e $\mathcal{C}_{mcc} + [\neg\Delta] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda''$, para alguns termos rasos λ', λ'' de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Pelo Teorema 2.3, existem duas configurações finitas $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$ e $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$, tal que $\mathcal{C}_1 + [\Delta] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda'$ e $\mathcal{C}_2 + [\neg\Delta] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda''$. Seja \mathcal{C}' a configuração $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Pela monotonicidade, $\mathcal{C}' + [\Delta] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda'$. Então $\mathcal{C}' / \mathcal{C}' + [\neg\Delta] \in \mathcal{I}_{R-I}$ e $\langle \{\mathcal{C}', \mathcal{C}' + [\neg\Delta]\}, m \rangle$ é uma prova, onde $m(0) = \mathcal{I}_{R-I}$. Então $\mathcal{C}' \vdash_{MLDS} \mathcal{C}' + [\neg\Delta]$. Além disso, pela monotonicidade, $\mathcal{C}' + [\neg\Delta] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda''$. então, pela transitividade, $\mathcal{C}' \vdash_{MLDS} \perp : \lambda''$. Como $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$, pela monotonicidade, $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda''$. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

Proposição 2.13 (*Propriedade para fórmulas \wedge*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário e seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Seja λ um termo raso de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e sejam α e β duas wffs de \mathcal{L}_M . Então, $\alpha \wedge \beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$, se e somente se $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $\beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$.*

Prova: (Metade “somente se”) A prova é por contradição. Assuma que ou $\alpha : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$ ou $\beta : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Apenas o primeiro caso é considerado, pois o argumento para o segundo caso é análogo. Se $\alpha : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$, então, pela Proposição 2.11, $\neg\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente como mostrado na seguinte derivação. Isso está em contradição com a hipótese original.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc}\langle\alpha \wedge \beta : \lambda, \neg\alpha : \lambda\rangle \quad \wedge E}{\mathcal{C}'\langle\alpha : \lambda, \neg\alpha : \lambda\rangle} \quad \wedge I}{\mathcal{C}'_1\langle\perp : \lambda\rangle}$$

(Metade "se"): Por hipótese, $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $\beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$. Assuma que $\alpha \wedge \beta : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.11, $\neg(\alpha \wedge \beta) : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente, como mostrado na seguinte derivação, o que está em contradição com a hipótese original.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc}\langle\neg(\alpha \wedge \beta) : \lambda, \alpha : \lambda, \beta : \lambda\rangle \quad \wedge I}{\mathcal{C}'\langle\alpha \wedge \beta : \lambda, \neg(\alpha \wedge \beta) : \lambda\rangle} \quad \wedge I}{\mathcal{C}'_1\langle\perp : \lambda\rangle}$$

Proposição 2.14 (*Propriedade para fórmulas \vee*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário e seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Seja λ qualquer termo raso de $\text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e sejam α, β duas wffs de \mathcal{L}_M . Então $\alpha \vee \beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$ se e somente se $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$ ou $\beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$.*

Prova: (Metade "somente se"): A prova é por contradição. Assuma que $\alpha : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$ e que $\beta : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.11, $\neg\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $\neg\beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, $\mathcal{C}_{mcc} + [\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$ e $\mathcal{C}_{mcc} + [\beta : \lambda] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$. Então, pela regra de eliminação do \vee , $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

(Metade "se"): A prova é por contradição. Por hipótese, ou $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$ ou $\beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$. Apenas o primeiro caso é considerado, pois o argumento para o segundo caso é análogo. Assuma que $\alpha \vee \beta : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.11, $\neg(\alpha \vee \beta) : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente como mostrado na seguinte derivação.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc}\langle\neg(\alpha \vee \beta) : \lambda, \alpha : \lambda\rangle \quad \vee I}{\mathcal{C}'\langle\alpha \vee \beta : \lambda, \neg(\alpha \vee \beta) : \lambda\rangle} \quad \wedge I}{\mathcal{C}'_1\langle\perp : \lambda\rangle}$$

Proposição 2.15 (*Propriedade para fórmulas \rightarrow (i)*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário e seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Seja λ um termo raso de $\text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e α, β duas wffs de \mathcal{L}_M . Se $\neg\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$ ou $\beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$ então $\alpha \rightarrow \beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$.*

Prova: A prova é por contradição. Assuma que $\alpha \rightarrow \beta : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.11, $\neg(\alpha \rightarrow \beta) : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente, como mostrado na seguinte derivação.

$$\begin{array}{l} \frac{\mathcal{C}_{mcc} \quad \langle \neg \quad (\alpha \rightarrow \beta) : \lambda, \neg\alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}' \quad \langle \neg \quad (\alpha \rightarrow \beta) : \lambda, \neg\alpha \vee \beta : \lambda \rangle} \quad (\vee I) \\ \frac{\mathcal{C}' \quad \langle \neg\alpha \vee \beta : \lambda, [\alpha : \lambda] \rangle}{\mathcal{C}' \quad \langle \neg\alpha \vee \beta : \lambda, [\alpha : \lambda], [\neg\beta : \lambda] \rangle} \quad (\text{suposição}) \\ \frac{\mathcal{C}' \quad \langle \neg\alpha \vee \beta : \lambda, [\alpha : \lambda], [\neg\beta : \lambda] \rangle}{\mathcal{C} \quad \langle \neg\alpha \vee \beta : \lambda, [\alpha : \lambda], [\neg\beta : \lambda], \perp : \lambda \rangle} \quad (\vee E) \\ \frac{\mathcal{C} \quad \langle \neg\alpha \vee \beta : \lambda, [\alpha : \lambda], [\neg\beta : \lambda] \rangle}{\tilde{\mathcal{C}}_1 \quad \langle \neg\alpha \vee \beta : \lambda, [\alpha : \lambda], \neg\neg\beta : \lambda \rangle} \quad (\neg I) \\ \frac{\tilde{\mathcal{C}}_1 \quad \langle \neg\alpha \vee \beta : \lambda, [\alpha : \lambda], \neg\neg\beta : \lambda \rangle}{\tilde{\mathcal{C}}_2 \quad \langle \neg\alpha \vee \beta : \lambda, [\alpha : \lambda], \beta : \lambda \rangle} \quad (\neg E) \\ \frac{\tilde{\mathcal{C}}_2 \quad \langle \neg\alpha \vee \beta : \lambda, [\alpha : \lambda], \beta : \lambda \rangle}{\tilde{\mathcal{C}}_3 \quad \langle \neg \quad (\alpha \rightarrow \beta) : \lambda, \alpha \rightarrow \beta : \lambda \rangle} \quad (\rightarrow I) \\ \frac{\tilde{\mathcal{C}}_3 \quad \langle \neg \quad (\alpha \rightarrow \beta) : \lambda, \alpha \rightarrow \beta : \lambda \rangle}{\mathcal{C}'_1 \quad \langle \perp : \lambda \rangle} \quad (\wedge I) \end{array}$$

Agora suponha que $\beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$. Assuma, por contradição, que $\alpha \rightarrow \beta : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.11, $\neg(\alpha \rightarrow \beta) : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente, como mostrado na seguinte derivação.

$$\begin{array}{c}
\frac{\mathcal{C}_{mcc} \langle \neg(\alpha \rightarrow \beta) : \lambda, \beta : \lambda \rangle}{\frac{\mathcal{C}_{mcc} \langle \neg(\alpha \rightarrow \beta) : \lambda, \beta : \lambda, [\alpha : \lambda] \rangle}{\mathcal{C} \langle \beta : \lambda \rangle}} \text{ (suposição)} \\
\frac{\mathcal{C}' \langle \neg(\alpha \rightarrow \beta) : \lambda, \alpha \rightarrow \beta : \lambda \rangle}{\mathcal{C}'_1 \langle \perp : \lambda \rangle} \text{ (C-R)} \\
\text{ (}\rightarrow I\text{)} \\
\text{ (}\wedge I\text{)}
\end{array}$$

Proposição 2.16 (*Propriedade para fórmulas \rightarrow (ii)*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário e seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Seja λ um termo raso de $\text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e sejam α, β duas wffs de \mathcal{L}_M . Se $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$, e $\alpha \rightarrow \beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$, então $\beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Prova: A prova é por contradição. Suponha que $\beta : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.11, $\neg\beta : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda$, como mostrado na seguinte derivação.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc} \langle \alpha : \lambda, \alpha \rightarrow \beta : \lambda, \neg\beta : \lambda \rangle}{\mathcal{C}' \langle \beta : \lambda, \neg\beta : \lambda \rangle} \rightarrow E}{\mathcal{C}'_1 \langle \perp : \lambda \rangle} a \wedge I$$

Proposição 2.17 (*Propriedade para fórmulas \diamond (i)*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário, seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS e seja λ um termo raso de $\text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e seja α uma wff de \mathcal{L}_M . Se $\diamond\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$, então $\alpha : f_\alpha(\lambda) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $R(\lambda, f_\alpha(\lambda)) \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Prova: Por hipótese, $\diamond\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.3, $\neg\alpha : f_\alpha(\lambda) \notin \mathcal{C}_{mcc}$ e $\neg R(\lambda, f_\alpha(\lambda)) \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, pela Proposição 2.11, $\alpha : f_\alpha(\lambda) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e, pela Proposição 2.12, $R(\lambda, f_\alpha(\lambda)) \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Proposição 2.18 (*Propriedade para fórmulas \square (i)*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário, seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS, sejam λ, λ' dois termos rasos de $\text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e seja α uma wff de \mathcal{L}_M . Se $\square\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $R(\lambda, \lambda') \in \mathcal{C}_{mcc}$, então $\alpha : \lambda' \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Prova: A prova é por contradição. Suponha que $\alpha : \lambda' \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.11, $\neg\alpha : \lambda' \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda'$ como mostrado na seguinte derivação.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc} \langle \square\alpha : \lambda, R(\lambda, \lambda'), \neg\alpha : \lambda' \rangle}{\mathcal{C}' \langle \alpha : \lambda', \neg\alpha : \lambda' \rangle} \square E}{\mathcal{C}'_1 \langle \perp : \lambda' \rangle} \wedge I$$

Proposição 2.19 (*Propriedade para fórmulas \diamond (ii)*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário, seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS, sejam λ_1 e λ_2 dois termos rasos de $\text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e seja α uma wff de \mathcal{L}_M . Se $R(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $\alpha : \lambda_2 \in \mathcal{C}_{mcc}$, então $\diamond\alpha : \lambda_1 \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Prova: A prova é por contradição. Suponha que $\diamond\alpha : \lambda_1 \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.11, $\neg\diamond\alpha : \lambda_1 \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{MLDS} \perp : \lambda_1$ como mostrado na seguinte derivação.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc} \langle R(\lambda_1, \lambda_2), \alpha : \lambda_2, \neg\diamond\alpha : \lambda_1 \rangle}{\mathcal{C}' \langle \diamond\alpha : \lambda_1, \neg\diamond\alpha : \lambda_1 \rangle} \diamond I}{\mathcal{C}'_1 \langle \perp : \lambda_1 \rangle} \wedge I$$

Proposição 2.20 (*Propriedade para fórmulas \Box (ii)*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário, seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS, seja λ um termo raso de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e seja α uma wff de \mathcal{L}_M . Se $\neg R(\lambda, box_\alpha(\lambda)) \in \mathcal{C}_{mcc}$ ou $\alpha : box_\alpha(\lambda) \in \mathcal{C}_{mcc}$, então $\Box\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Prova: A prova é por contradição. Assuma que $\Box\alpha : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.11, $\neg\Box\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$, o que implica, pela Proposição 2.3, que $\alpha : box_\alpha(\lambda) \notin \mathcal{C}_{mcc}$ e $\neg R(\lambda, box_\alpha(\lambda)) \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, pela Proposição 2.11, $\neg\alpha : box_\alpha(\lambda) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e, pela Proposição 2.12, $R(\lambda, box_\alpha(\lambda)) \in \mathcal{C}_{mcc}$.

As propriedades descritas acima (Proposições 2.9 a 2.20) são válidas para qualquer configuração consistente máxima relativa a algum $K\delta$ -MLDS arbitrário. Entretanto, na construção de uma configuração consistente máxima, conjuntos diferentes de R -literais são adicionados a diferentes álgebras de rotulação $\mathcal{A}_{K\delta}$ sob consideração. Portanto, para cada um dos $K\delta$ -MLDS, precisam ser provadas propriedades adicionais sobre os R -literais contidos na configuração consistente máxima associada. Como cada álgebra de rotulação é uma combinação dos axiomas básicos **(T)**, **(4)**, **(D)**, **(B)**, **(5)**, **(Irr)**, é suficiente considerar as propriedades associadas com esses axiomas individuais. Combinações apropriadas dessas propriedades cobrirão os casos de todas as outras álgebras de rotulação $\mathcal{A}_{K\delta}$.

Proposição 2.21 (*Propriedade para álgebras reflexivas*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS tal que $\{\forall x R(x, x)\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Então, para cada termo raso λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, o R -literal $R(\lambda, \lambda) \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Prova: A prova é por contradição. Seja λ' um termo raso de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ tal que $R(\lambda', \lambda') \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.12, $\neg R(\lambda', \lambda') \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{K\delta\text{-MLDS}} \perp : \lambda''$, para algum termo raso $\lambda'' \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, como mostrado na seguinte derivação. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc}\langle\neg R(\lambda', \lambda')\rangle}{\mathcal{C}'\langle\neg R(\lambda', \lambda'), R(\lambda', \lambda')\rangle}}{\mathcal{C}'_1\langle\perp : \lambda''\rangle} \text{ Afirmação do } R \quad \perp I$$

Proposição 2.22 (*Propriedade para álgebras irreflexivas*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS tal que $\{\forall x\neg R(x, x)\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Então, para cada termo raso λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, o R -literal $\neg R(\lambda, \lambda) \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Prova: A prova é por contradição. Seja λ' um termo raso de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ tal que $\neg R(\lambda', \lambda') \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.12, $R(\lambda', \lambda') \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então, $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{K\delta\text{-MLDS}} \perp : \lambda''$, para algum termo raso $\lambda'' \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, como mostrado na seguinte derivação. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente, o que está em contradição com a hipótese original.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc}\langle R(\lambda', \lambda')\rangle}{\mathcal{C}'\langle R(\lambda', \lambda'), \neg R(\lambda', \lambda')\rangle}}{\mathcal{C}'_1\langle\perp : \lambda''\rangle} \text{ Afirmação do } R \quad \perp I$$

Proposição 2.23 (*Propriedade para álgebras transitivas*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS tal que $\{\forall x, y, z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ três termos rasos da linguagem $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ tal que $R(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $R(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então $R(\lambda_1, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Prova: A prova é por contradição. Suponha que $R(\lambda_1, \lambda_3) \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.12, $\neg R(\lambda_1, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{K\delta\text{-MLDS}} \perp : \lambda'$, para algum termo raso $\lambda' \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, como mostrado na seguinte derivação. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc}\langle \neg R(\lambda_1, \lambda_3) \rangle}{\mathcal{C}'\langle \neg R(\lambda_1, \lambda_3), R(\lambda_1, \lambda_3) \rangle} \text{ Afirmação do } R}{\mathcal{C}'_1\langle \perp : \lambda' \rangle} \perp I$$

Proposição 2.24 (*Propriedade para álgebras simétricas*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS tal que $\{\forall x, y R(x, y) \rightarrow R(y, x)\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Sejam λ_1 e λ_2 dois termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ tal que $R(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então $R(\lambda_2, \lambda_1) \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Prova: A prova é por contradição. Suponha que $R(\lambda_2, \lambda_1) \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.12, $\neg R(\lambda_2, \lambda_1) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{K\delta\text{-MLDS}} \perp : \lambda'$, para algum termo raso $\lambda' \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, como mostrado na seguinte derivação. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc}\langle R(\lambda_1, \lambda_2), \neg R(\lambda_2, \lambda_1) \rangle}{\mathcal{C}'\langle \neg R(\lambda_2, \lambda_1), R(\lambda_2, \lambda_1) \rangle} \text{ Afirmação do } R}{\mathcal{C}'_1\langle \perp : \lambda' \rangle} \perp I$$

Proposição 2.25 (*Propriedade para álgebras euclidianas*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS tal que $\{\forall x, y, z(R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow R(y, z)\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 três termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ tal que $R(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $R(\lambda_1, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então $R(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Prova: A prova é por contradição. Suponha que $R(\lambda_2, \lambda_3) \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.12, $\neg R(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então, $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{K\delta\text{-MLDS}} \perp : \lambda'$, para algum termo raso $\lambda' \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ como mostrado na seguinte derivação. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc}\langle R(\lambda_1, \lambda_2), R(\lambda_1, \lambda_3), \neg R(\lambda_2, \lambda_3) \rangle}{\mathcal{C}'\langle \neg R(\lambda_2, \lambda_3), R(\lambda_2, \lambda_3) \rangle} \text{ Afirmação do } R}{\mathcal{C}'_1\langle \perp : \lambda' \rangle} \perp I$$

Proposição 2.26 (*Propriedade para álgebras seriais*) Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS tal que $\{\forall x R(x, succ(x))\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Então, para cada termo raso λ de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, o R -literal $R(\lambda, succ(\lambda)) \in \mathcal{C}_{mcc}$.

Prova: A prova é por contradição. Seja λ' um termo raso de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ tal que $R(\lambda', succ(\lambda')) \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.12, $\neg R(\lambda', succ(\lambda')) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então $\mathcal{C}_{mcc} \vdash_{K\delta\text{-MLDS}} \perp : \lambda''$, para algum termo raso $\lambda'' \in Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, como mostrado na seguinte derivação. Portanto, \mathcal{C}_{mcc} é inconsistente.

$$\frac{\frac{\mathcal{C}_{mcc}\langle \neg R(\lambda', succ(\lambda')) \rangle}{\mathcal{C}'\langle \neg R(\lambda', succ(\lambda')), R(\lambda', succ(\lambda')) \rangle} \text{ Afirmação do } R}{\mathcal{C}'_1\langle \perp : \lambda'' \rangle} \perp I$$

Lema da Existência do Modelo

Esta seção mostra que qualquer configuração consistente é satisfatível. Isso é provado, mostrando-se que é possível construir, para cada $K\delta$ -MLDS, uma estrutura semântica $\mathcal{M}_{K\delta}$ que satisfaz uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS.

Definição 2.7 (*Interpretação canônica, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc})$*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário. Seja $\mathcal{C}_{mcc} = \langle \mathcal{D}_{mcc}, \mathcal{F}_{mcc} \rangle$ uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Seja $FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ sua tradução de primeira ordem. $FOT(\mathcal{C}_{mcc}) = \mathcal{D}_{mcc} \cup \mathcal{DU}_{mcc}$, onde $\mathcal{DU}_{mcc} = \{[\alpha]^*(\lambda) \mid \alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}\}$. Seja \mathcal{U} o Universo de Herbrand da linguagem $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. $I(\mathcal{C}_{mcc})$ é a função de interpretação sobre a linguagem $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, definida como segue.*

- Para cada termo $\lambda \in Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $\|\lambda\|_{I(\mathcal{C}_{mcc})} = \lambda$.
- Para o predicado binário $R \in Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $\|R\|_{I(\mathcal{C}_{mcc})} = \{\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle \mid R(\lambda_i, \lambda_j) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})\}$ (note que $FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ contém apenas literais rasos.)
- Para cada predicado monádico $[\alpha]^*(\lambda_i) \in Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $\|[\alpha]^*\|_{I(\mathcal{C}_{mcc})} = \{\lambda_i \mid [\alpha]^*(\lambda_i) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})\}$

$\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) = \langle \mathcal{U}, I(\mathcal{C}_{mcc}) \rangle$ é uma interpretação canônica.

Observação 2.2 *Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a um $K\delta$ -MLDS, seja $FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ sua tradução de primeira ordem e seja $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc})$ uma interpretação canônica. Observe que, para qualquer fórmula atômica rasa de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ da forma $R(\lambda_i, \lambda_j)$, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \models_{FOL} R(\lambda_i, \lambda_j)$ se e somente se $R(\lambda_i, \lambda_j) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$; analogamente para qualquer fórmula atômica rasa de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ da forma $[\alpha]^*(\lambda)$, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \models_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$ se e somente se $[\alpha]^*(\lambda) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Agora seja V uma atribuição de variável a partir do conjunto de variáveis da linguagem $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ para o Universo de Herbrand \mathcal{U} . O valor verdade de qualquer wff de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ é definido como segue.*

- $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \models_{FOL} R(x, y)$ se e somente se $\langle V(x), V(y) \rangle \in \|R\|_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$
- $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \models_{FOL} [\alpha]^*(x)$ se e somente se $V(x) \in \|[\alpha]^*\|_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$
- para qualquer wff ϕ de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, o valor verdade de ϕ em relação a $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc})$ e V é definido da maneira usual (veja por exemplo [GEN88]).

É necessário mostrar agora que, dada \mathcal{C}_{mcc} relativa a um $K\delta$ -MLDS particular, a interpretação canônica $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc})$ é uma estrutura semântica de $K\delta$ -MLDS. Isso é feito em dois passos:

1. é mostrado que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc})$ satisfaz a álgebra de rotulação particular $\mathcal{A}_{K\delta}$
2. é mostrado que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc})$ satisfaz todos os esquemas de axiomas $(Ax1) - (Ax8)$ da álgebra estendida associada $\mathcal{A}_{K\delta}^+$.

Esse segundo passo é independente do tipo de MLDS proposicional (isto é, do tipo de δ) e portanto será provado primeiro. O primeiro passo precisa levar em consideração as diferentes álgebras de rotulação específicas, bem como as propriedades adicionais específicas para \mathcal{C}_{mcc} provadas acima (Proposições 2.21 a 2.26).

Para qualquer atribuição de variável V e qualquer variável x de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $V(x)$ refere-se a algum termo raso no Universo de Herbrand \mathcal{U} . Portanto, por simplicidade, $V(x)$ será usado também para denotar um termo raso arbitrário nos argumentos que seguem.

Teorema 2.5 (Existência de modelo para $\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}$) *Seja $\mathcal{A}_{K\delta}^+$ a álgebra estendida associada com um $K\delta$ -MLDS proposicional, seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS e seja $FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ sua tradução de primeira ordem. Então, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc})$ é um modelo de $\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}$.*

Prova: Sejam U, V atribuições de variáveis arbitrárias, e sejam α, β duas *wffs* de \mathcal{L}_M . A prova é através de casos sobre cada um dos esquemas (Ax1) – (Ax8).

CASO 1: (Ax1) $\forall x([\alpha \wedge \beta]^*(x) \equiv ([\alpha]^*(x) \wedge [\beta]^*(x)))$

É suficiente provar que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\alpha \wedge \beta]^*(V(x))$ sse $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \cup V \Vdash_{FOL} [\alpha]^*(V(x))$ e $(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\beta]^*(V(x))$.

(Metade "somente se"): Assuma que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\alpha \wedge \beta]^*(V(x))$.

Então, $[\alpha \wedge \beta]^*(V(x)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Então, $\alpha \wedge \beta : V(x) \in \mathcal{C}_{mcc}$, o que implica, pela Proposição 2.13, que $\alpha : V(x) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $\beta : V(x) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, $V(x) \in \llbracket [\alpha]^* \rrbracket_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$ e $V(x) \in \llbracket [\beta]^* \rrbracket_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\alpha]^*(V(x))$ e $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\beta]^*(V(x))$.

(Metade "se"): Vamos assumir que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\alpha]^*(V(x))$ e que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\beta]^*(V(x))$.

Então $[\alpha]^*(V(x)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ e $[\beta]^*(V(x)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$, o que implica que $\alpha : V(x) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $\beta : V(x) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, pela Proposição 2.13, $\alpha \wedge \beta : V(x) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\alpha \wedge \beta]^*(V(x))$.

Para os casos 2 a 4 (isto é, (Ax2), (Ax3), (Ax4)), veja [BRO2002].

CASO 5: (Ax5) $\forall x([\diamond\alpha]^*(x) \rightarrow (R(x, f_\alpha(x)) \wedge [\alpha]^*(f_\alpha(x))))$.

É suficiente provar que se $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\diamond\alpha]^*(V(x))$, então é o caso que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} R(V(x), f_\alpha(V(x)))$ e $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\alpha]^*(f_\alpha(V(x)))$. (A definição da função de interpretação $I(\mathcal{C}_{mcc})$ de uma interpretação canônica $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc})$ permite-nos escrever $f_\alpha(V(x))$ em vez de $\llbracket f_\alpha \rrbracket_{I(\mathcal{C}_{mcc})}(V(x))$.)

Vamos assumir que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\diamond\alpha]^*(V(x))$. Então, $[\diamond\alpha]^*(V(x)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$, o que implica que $\diamond\alpha : V(x) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Pela Proposição 2.17, $\alpha : f_\alpha(V(x)) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $R(V(x), f_\alpha(V(x))) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} R(V(x), f_\alpha(V(x)))$ e $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\alpha]^*(f_\alpha(V(x)))$.

CASO 6: (Ax6) $\forall x(\exists y(R(x, y) \wedge [\alpha]^*(y)) \rightarrow [\diamond\alpha]^*(x))$.

Considere a fórmula equivalente $\forall x\forall y(R(x, y) \wedge [\alpha]^*(y)) \rightarrow [\diamond\alpha]^*(x)$. É suficiente provar que, se $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V, U \Vdash_{FOL} R(V(x), U(y))$ e $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V, U \Vdash_{FOL} [\alpha]^*(U(y))$, então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V, U \Vdash_{FOL} [\diamond\alpha]^*(V(x))$.

Por suposição, $R(V(x), U(y)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ e $[\alpha]^*(U(y)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$, o que implica que $R(V(x), U(y)) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $\alpha : U(y) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.19, $\diamond\alpha : V(x) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V, U \Vdash_{FOL} [\diamond\alpha]^*(V(x))$.

CASO 7: (Ax7) $\forall x(R(x, box_\alpha(x)) \rightarrow [\alpha]^*(box_\alpha(x))) \rightarrow [\Box\alpha]^*(x)$.

É suficiente provar que se $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} \neg R(V(x), box_\alpha(V(x)))$ ou $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\alpha]^*(box_\alpha(V(x)))$, então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\Box\alpha]^*(V(x))$. (A definição da

função de interpretação $I(\mathcal{C}_{mcc})$ de uma interpretação canônica $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc})$ permite-nos escrever $box_\alpha(V(x))$ em vez de $\|box_\alpha\|_{I(\mathcal{C}_{mcc})}(V(x))$.

Por suposição, ou $\neg R(V(x), box_\alpha(V(x))) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ ou $[\alpha]^*(box_\alpha(V(x))) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Isso implica que ou $\neg R(V(x), box_\alpha(V(x))) \in \mathcal{C}_{mcc}$ ou $\alpha : box_\alpha(V(x)) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.20, $\Box\alpha : V(x) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} [\Box\alpha]^*(V(x))$.

Case 8: $(Ax8) \forall x([\Box\alpha]^*(x) \rightarrow (\forall y(R(x, y) \rightarrow [\alpha]^*(y))))$.

Considere a fórmula equivalente $\forall x\forall y(([\Box\alpha]^*(x) \wedge (R(x, y) \rightarrow [\alpha]^*(y))) \rightarrow [\alpha]^*(y))$.

É suficiente provar que, se $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V, U \Vdash_{FOL} [\Box\alpha]^*(V(x))$ e $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V, U \Vdash_{FOL} R(V(x), U(y))$, então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V, U \Vdash_{FOL} [\alpha]^*(U(y))$.

Por suposição, $[\Box\alpha]^*(V(x)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$, e $R(V(x), U(y)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Isso implica que $\Box\alpha : V(x) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $R(V(x), U(y)) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Então, pela Proposição 2.18, $\alpha : U(y) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V, U \Vdash_{FOL} [\alpha]^*(U(y))$.

Proposição 2.27 (*Satisfatibilidade de (T)*) *Seja $K\delta$ -MLDS um sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) tal que $\{\forall xR(x, x)\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS e seja $FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ sua tradução de primeira ordem. Então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \Vdash_{FOL} \forall xR(x, x)$.*

Prova: Seja V uma atribuição de variável arbitrária. Então, é suficiente provar que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} R(V(x), V(x))$. Pela Proposição 2.21, $R(V(x), V(x)) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e então $R(V(x), V(x)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Portanto, $\langle V(x), V(x) \rangle \in \|R\|_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} R(V(x), V(x))$.

Proposição 2.28 (*Satisfatibilidade de (Irr)*) *Seja $K\delta$ -MLDS um sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) tal que $\{\forall x\neg R(x, x)\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS e seja $FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ sua tradução de primeira ordem. Então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \Vdash_{FOL} \forall x\neg R(x, x)$.*

Prova: Seja V uma atribuição de variável arbitrária. Então, é suficiente provar que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} \neg R(V(x), V(x))$. Pela Proposição 2.22, $\neg R(V(x), V(x)) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e então $R(V(x), V(x)) \notin FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} \neg R(V(x), V(x))$.

Proposição 2.29 (*Satisfatibilidade de (4)*) *Seja $K\delta$ -MLDS um sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) tal que $\{\forall x, y, z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS e seja $FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ sua tradução de primeira ordem. Então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \Vdash_{FOL} \forall x, y, z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$.*

Prova: Seja V uma atribuição de variável arbitrária. Então, é suficiente provar que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} (R(V(x), V(y)) \wedge R(V(y), V(z))) \rightarrow R(V(x), V(z))$. Assuma que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} (R(V(x), V(y)) \wedge R(V(y), V(z)))$. Isso implica que $\langle V(x), V(y) \rangle \in \|R\|_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$ e $\langle V(y), V(z) \rangle \in \|R\|_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$. Portanto, $R(V(x), V(y)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ e $R(V(y), V(z)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Portanto, $R(V(x), V(y)) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $R(V(y), V(z)) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Pela Proposição 2.23, $R(V(x), V(z)) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e então $R(V(x), V(z)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ e portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} R(V(x), V(z))$.

Proposição 2.30 (*Satisfatibilidade de (B)*) *Seja $K\delta$ -MLDS um sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) tal que $\{\forall x, y((R(x, y) \rightarrow R(y, x))\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS e seja $FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ sua tradução de primeira ordem. Então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \Vdash_{FOL} \forall x, y((R(x, y) \rightarrow R(y, x))$.*

Prova: Seja V uma atribuição de variável arbitrária. Então, é suficiente provar que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} (R(V(x), V(y)))$ e então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} R(V(y), V(x))$. Assuma que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} (R(V(x), V(y)))$. Então temos que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} R(V(x), V(y))$, o que implica que $\langle V(x), V(y) \rangle \in \parallel R \parallel_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$. Portanto, $R(V(x), V(y)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ e $R(V(x), V(y)) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Pela Proposição 2.24, $R(V(y), V(x)) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} R(V(y), V(x))$.

Proposição 2.31 (*Satisfatibilidade de (D)*) *Seja $K\delta$ -MLDS um sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) tal que $\{\forall x R(x, succ(x))\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS e seja $FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ sua tradução de primeira ordem. Então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \Vdash_{FOL} \forall x R(x, succ(x))$.*

Prova: Seja V uma atribuição de variável arbitrária. Então, é suficiente provar que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} R(V(x), succ(V(x)))$. Pela Proposição 2.26, $R(V(x), succ(V(x))) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e então $R(V(x), succ(V(x))) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Portanto, $\langle V(x), succ(V(x)) \rangle \in \parallel R \parallel_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} R(V(x), succ(V(x)))$.

Proposição 2.32 (*Satisfatibilidade de (5)*) *Seja $K\delta$ -MLDS um sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) tal que $\{\forall x, y, z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(y, z))\} \subseteq \mathcal{A}_{K\delta}$. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS e seja $FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ sua tradução de primeira ordem. Então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \Vdash_{FOL} \forall x, y, z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(y, z))$.*

Prova: Seja V uma atribuição de variável arbitrária. Então, é suficiente provar que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} (R(V(x), V(y)) \wedge R(V(y), V(z))) \rightarrow R(V(y), V(z))$. Assuma que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} (R(V(x), V(y)) \wedge R(V(y), V(z)))$. Isso implica que $\langle V(x), V(y) \rangle \in \parallel R \parallel_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$ e $\langle V(y), V(z) \rangle \in \parallel R \parallel_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$. Então $R(V(x), V(y)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$ e $R(V(y), V(z)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Logo, $R(V(x), V(y)) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $R(V(y), V(z)) \in \mathcal{C}_{mcc}$. Pela Proposição 2.25, $R(V(y), V(z)) \in \mathcal{C}_{mcc}$ e então $R(V(y), V(z)) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}), V \Vdash_{FOL} R(V(y), V(z))$.

Lema 2.3 (*Lema da Existência do Modelo*) *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário. Seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Então, para algum π (onde π é uma unidade declarativa ou um R -literal) de $K\delta$ -MLDS, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \models_{MLDS} \pi$ se $\pi \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \not\models_{MLDS} \pi$ se $\pi \notin \mathcal{C}_{mcc}$.*

Prova: Há dois casos a considerar.

1. i é uma unidade declarativa da forma $\alpha : \lambda$.

Se $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}_{mcc}$, então $[\alpha]^*(\lambda) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Então, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \Vdash_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \models_S \alpha : \lambda$. Se $\alpha : \lambda \notin \mathcal{C}_{mcc}$, então $[\alpha]^*(\lambda) \notin FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Então, $\lambda \notin \parallel [\alpha]^* \parallel_{I(\mathcal{C}_{mcc})}$, e então, pela Observação 2.2, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \not\models_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \not\models_S \alpha : \lambda$.

2. π é um R -literal.

Então π pode ser igual a $R(\lambda_i, \lambda_j)$, ou igual a $\neg R(\lambda_i, \lambda_j)$, onde λ_i, λ_j são termos rasos de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$.

- Suponha que π é da forma $R(\lambda_i, \lambda_j)$. Se $R(\lambda_i, \lambda_j) \in \mathcal{C}_{mcc}$, então $R(\lambda_i, \lambda_j) \in FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \Vdash_{FOL} R(\lambda_i, \lambda_j)$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \models_{MLDS} R(\lambda_i, \lambda_j)$. Se $R(\lambda_i, \lambda_j) \notin \mathcal{C}_{mcc}$, então $R(\lambda_i, \lambda_j) \notin FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Então, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \not\Vdash_{FOL} R(\lambda_i, \lambda_j)$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \not\models_{MLDS} R(\lambda_i, \lambda_j)$.
- Suponha agora que π é da forma $\neg R(\lambda_i, \lambda_j)$. Se $\neg R(\lambda_i, \lambda_j) \in \mathcal{C}_{mcc}$, então, pela Proposição 2.12, $R(\lambda_i, \lambda_j) \notin \mathcal{C}_{mcc}$. Então $R(\lambda_i, \lambda_j) \notin FOT(\mathcal{C}_{mcc})$. Então $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \not\Vdash_{FOL} R(\lambda_i, \lambda_j)$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \Vdash_{FOL} \neg R(\lambda_i, \lambda_j)$. Portanto, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc}) \models_{MLDS} \neg R(\lambda_i, \lambda_j)$.

Corolário 2.2 *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS proposicional e seja \mathcal{C} uma configuração consistente de $K\delta$ -MLDS. Então, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{mcc})$ satisfaz \mathcal{C} .*

Prova: A prova segue trivialmente do Lema 2.3 e do fato de que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{mcc}$.

Proposição 2.33 *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS proposicional e seja \mathcal{C} uma configuração de $K\delta$ -MLDS. Seja π uma unidade declarativa ou um R -literal tal que $\pi \notin \mathcal{C}$. Se $\mathcal{C} \not\models_{MLDS} \pi$, então $\mathcal{C} + [\neg\pi]$ é uma configuração consistente.*

Prova: Há dois casos a considerar.

1. π é uma unidade declarativa. Suponha que π é uma unidade declarativa da forma $\alpha : \lambda$. O contrapositivo do enunciado da proposição está provado. Assuma que $\mathcal{C} + [\neg\alpha : \lambda]$ não é consistente. Então $\mathcal{C} + [\neg\alpha : \lambda] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda'$, para algum termo raso λ' de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Seja $\mathcal{C}' = \mathcal{C} + [\neg\neg\alpha : \lambda]$ e $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}' + [\alpha : \lambda]$. O par de configurações $\mathcal{C}/\mathcal{C}' \in \mathcal{I}_{-I}$, e o par de configurações $\mathcal{C}'/\mathcal{C}^* \in \mathcal{I}_{-E}$. Então $\langle \{\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}^*\}, m \rangle$ é uma prova, onde $m(0) = \mathcal{I}_{-I}$ e $m(1) = \mathcal{I}_{-E}$. Como $\alpha : \lambda \in \mathcal{C}^*$, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \alpha : \lambda$.
2. π é um R -literal. Suponha que π é um R -literal Δ . O contrapositivo do enunciado da proposição está provado. Assuma que $\mathcal{C} + [\neg\Delta]$ não é consistente. $\mathcal{C} + [\neg\Delta] \vdash_{MLDS} \perp : \lambda'$, para algum termo raso λ' de $Func(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, e o par de configurações $\mathcal{C}/\mathcal{C} + [\Delta] \in \mathcal{I}_{R-I}$. Então $\langle \{\mathcal{C}, \mathcal{C} + [\Delta]\}, m \rangle$ é uma prova, onde $m(0) = \mathcal{I}_{R-I}$. Portanto, $\mathcal{C} \vdash_{MLDS} \Delta$.

O teorema da completude dado no início desta seção pode ser provado agora.

Prova da completude (Teorema 2.4)

A prova é por contrapositivo. Assuma que $\mathcal{C} \not\models_{MLDS} \mathcal{C}'$. Então, pelo Teorema 2.2, existe um $\pi \in \mathcal{C}' - \mathcal{C}$, onde π é uma unidade declarativa ou um R -literal, tal que $\mathcal{C} \not\models_{MLDS} \pi$. Então, pela Proposição 2.33, $\mathcal{C} + [\neg\pi]$ é uma configuração consistente. Pelo Corolário 2.2, $\mathcal{M}_m = \mathcal{M}(MCC(\mathcal{C} + [\neg\pi]))$ satisfaz a configuração $\mathcal{C} + [\neg\pi]$. Então, pela Definição 1.37, $\mathcal{M}_m \models_{MLDS} \mathcal{C}$, e $\mathcal{M}_m \models_{MLDS} \neg\pi$. Há dois casos a considerar:

1. π é um R -literal. Pela Definição 1.36, $\mathcal{M}_m \Vdash_{FOL} \neg\pi$. Então, pela condição de satisfatibilidade da lógica de primeira ordem, $\mathcal{M}_m \not\models_{FOL} \pi$. Então, pela Definição 1.34 e pela Definição 1.37, $\mathcal{A}^+ \cup FOT(C) \not\models_{FOL} \pi$. Portanto, pela Definição 1.38, $C \not\models_{MLDS} C'$.
2. π é uma unidade declarativa da forma $\alpha : \lambda$. Pela Definição 1.35, $\mathcal{M}_m \models_{FOL} FOT(\neg\pi)$, onde $FOT(\neg\pi) = [\neg\alpha]^*(\lambda)$. Então $\mathcal{M}_m \models_{FOL} [\neg\alpha]^*(\lambda)$. Então, pelo Teorema 2.5, $\mathcal{M}_m \models_{FOL} \neg[\alpha]^*(\lambda)$. Então $\mathcal{M}_m \not\models_{FOL} [\alpha]^*(\lambda)$, o que significa que $\mathcal{A}^+, FOT(C) \not\models_{FOL} \pi$. Portanto, $C \not\models_{MLDS} C'$.

2.3 Correspondência

Foi declarado anteriormente que um MLDS proposicional é uma generalização da lógica modal proposicional, no que facilita o raciocínio sobre estruturas de mundos reais, que podem ou podem não ser pontos únicos. Essa declaração é substantiada nesta seção, demonstrando-se

1. que existe uma correspondência entre um MLDS e qualquer sistema de prova correto e completo para lógica modal tradicional, sempre que certas restrições forem impostas sobre as configurações iniciais; e
2. que a correspondência falha claramente se nenhuma restrição é imposta.

Até onde o primeiro resultado refere-se, a restrição consiste em identificar um símbolo constante particular em \mathcal{L}_L , digamos, ω_0 , e permitir configurações iniciais somente da forma $\mathcal{C}_i = \langle \{\}, \mathcal{F}_i \rangle$ (isto é, nenhum R -literal pertencente a \mathcal{C}_i) onde, para qualquer termo raso $\lambda \in Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_L)$, $\lambda \neq \omega_0$, $\mathcal{F}_i(\lambda) = \emptyset$. Com essa restrição, as únicas suposições iniciais (se existirem) são fórmulas modais associadas com o rótulo ω_0 . Isso corresponde à noção tradicional de suposições locais em lógica modal. Em particular, os dois teoremas seguintes mostram que qualquer unidade declarativa da forma $\alpha : \omega_0$ pode ser derivada a partir de uma configuração inicial (vazia) da forma \mathcal{C}_i se e somente se sua fórmula α é derivável, dentro do sistema axiomático correto e completo para lógica modal, a partir do conjunto (vazio) de fórmulas modais que aparecem em \mathcal{C}_i .

Lema 2.4 (*Correspondência simples para lógica modal K*) *Seja K -MLDS o sistema dedutivo rotulado modal proposicional cuja álgebra de rotulação associada $\mathcal{A}_K = \{\}$, e seja $\langle \mathbf{K}_{Ax}, \vdash_{K_{Ax}} \rangle$ o sistema axiomático para lógica modal \mathbf{K} . Seja $\mathcal{C}_\emptyset = \langle \{\}, \mathcal{F}_\emptyset \rangle$, onde, para qualquer termo raso $\lambda \in Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $\mathcal{F}_\emptyset(\lambda) = \emptyset$. Seja α uma fórmula de \mathcal{L}_M . Então: $\vdash_{K_{Ax}} \alpha$ sse, para todos os termos rasos $\lambda \in Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K-MLDS} \alpha : \lambda$.*

Prova: (Metade "se"): A prova é por demonstração de que o enunciado contrapositivo é válido — isto é, dada uma fórmula $\alpha \in \mathcal{L}_M$, se $\not\vdash_{K_{Ax}} \alpha$, então existe um termo raso $\lambda \in Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ tal que $\mathcal{C}_\emptyset \not\vdash_{K-MLDS} \alpha : \lambda$. As duas relações de derivabilidade $\vdash_{K_{Ax}}$ e \vdash_{K-MLDS} são ambas corretas e completas com respeito a sua semântica ($\vdash_{K_{Ax}}$ é completa com respeito à semântica de Kripke, e \vdash_{K-MLDS} é completa com respeito à semântica definida no capítulo anterior). Por isso, é suficiente provar que, se $\not\vdash_K \alpha$, então existe um termo raso $\lambda \in Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ tal que $\mathcal{C}_\emptyset \not\vdash_{K-MLDS} \alpha : \lambda$. Suponha que $\not\vdash_K \alpha$. Como \mathcal{C}_\emptyset é uma configuração vazia, é suficiente mostrar que existe uma estrutura semântica de K -MLDS (isto é, um modelo de \mathcal{A}^+) que satisfaz a unidade declarativa $\neg\alpha : \lambda$. Por hipótese e pela definição semântica de validade de Kripke, existe um modelo de Kripke que satisfaz

a fórmula $\neg\alpha$ (isto é, um contramodelo da fórmula α). Seja $\mathbf{M} = \langle \widehat{W}\widehat{R}, \mathbf{v} \rangle$ um modelo assim. Portanto, existe algum mundo possível $\omega \in \widehat{W}$ tal que $\mathbf{M}, \omega \models_K \neg\alpha$. Assuma uma ordenação canônica sobre o conjunto \widehat{W} (A existência de tal relação de boa ordenação é garantida pelo *Teorema da Boa Ordenação de Zermelo*.) Seja $Sat = \{\omega_i | \omega_i \in \widehat{W} \text{ e } \mathbf{M}, \omega_i \models_K \neg\alpha\}$ e seja ω' o primeiro elemento de Sat de acordo com a relação de boa ordenação canônica de \widehat{W} . (A existência desse primeiro elemento é garantida pelo fato de que Sat é um subconjunto não-vazio do conjunto bem ordenado \widehat{W} .) Então $\mathbf{M}, \omega' \models_K \neg\alpha$. Seja I uma função de interpretação sobre a linguagem $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, cujo universo de discurso é \widehat{W} , definido como segue.

- Para cada símbolo de constante ω_i , $\|\omega_i\|_I = \omega'_i$.
- Para o símbolo de função $succ$, $\|succ\|_I = \widehat{succ} : \widehat{W} \rightarrow \widehat{W}$ tal que, para cada $\omega \in \widehat{W}$, se $Acc(\omega) = \{\tilde{\omega} | \tilde{\omega} \in \widehat{W} \text{ e } \omega \widehat{R} \tilde{\omega}\}$ é vazio, então $succ(\omega) = \omega$, caso contrário $succ(\omega) = \bar{\omega}$, onde $\bar{\omega}$ é o primeiro elemento de $Acc(\omega)$ com respeito à boa ordenação canônica \widehat{W} assumida.
- Para cada símbolo de função da forma $\{\beta, \|f_\beta\|_I = \widehat{f}_\beta : \widehat{W} \rightarrow \widehat{W}$ tal que, para cada $\omega \in \widehat{W}$
 - Se $Sat_\beta(\omega) = \{\tilde{\omega} | \tilde{\omega} \in \widehat{W}, \omega \widehat{R} \tilde{\omega} \text{ e } \mathbf{M}, \tilde{\omega} \models_K \beta\}$ é um conjunto não-vazio, então $\widehat{f}_\beta(\omega) = \bar{\omega}$ onde $\bar{\omega}$ é o primeiro elemento de $Sat_\beta(\omega)$ com respeito à boa ordenação canônica de \widehat{W} .
 - Caso contrário, $\widehat{f}_\beta(\omega) = w_0$, onde w_0 é o primeiro elemento de \widehat{W} de acordo com a sua boa ordenação canônica assumida.
- Para cada símbolo de função box_β , $\|box_\beta\|_I = \widehat{box}_\beta : \widehat{W} \rightarrow \widehat{W}$ tal que, para cada $\omega \in \widehat{W}$
 - Se para todo $\tilde{\omega} \in \widehat{W}$, não $\omega \widehat{R} \tilde{\omega}$, então $\widehat{box}_\beta(\omega) = \omega$
 - Se, para cada $\omega_i \in Acc(\omega) = \{\tilde{\omega} | \tilde{\omega} \in \widehat{W} \text{ e } \omega \widehat{R} \tilde{\omega}\}$, $\mathbf{M}, \omega_i \models_K \beta$, então $\widehat{box}_\beta(\omega) = \bar{\omega}'$, onde $\bar{\omega}'$ é o primeiro elemento de $Acc(\omega)$ com respeito à boa ordenação canônica de \widehat{W} assumida.
 - Caso contrário, $\widehat{box}_\beta(\omega) = \bar{\omega}''$, onde $\bar{\omega}''$ é o primeiro elemento do conjunto não-vazio $Sat_{\neg\beta} = \{\tilde{\omega} | \tilde{\omega} \in \widehat{W}, \omega \widehat{R} \tilde{\omega}\}$ de acordo com a boa ordenação canônica de \widehat{W} .
- Para cada predicado monádico $[\beta]^*$, $\|[\beta]^*\|_I = \{\omega | \omega \in \widehat{W} \text{ e } \mathbf{M}, m \models_K \beta\}$
- Para o predicado binário R , $\|R\|_I = \widehat{R}$

Agora, mostramos que $\langle \widehat{W}, I \rangle$ é uma estrutura semântica de MLDS. Pela Definição 1.34, isso exige provar que $\langle \widehat{W}, I \rangle$ é um modelo clássico da álgebra estendida \mathcal{A}^+ . Observe que, em um K -MLDS, a álgebra de rotulação $\mathcal{A} = \{\}$. Portanto, a álgebra estendida \mathcal{A}^+ é dada somente pelo conjunto de esquemas de axiomas (Ax1) – (Ax8). A prova é através de casos sobre cada um dos esquemas de axiomas (Ax1) – (Ax8). Sejam β, γ duas *wffs* de \mathcal{L}_M .

CASO 1: (Ax1) $\forall x([\beta \wedge \gamma]^*(x) \equiv ([\beta]^*(x) \wedge [\gamma]^*(x)))$

Seja $\omega \in \widehat{W}$ um elemento arbitrário. É suficiente provar que $\omega \in \|[\beta \wedge \gamma]^*\|_I$ se e somente se $\omega \in \|[\beta]^*\|_I$ e $\omega \in \|[\gamma]^*\|_I$. Isso segue diretamente da definição de $\|[\beta \wedge \gamma]^*\|_I$ e da definição de satisfatibilidade semântica para fórmulas \wedge .

Os argumentos para os casos 2, 3 e 4 ((Ax2), (Ax3) e (Ax4)) são análogos aos do CASO 1 acima.

CASO 5: (Ax5) $\forall x([\diamond\beta]^*(x) \rightarrow (R(x, f_\beta(x)) \wedge [\beta]^*(f_\beta(x))))$.

Seja $\omega \in \widehat{W}$ um elemento arbitrário. É suficiente provar que, se $\omega \in \|\|\diamond\beta\|^*_I$, então $\langle \omega, \hat{f}_\beta(\omega) \rangle \in \|\|R\|_I$ e $\hat{f}_\beta(\omega) \in \|\|[\beta]^*\|_I$. Assuma que $\omega \in \|\|\diamond\beta\|^*_I$. Pela definição de $I, \mathbf{M}, \omega \Vdash_K \diamond\beta$. Então, pela definição de satisfatibilidade semântica de Kripke, existe algum mundo possível $\tilde{\omega} \in \widehat{W}$ tal que $\omega \hat{R} \tilde{\omega}$ e $\mathbf{M}, \tilde{\omega} \Vdash_K \beta$. Portanto, pela definição de I , o conjunto $Sat_\beta(\omega) \neq \emptyset$ e $\hat{f}_\beta(\omega) = \bar{\omega}$, onde $\bar{\omega}$ é o primeiro elemento de $Sat_\beta(\omega)$ de acordo com a boa ordenação canônica de \widehat{W} .

Então ω

CASO 6: (Ax6) $\forall x(\exists y(R(x, y) \wedge [\beta]^*(y)) \rightarrow [\diamond\beta]^*(x))$.

Considere a fórmula equivalente $\forall x\forall y((R(x, y) \wedge [\beta]^*(y)) \rightarrow [\diamond\beta]^*(x))$.

Sejam ω, ω' dois elementos arbitrários de \widehat{W} . É suficiente provar que, se a tupla $\langle \omega, \omega' \rangle \in \|\|R\|_I$ e $\omega' \in \|\|[\beta]^*\|_I$, então $\omega \in \|\|\diamond\beta\|^*_I$. Assuma que $\langle \omega, \omega' \rangle \in \|\|R\|_I$ e $\omega' \in \|\|[\beta]^*\|_I$. Pela definição de $I, \omega \hat{R} \omega'$ e $\mathbf{M}, \omega' \Vdash_K \beta$. Então, pela definição semântica de Kripke da satisfatibilidade do operador \diamond , $\mathbf{M}, \omega \Vdash_K \diamond\beta$. Portanto, pela definição de $I, \omega \in \|\|\diamond\beta\|^*_I$.

CASO 7: (Ax7) $\forall x((R(x, box_\beta(x)) \rightarrow [\beta]^*(box_\beta(x))) \rightarrow [\square\beta]^*(x))$.

Seja ω um elemento arbitrário de \widehat{W} . Então, é suficiente provar que, se $\langle \omega, \widehat{box}_\beta(\omega) \rangle \notin \|\|R\|_I$ ou $\widehat{box}_\beta(\omega) \in \|\|[\beta]^*\|_I$, então $\omega \in \|\|[\square\beta]^*\|_I$. Suponha primeiro que a tupla $\langle \omega, \widehat{box}_\beta(\omega) \rangle \notin \|\|\hat{R}\|_I$. Isso implica, pela definição de $\|\|box_\beta\|_I$, que, para todos os $\omega' \in \widehat{W}$, não vale $\omega \hat{R} \omega'$. Então, pela definição semântica de Kripke da satisfatibilidade do operador \square , $\mathbf{M}, \omega \Vdash_K \square\beta$. Portanto, pela definição de $I, \omega \in \|\|[\square\beta]^*\|_I$. Suponha agora que $\widehat{box}_\beta(\omega) \in \|\|[\beta]^*\|_I$. Então, pela definição de $\|\|box_\beta\|_I$, existem dois subcasos a considerar:

1. Para todos os $\omega' \in \widehat{W}$, não vale $\omega \hat{R} \omega'$. Então, pela definição semântica de Kripke da satisfatibilidade do operador \square , $\mathbf{M}, \omega \Vdash_K \square\beta$. Portanto, pela definição de $I, \omega \in \|\|[\square\beta]^*\|_I$.
2. Para todos os $\omega' \in \widehat{W}$ tal que $\omega \hat{R} \omega'$, $\mathbf{M}, \omega' \Vdash_K \beta$. Então, novamente pela definição semântica de Kripke da satisfatibilidade do operador \square , $\mathbf{M}, \omega \Vdash_K \square\beta$. Portanto, pela definição de $I, \omega \in \|\|[\square\beta]^*\|_I$.

CASO 8: (Ax8) $\forall x([\square\beta]^*(x) \rightarrow (\forall y(R(x, y) \rightarrow [\beta]^*(y))))$.

Considere a fórmula equivalente $\forall x\forall y(([\square\beta]^*(x) \wedge R(x, y)) \rightarrow [\beta]^*(y))$.

Sejam ω, ω' dois elementos arbitrários de \widehat{W} tais que $\omega \in \|\|[\square\beta]^*\|_I$ e $\langle \omega, \omega' \rangle \in \|\|R\|_I$. Então, pela definição de $I, \mathbf{M}, \omega \Vdash_K \square\beta$ e $\omega \hat{R} \omega'$. Pela definição semântica de Kripke de satisfatibilidade do operador \square , $\mathbf{M}, \omega' \Vdash_K \beta$. Portanto, pela definição de $I, \omega' \in \|\|[\beta]^*\|_I$.

Portanto, a tupla $\langle \widehat{W}, I \rangle$ é um modelo de \mathcal{A}^+ . Portanto, como, por hipótese, $\mathbf{M}, \omega' \Vdash_K \neg\alpha$ e, pela definição de $I, \|\|\omega_i\|_I = \omega'$, onde ω_i são símbolos de constantes da linguagem $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, existe um termo raso $\lambda, \lambda = \omega_i$, para algum $i \geq 0$ tal que $\langle \widehat{W}, I \rangle \models_{FOL} [\neg\alpha]^*(\lambda)$. Portanto, pela definição de $\models_{K-MLDS}, \mathcal{C}_\emptyset \not\models_{K-MLDS} \alpha : \lambda$.

(Fim do "se")

(Metade "somente se": isto é, se $\vdash_{K_{Ax}} \alpha$ então $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K-MLDS} \alpha : \lambda$.) Suponha que $\vdash_{K_{Ax}} \alpha$ e que $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, onde $m \geq 1$ e $\alpha_m = \alpha$, é a menor derivação de α com tamanho (isto é, número de passos) $l \geq 1^{10}$. A prova de que $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K-MLDS} \alpha : \lambda$ é por indução sobre l .

CASO BASE: O caso base é quando $l = 1$. Então α é uma instanciação de um dos esquemas de axiomas de K_{Ax} . Mostramos que $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K-MLDS} \alpha : \lambda$ através de casos, considerando-se um esquema de axiomas de K_{Ax} de cada vez.

CASO 1: [A1] Seja λ um termo raso arbitrário de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e seja $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_\emptyset$. Então $\mathcal{C}_0 \vdash_{K-MLDS} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) : \lambda$ como mostrado na seguinte derivação:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle \rangle}{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\alpha : \lambda] \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
 \frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\alpha : \lambda], [\beta : \lambda] \rangle}{\mathcal{C}_1 \quad \langle [\beta : \lambda], \alpha : \lambda \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
 \frac{\mathcal{C}_1 \quad \langle [\beta : \lambda], \alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}_2 \quad \langle [\alpha : \lambda], \beta \rightarrow \alpha : \lambda \rangle} \quad (\mathcal{C} - R) \\
 \frac{\mathcal{C}_2 \quad \langle [\alpha : \lambda], \beta \rightarrow \alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}' \quad \langle \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) : \lambda \rangle} \quad (\rightarrow I) \\
 \frac{\mathcal{C}' \quad \langle \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) : \lambda \rangle}{\mathcal{C}' \quad \langle \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) : \lambda \rangle} \quad (\rightarrow I)
 \end{array}$$

É claro que os outros axiomas (CASOS 2, 3 e 4: [A2],[A3] e [A4]) concernentes ao conetivo \rightarrow podem ser provados dentro do K -MLDS, por uma seqüência de regras ($\rightarrow I$) e ($\rightarrow E$). Os grupos de axiomas [A5] e [A6] (CASOS 5 e 6) e [A8] e [A9] (CASOS 8 e 9) podem ser derivados em K -MLDS, usando as regras ($\wedge E$) e ($\vee I$), respectivamente. Analogamente, os axiomas [A7] (CASO 7) e [A10] (CASO 10) podem ser provados em K -MLDS, usando, respectivamente, as regras ($\wedge I$) e ($\vee E$). Finalmente, o axioma [A11] (CASO 11) pode ser derivado em K -MLDS, usando a regra ($\neg I$), e o axioma [A12] (CASO 12), usando a regra ($\neg E$).

CASO 13: [A13] Seja λ um termo raso arbitrário de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e seja $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_\emptyset$. Então, $\mathcal{C}_0 \vdash_{K-MLDS} \Box \alpha \rightarrow \neg \Diamond \neg \alpha : \lambda$, como mostrado na seguinte derivação:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle \rangle}{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\Box \alpha : \lambda] \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
 \frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\Box \alpha : \lambda], [\Diamond \neg \alpha : \lambda] \rangle}{\mathcal{C}_1 \quad \langle [R(\lambda, f_\alpha(\lambda)), \neg \alpha : f_\alpha(\lambda)] \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
 \frac{\mathcal{C}_1 \quad \langle [R(\lambda, f_\alpha(\lambda)), \neg \alpha : f_\alpha(\lambda)] \rangle}{\mathcal{C}_2 \quad \langle \neg \alpha : f_\alpha(\lambda), \alpha : f_\alpha(\lambda) \rangle} \quad (\Diamond E) \\
 \frac{\mathcal{C}_2 \quad \langle \neg \alpha : f_\alpha(\lambda), \alpha : f_\alpha(\lambda) \rangle}{\mathcal{C}_3 \quad \langle \perp : f_\alpha(\lambda) \rangle} \quad (\Box E) \\
 \frac{\mathcal{C}_3 \quad \langle \perp : f_\alpha(\lambda) \rangle}{\mathcal{C}_4 \quad \langle [\Box \alpha : \lambda], \neg \Diamond \neg \alpha : \lambda \rangle} \quad (\wedge I) \\
 \frac{\mathcal{C}_4 \quad \langle [\Box \alpha : \lambda], \neg \Diamond \neg \alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}' \quad \langle \Box \alpha \rightarrow \neg \Diamond \neg \alpha : \lambda \rangle} \quad (\neg I) \\
 \frac{\mathcal{C}' \quad \langle \Box \alpha \rightarrow \neg \Diamond \neg \alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}' \quad \langle \Box \alpha \rightarrow \neg \Diamond \neg \alpha : \lambda \rangle} \quad (\rightarrow I)
 \end{array}$$

CASO 14: [A14] Seja λ um termo raso arbitrário de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e seja $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_\emptyset$. Então $\mathcal{C}_0 \vdash_{K-MLDS} \neg \Diamond \neg \alpha \rightarrow \Box \alpha : \lambda$, como mostrado na seguinte derivação:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle \rangle}{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\neg \Diamond \neg \alpha : \lambda] \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
 \frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\neg \Diamond \neg \alpha : \lambda], [R(\lambda, box_\alpha(\lambda))] \rangle}{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\neg \Diamond \neg \alpha : \lambda], [\neg \alpha : box_\alpha(\lambda)] \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
 \frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\neg \Diamond \neg \alpha : \lambda], [\neg \alpha : box_\alpha(\lambda)] \rangle}{\mathcal{C}_1 \quad \langle [\neg \Diamond \neg \alpha : \lambda], \Diamond \neg \alpha : \lambda \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
 \frac{\mathcal{C}_1 \quad \langle [\neg \Diamond \neg \alpha : \lambda], \Diamond \neg \alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}_2 \quad \langle \perp : \lambda \rangle} \quad (\Diamond I) \\
 \frac{\mathcal{C}_2 \quad \langle \perp : \lambda \rangle}{\mathcal{C}_3 \quad \langle box_\alpha(\lambda) \neg \neg \alpha \rangle} \quad (\wedge I) \\
 \frac{\mathcal{C}_3 \quad \langle box_\alpha(\lambda) \neg \neg \alpha \rangle}{\mathcal{C}_4 \quad \langle box_\alpha(\lambda) \alpha \rangle} \quad (\neg I) \\
 \frac{\mathcal{C}_4 \quad \langle box_\alpha(\lambda) \alpha \rangle}{\mathcal{C}_5 \quad \langle \Box \alpha : \lambda \rangle} \quad (\neg E) \\
 \frac{\mathcal{C}_5 \quad \langle \Box \alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}' \quad \langle \neg \Diamond \neg \alpha \rightarrow \Box \alpha : \lambda \rangle} \quad (\Box I) \\
 \frac{\mathcal{C}' \quad \langle \neg \Diamond \neg \alpha \rightarrow \Box \alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}' \quad \langle \neg \Diamond \neg \alpha \rightarrow \Box \alpha : \lambda \rangle} \quad (\rightarrow I)
 \end{array}$$

CASO 15: [K] Seja λ um termo raso arbitrário de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e seja $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_\emptyset$. Então $\mathcal{C}_0 \vdash_{K-MLDS} \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta) : \lambda$, como mostrado na seguinte derivação:

$$\begin{array}{c}
\frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle \rangle}{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\Box(\alpha \rightarrow \beta) : \lambda] \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
\frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\Box(\alpha \rightarrow \beta) : \lambda], [\Box\alpha : \lambda] \rangle}{\mathcal{C}_0 \langle [R(\lambda, \Box_\alpha(\lambda))] \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
\frac{\mathcal{C}_0 \langle [R(\lambda, \Box_\alpha(\lambda))] \rangle}{\mathcal{C}_1 \langle \alpha \rightarrow \beta : box_\alpha(\lambda) \rangle} \quad (\Box E) \\
\frac{\mathcal{C}_1 \langle \alpha \rightarrow \beta : box_\alpha(\lambda) \rangle}{\mathcal{C}_2 \langle \alpha \rightarrow \beta : box_\alpha(\lambda), \alpha : box_\alpha(\lambda) \rangle} \quad (\Box E) \\
\frac{\mathcal{C}_2 \langle \alpha \rightarrow \beta : box_\alpha(\lambda), \alpha : box_\alpha(\lambda) \rangle}{\mathcal{C}_3 \langle \beta : box_\alpha(\lambda) \rangle} \quad (\rightarrow E) \\
\frac{\mathcal{C}_3 \langle \beta : box_\alpha(\lambda) \rangle}{\mathcal{C}_4 \langle [\Box\alpha : \lambda], \Box\beta : \lambda \rangle} \quad (\Box I) \\
\frac{\mathcal{C}_4 \langle [\Box\alpha : \lambda], \Box\beta : \lambda \rangle}{\mathcal{C}_5 \langle [\Box(\alpha \rightarrow \beta) : \lambda], \Box\alpha \rightarrow \Box\beta : \lambda \rangle} \quad (\rightarrow I) \\
\frac{\mathcal{C}_5 \langle [\Box(\alpha \rightarrow \beta) : \lambda], \Box\alpha \rightarrow \Box\beta : \lambda \rangle}{\mathcal{C}' \langle \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta) : \lambda \rangle} \quad (\rightarrow I)
\end{array}$$

PASSO DE INDUÇÃO:

Assuma, por hipótese de indução, que, para qualquer fórmula α' tal que $\vdash_{K_{Ax}} \alpha'$ e tal que exista uma prova $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$, onde $\alpha'_n = \alpha'$, com $n > 0$, então para qualquer termo raso $\lambda' \in Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K-MLDS} \alpha' : \lambda'$.

Suponha agora que $\vdash_{K_{Ax}} \alpha$, com uma prova de tamanho mínimo $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, onde $\alpha_{n+1} = \alpha$, com $n > 0$. Pelo Teorema 2.2, pelo Teorema 2.3 e pela hipótese de indução, para qualquer rótulo arbitrário λ' , existe uma configuração $\mathcal{C}_{\lambda'}$ tal que $\alpha_i : \lambda' \in \mathcal{C}_{\lambda'}$ para todo $1 \leq i \leq n$ e tal que $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K-MLDS} \mathcal{C}_{\lambda'}$. Como $n + 1 > 1$, $\alpha (= \alpha_{n+1})$ não é uma instanciação de um esquema de axiomas de K_{Ax} . Portanto, há dois casos a considerar: (1) α é derivada por uma aplicação da regra [MP], ou (2) α é derivada por uma aplicação da regra [Nec].

CASO 1: [MP] Suponha que o último passo é dado pela aplicação da regra [MP]. Então existem duas fórmulas da forma α_k e $\alpha_k \rightarrow \alpha$ na seqüência $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Portanto, $\alpha_k : \lambda \in \mathcal{C}_\lambda$ e $\alpha_k \rightarrow \alpha : \lambda \in \mathcal{C}_\lambda$. Portanto, pela definição da regra $\mathcal{I}_{\rightarrow E}$ do MLDS, $\mathcal{C}_\lambda \vdash_{K-MLDS} \alpha : \lambda$. Portanto, pela transitividade de \vdash_{K-MLDS} , $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K-MLDS} \alpha : \lambda$.

CASO 2: [Nec] Suponha que o último passo é dado pela aplicação da regra [Nec]. Então α é da forma $\Box\alpha_k$, onde α_k é uma fórmula da seqüência $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Portanto, $\alpha_k : box_{\alpha_k}(\lambda) \in \mathcal{C}_{box_{\alpha_k}(\lambda)}$ e $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K-MLDS} \mathcal{C}_{box_{\alpha_k}(\lambda)}$. Pela reflexividade, $\mathcal{C}_{box_{\alpha_k}(\lambda)} \vdash_{K-MLDS} \alpha_k : box_{\alpha_k}(\lambda)$ e portanto, por transitividade, $\mathcal{C}_{box_{\alpha_k}(\lambda)} + [R(\lambda, box_{\alpha_k}(\lambda))] \vdash_{K-MLDS} \alpha_k : box_{\alpha_k}(\lambda)$, o que implica, pela definição de $\mathcal{I}_{\Box I}$, que $\mathcal{C}_{box_{\alpha_k}(\lambda)} \vdash_{K-MLDS} \Box\alpha_k : \lambda$. Portanto, pela transtividade de \vdash_{K-MLDS} , $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K-MLDS} \Box\alpha_k : \lambda$.

O seguinte teorema generaliza o resultado acima para cada uma das lógicas modais axiomáticas mencionadas no capítulo 1.

Teorema 2.6 (Correspondência simples para lógica modal $K\partial$) *Seja $\partial \subseteq \{\mathbf{T}, \mathbf{4}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{5}\}$, seja $\langle K\partial_{Ax}, \vdash_{K\partial_{Ax}} \rangle$ o sistema axiomático correspondente, seja δ o subconjunto de $\{\mathbf{(T)}, \mathbf{(4)}, \mathbf{(D)}, \mathbf{(B)}, \mathbf{(5)}\}$ correspondente, e seja $K\delta\text{-MLDS}$ o MLDS proposicional cuja álgebra de rotulação é $\mathcal{A}_{K\delta}$. Seja $\mathcal{C}_\emptyset = \langle \{\}, \mathcal{F}_\emptyset \rangle$, onde $\mathcal{F}_\emptyset(\lambda) = \{\}$ para qualquer termo raso $\lambda \in Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Seja α uma fórmula de \mathcal{L}_M .*

Então $\vdash_{K\partial_{Ax}} \alpha$ se e somente se, para todos os termos rasos $\lambda \in Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K\partial\text{-MLDS}} \alpha : \lambda$.

Prova: (Metade "se":) A prova é idêntica à prova da metade "se" do Lema 2.4, aumentada com os seguintes argumentos adicionais para mostrar que $\langle \widehat{W}, I \rangle$ também é um modelo de $\mathcal{A}_{K\delta}$.

- Se $\mathbf{T} \in \partial$, então, pela Teoria da Correspondência (Veja [GAB2000] para referências), \widehat{R} é reflexiva, isto é, $\langle \widehat{W}, I \rangle$ é um modelo de (\mathbf{T}) .
- Se $\mathbf{4} \in \partial$, então, pela Teoria da Correspondência, \widehat{R} é transitiva, isto é, $\langle \widehat{W}, I \rangle$ é um modelo de $(\mathbf{4})$.
- Se $\mathbf{D} \in \partial$, então, pela Teoria da Correspondência, \widehat{R} tem a propriedade de serialidade, isto é, $\langle \widehat{W}, I \rangle$ é um modelo de (\mathbf{D}) .
- Se $\mathbf{B} \in \partial$, então, pela Teoria da Correspondência, \widehat{R} é simétrica, isto é, $\langle \widehat{W}, I \rangle$ é um modelo de (\mathbf{B}) .
- Se $\mathbf{5} \in \partial$, então, pela Teoria da Correspondência, \widehat{R} tem a propriedade euclideana, isto é, $\langle \widehat{W}, I \rangle$ é um modelo de $(\mathbf{5})$.

(Metade "somente se":) A prova é idêntica à prova da metade "somente se" do Lema 2.4, com o caso base aumentado com os seguintes casos opcionais adicionais:

CASO 16: Se $\mathbf{T} \in \partial$, então $(\mathbf{T}) \in \delta$. Portanto, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K\delta-MLDS} \Box\alpha \rightarrow \alpha : \lambda$, como mostrado na seguinte derivação:

$$\frac{\mathcal{C}_0 \langle \rangle}{\frac{\mathcal{C}_0 \langle [\Box\alpha : \lambda] \rangle}{\frac{\mathcal{C}_1 \langle \Box\alpha : \lambda, R(\lambda, \lambda) \rangle}{\mathcal{C}_2 \langle \alpha : \lambda \rangle}} \text{ (suposição)} \quad \text{(R-A)} \quad \text{(\Box E)}$$

$$\frac{}{C' \langle \Box\alpha \rightarrow \alpha : \lambda \rangle} \text{ (\rightarrow I)}$$

CASO 17: Se $\mathbf{4} \in \partial$, então $(\mathbf{4}) \in \delta$. Portanto, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K\delta-MLDS} \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha : \lambda$, como mostrado na seguinte derivação:

$$\frac{\mathcal{C}_0 \langle \rangle}{\frac{\mathcal{C}_0 \langle [\Box\alpha : \lambda] \rangle}{\frac{\mathcal{C}_0 \langle [R(\lambda, \text{box}_{\Box\alpha}(\lambda))] \rangle}{\frac{\mathcal{C}_0 \langle [R(\text{box}_{\Box\alpha}(\lambda), \text{box}_{\Box\alpha}(\text{box}_{\Box\alpha}(\lambda)))] \rangle}{\mathcal{C}_1 \langle R(\lambda, \text{box}_{\Box\alpha}(\text{box}_{\Box\alpha}(\lambda))) \rangle}} \text{ (suposição)} \quad \text{(suposição)} \quad \text{(suposição)} \quad \text{(R-A)}$$

$$\frac{\mathcal{C}_2 \langle \alpha : \text{box}_{\Box\alpha}(\text{box}_{\Box\alpha}(\lambda)) \rangle}{\mathcal{C}_3 \langle \Box\alpha : \text{box}_{\Box\alpha}(\lambda) \rangle} \text{ (\Box E)} \quad \text{(\Box I)}$$

$$\frac{\mathcal{C}_4 \langle \Box\Box\alpha : \lambda \rangle}{C' \langle \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha : \lambda \rangle} \text{ (\Box I)} \quad \text{(\rightarrow I)}$$

CASO 18: Se $\mathbf{D} \in \partial$, então $(\mathbf{D}) \in \delta$. Portanto, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K\delta-MLDS} \Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha : \lambda$, como mostrado na seguinte derivação:

$$\frac{\mathcal{C}_0 \langle \rangle}{\frac{\mathcal{C}_0 \langle [\Box\alpha : \lambda] \rangle}{\frac{\mathcal{C}_1 \langle \Box\alpha : \lambda, R(\lambda, \text{succ}(\lambda)) \rangle}{\mathcal{C}_2 \langle \alpha : \text{succ}(\lambda) \rangle}} \text{ (suposição)} \quad \text{(R-A)} \quad \text{(\Box E)}$$

$$\frac{\mathcal{C}_3 \langle \Diamond\alpha : \lambda \rangle}{C' \langle \Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha : \lambda \rangle} \text{ (\Diamond E)} \quad \text{(\rightarrow I)}$$

CASO 19: Se $\mathfrak{5} \in \partial$, então $(\mathfrak{5}) \in \delta$. Portanto, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K\delta\text{-MLDS}} \diamond\alpha \rightarrow \Box\diamond\alpha : \lambda$, como mostrado na seguinte derivação:

$$\begin{array}{c}
\frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle \rangle}{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\diamond\alpha : \lambda] \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
\frac{\mathcal{C}_1 \quad \langle R(\lambda, f_\alpha(\lambda)), \alpha : f_\alpha(\lambda) \rangle}{\mathcal{C}_1 \quad \langle [R(\lambda, \text{box}_{\diamond\alpha}(\lambda))] \rangle} \quad (\diamond E) \\
\frac{\mathcal{C}_2 \quad \langle R(\text{box}_{\diamond\alpha}(\lambda), f_\alpha(\lambda)) \rangle}{\mathcal{C}_2 \quad \langle \diamond\alpha : \text{box}_{\diamond\alpha}(\lambda) \rangle} \quad (\text{R-A}) \\
\frac{\mathcal{C}_3 \quad \langle \diamond\alpha : \text{box}_{\diamond\alpha}(\lambda) \rangle}{\mathcal{C}_3 \quad \langle \Box\diamond\alpha : W_0 \rangle} \quad (\diamond E) \\
\frac{\mathcal{C}_4 \quad \langle \Box\diamond\alpha : W_0 \rangle}{\mathcal{C}_4 \quad \langle \diamond \quad \alpha \rightarrow \Box\diamond\alpha : \lambda \rangle} \quad (\Box I) \\
\frac{\mathcal{C}'_1 \quad \langle \diamond \quad \alpha \rightarrow \Box\diamond\alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}'_1 \quad \langle \diamond \quad \alpha \rightarrow \Box\diamond\alpha : \lambda \rangle} \quad (\rightarrow I)
\end{array}$$

CASO 20: Se $\mathbf{B} \in \partial$, então $(\mathbf{B}) \in \delta$. Portanto, $\mathcal{C}_\emptyset \vdash_{K\delta\text{-MLDS}} \alpha \rightarrow \Box\diamond\alpha : \lambda$, como mostrado na seguinte derivação:

$$\begin{array}{c}
\frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle \rangle}{\mathcal{C}_0 \quad \langle [\alpha : \lambda] \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
\frac{\mathcal{C}_0 \quad \langle [R(\lambda, \text{box}_{\diamond\alpha}(\lambda))] \rangle}{\mathcal{C}_0 \quad \langle [R(\lambda, \text{box}_{\diamond\alpha}(\lambda))] \rangle} \quad (\text{suposição}) \\
\frac{\mathcal{C}_1 \quad \langle R(\text{box}_{\diamond\alpha}(\lambda), \lambda) \rangle}{\mathcal{C}_1 \quad \langle \diamond\alpha : \text{box}_{\diamond\alpha}(\lambda) \rangle} \quad (\text{R-A}) \\
\frac{\mathcal{C}_2 \quad \langle \diamond\alpha : \text{box}_{\diamond\alpha}(\lambda) \rangle}{\mathcal{C}_2 \quad \langle \Box\diamond\alpha : \lambda \rangle} \quad (\diamond I) \\
\frac{\mathcal{C}_3 \quad \langle \Box\diamond\alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}_3 \quad \langle \alpha \rightarrow \Box\diamond\alpha : \lambda \rangle} \quad (\Box I) \\
\frac{\mathcal{C}' \quad \langle \alpha \rightarrow \Box\diamond\alpha : \lambda \rangle}{\mathcal{C}' \quad \langle \alpha \rightarrow \Box\diamond\alpha : \lambda \rangle} \quad (\rightarrow I)
\end{array}$$

O Teorema 2.6 mostra como a definição semântica de Kripke de validade de uma fórmula modal α (isto é, $\models_{K\partial} \alpha$) pode ser reformulada em termos de semântica de MLDS. Para recapitular, dada uma lógica modal $K\partial$ e sua semântica de Kripke, uma fórmula α é válida se e somente se é válida em todos os mundos possíveis de cada modelo de $K\partial$. Dentro de um MLDS, essa noção é equivalente, como demonstrado no Teorema 2.6, à condição que, para qualquer $\lambda \in \text{Mon}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$, a unidade declarativa $\alpha : \lambda$ é satisfeita em todas as estruturas semânticas de MLDS (isto é, em todos os modelos de $\mathcal{A}_{K\delta}^+$).

Em nosso trabalho anterior [MAL2002], a noção de acarretamento semântico de Kripke é definida em termos de suposições globais e locais. O Teorema 2.6 pode facilmente ser generalizado para lidar com suposições tanto globais como locais. Dada uma configuração $\mathcal{C} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$, uma wff α é uma suposição global α se e somente se $\alpha \in \mathcal{F}(\lambda)$ para todo $\lambda \in \text{Mon}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Para representar suposições locais, é necessário identificar um símbolo de constante particular em \mathcal{L}_L , digamos ω_0 , e traduzir cada suposição local β para a unidade declarativa $\beta : \omega_0$. Os dois teoremas seguintes generalizam o Teorema 2.6, o primeiro para derivabilidade de suposições globais, e o segundo, de suposições tanto globais como locais.

Teorema 2.7 (*Correspondência forte restrita para lógica modal $K\partial$*) *Seja $\partial \subseteq \{\mathbf{T}, \mathbf{4}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathfrak{5}\}$, seja $\langle K\partial_{Ax}, \vdash_{K\partial_{Ax}} \rangle$ o sistema axiomático correspondente, seja δ o subconjunto de $\{\mathbf{T}, \mathbf{4}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathfrak{5}\}$ correspondente, e seja $K\delta\text{-MLDS}$ o MLDS proposicional cuja álgebra de rotulação é $\mathcal{A}_{K\delta}$. Seja S um conjunto de wffs de \mathcal{L}_M . Seja $\mathcal{C}_S = \langle \{\}, \mathcal{F}_S \rangle$, onde $\mathcal{F}_S(\lambda) = S$ para qualquer termo raso $\lambda \in \text{Mon}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Seja α uma fórmula de \mathcal{L}_M . Então:*

$$\begin{array}{l}
S \vdash_{K\partial_{Ax}} \{\} \Rightarrow \alpha \text{ se e somente se, para todos os termos rasos } \lambda \in \text{Mon}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M), \\
\mathcal{C}_S \vdash_{K\delta\text{-MLDS}} \alpha : \lambda.
\end{array}$$

Prova: (Metade "se":) Sem perda de generalidade, pode-se assumir que S é consistente. Portanto, a prova é idêntica à metade "se" do Teorema 2.6, mas escolhendo o modelo $M = \langle \widehat{W}, \widehat{R}, \mathbf{v} \rangle$ tal que cada uma das suposições de S sejam válidas em M . Nesse caso, pela definição da interpretação $I, \langle \widehat{W}, I \rangle$ é um modelo não só de \mathcal{A}^+ , mas também de $FOT(\mathcal{C}_S)$.

(Metade "somente se":) A prova é idêntica à metade "somente se" do Teorema 2.6, notando que, no caso base, se α é uma instanciação de uma das suposições globais de S , é trivialmente derivável a partir de \mathcal{C}_S .

Teorema 2.8 (Correspondência forte para lógica modal $K\partial$) *Seja $\partial \subseteq \{\mathbf{T}, \mathbf{4}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{5}\}$, seja $\langle K\partial_{Ax}, \vdash_{K\partial_{Ax}} \rangle$ o sistema axiomático correspondente, seja δ o subconjunto de $\{\mathbf{(T)}, \mathbf{(4)}, \mathbf{(D)}, \mathbf{(B)}, \mathbf{(5)}\}$ correspondente, e seja $K\delta$ -MLDS o MLDS proposicional cuja álgebra de rotulação é $\mathcal{A}_{K\delta}$. Sejam S e U conjuntos de wffs de \mathcal{L}_M . Seja $\mathcal{C}_{SU} = \langle \{\}, \mathcal{F}_{SU} \rangle$, onde $\mathcal{F}_{SU}(\omega_0) = S \cup U$ e $\mathcal{F}_{SU}(\lambda) = S$ para qualquer termo raso $\lambda \neq \omega_0$ de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$. Seja α uma fórmula de \mathcal{L}_M . Então:*

$$\mathcal{C}_{SU} \models_{K\delta\text{-MLDS}} \alpha : \omega_0 \text{ se e somente se } S \models_{K\partial_{Ax}} U \Rightarrow \alpha.$$

Prova: Pelo Teorema 2.3 e pela propriedade de compacidade da lógica modal proposicional, é suficiente considerar apenas o caso onde U é finito. Seja $U = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. A prova é por indução sobre n .

CASO BASE: O caso base é quando $n = 0$. Então o teorema é válido, pelo Teorema 2.7.

PASSO DE INDUÇÃO: Seja $\mathcal{C}'_{SU} = \mathcal{C}_{SU} - [\alpha_n : \omega_0]$ e $U' = U - \{\alpha_n\}$. Pelo teorema da dedução da lógica de primeira ordem, $\mathcal{A}_{K\delta}^+ \cup FOT(\mathcal{C}_{SU}) \models_{FOL} [\alpha]^*(\omega_0)$ se e somente se $\mathcal{A}_{K\delta}^+ \cup FOT(\mathcal{C}'_{SU}) \models_{FOL} [\alpha_n]^*(\omega_0) \rightarrow [\alpha]^*(\omega_0)$. Pelo esquema de axiomas (Ax4), isso pode ser escrito de maneira equivalente como $\mathcal{A}_{K\delta}^+ \cup FOT(\mathcal{C}'_{SU}) \models_{FOL} [\alpha_n \rightarrow \alpha]^*(\omega_0)$. Pela definição de $\models_{K\delta\text{-MLDS}}$, isso é equivalente a $\mathcal{C}'_{SU} \models_{K\delta\text{-MLDS}} \alpha_n \rightarrow \alpha : \omega_0$. Pela hipótese de indução, esse último enunciado é verdadeiro se e somente se $S \models_{K\partial} U' \Rightarrow \alpha_n \rightarrow \alpha$, o que é equivalente a $S \models_{K\partial} U \Rightarrow \alpha$ pelo teorema da dedução local da lógica modal $K\partial$.

O teorema acima oferece efetivamente um método de tradução a partir de qualquer teoria modal $\langle S, U \rangle$ para uma configuração MLDS equivalente, o que preserva a derivabilidade e a implicação semântica. Entretanto, está claro que muitas configurações não são a tradução de qualquer teoria modal. (Por exemplo, qualquer configuração cujo diagrama \mathcal{D} não seja vazio ou cuja função \mathcal{F} seja diferente em mais do que um rótulo.) Portanto, a informação que tais configurações codificam não pode ser representada dentro da lógica modal tradicional.

2.4 Estendendo resultados das propriedades

Na seção de comentários do capítulo anterior, foi declarado que a estrutura de trabalho do MLDS proposicional poderia facilmente ser estendida para incluir álgebras de rotulação com igualdade. Esta seção dá uma breve descrição de como as provas de correção (Teorema 2.1), completude (Teorema 2.1) e correspondência (Teorema 2.8) poderiam ser estendidas para cobrir um MLDS proposicional cuja álgebra de rotulação inclu

axiomas que envolvam igualdades e a teoria da igualdade padrão. Apenas um esboço é dado aqui – é evidente que muitas das provas deste capítulo de lemas, proposições e teoremas relacionados às regras de derivação “estrutural” (por exemplo, o Teorema 2.3, o Lema 2.3 e a Proposição 2.33) ainda são válidas para álgebras de rotulação com igualdade.

Para mostrar a correção da relação de derivabilidade “estendida” \vdash_{MLDS} (isto é, a relação baseada sobre deduções onde o raciocínio sobre literais de igualdade e desigualdade é permitido), um caso adicional é necessário no Lema 2.1, que prova essencialmente que a regra \mathcal{I}_{Sub} é correta.

O Teorema 2.2 pode ser estendido diretamente para o caso de π ser um literal de igualdade ou de desigualdade, mostrando então que a relação de derivabilidade também pode ser caracterizada em termos de derivações de igualdades e desigualdades entre mundos possíveis. No Teorema 2.3, um caso adicional precisa ser incluído para a regra \mathcal{I}_{Sub} , o qual é análogo ao raciocínio usado no CASO 1, pois \mathcal{I}_{Sub} também seria parte da categoria \mathcal{I}^0 das regras de MLDS.

A prova do teorema da completude para MLDSs estendidos seria como segue. A construção da configuração consistente máxima descrita na Definição 2.6 pode ser adotada sem qualquer modificação. A verificação de consistência construída dentro dessa construção, junto com a propriedade da maximalidade, garantirá que cada literal de igualdade, R -literal ou unidade declarativa derivável por substituição de igualdade ou pela regra \mathcal{I}_{Sub} é incluído na configuração consistente máxima. Além disso, a configuração consistente máxima, neste caso, satisfaria duas propriedades adicionais, correspondentes às proposições 2.10 e 2.12 com Δ substituído por um literal ou de igualdade, ou de desigualdade, e a seguinte proposição que garante que \mathcal{C}_{mcc} é “fechada” com respeito à regra \mathcal{I}_{Sub} .

Proposição 2.34 *Seja $K\delta$ -MLDS um MLDS arbitrário e seja \mathcal{C}_{mcc} uma configuração consistente máxima relativa a $K\delta$ -MLDS. Sejam λ_1 e λ_2 dois termos rasos de $\text{Func}(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e seja α uma wff. Se $\alpha : \lambda_1 \in \mathcal{C}_{mcc}$ e $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathcal{C}_{mcc}$ então $\alpha : \lambda_2 \in \mathcal{C}_{mcc}$ também. (A prova é por contradição, usando a regra \mathcal{I}_{Sub} .)*

Na construção de um modelo canônico (Definição 2.7 e Teorema 2.5), um universo de Herbrand ainda pode ser usado, e pode ser mostrado que dentro desse modelo, a relação $=$ é uma relação de equivalência, que satisfaz todos os axiomas de igualdade padrão incluídos na álgebra de rotulação estendida. ([GAB2000] destaca que a interpretação da igualdade como uma relação de equivalência é uma técnica padrão neste tipo de prova de completude).

Finalmente, é óbvio que o resultado da correspondência forte do Teorema 2.8 pode ser prontamente estendido para cobrir lógicas de estrutura cujo esquema de axiomas característico corresponda a condições de primeira ordem que usam o predicado de igualdade. Por exemplo, a axiomatização da lógica modal $S4.1$ inclui os esquemas **T**, **D**, **4** e o axioma de McKinsey $\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha$. Essa lógica também pode ser formalizada dentro da estrutura de trabalho de MLDS, usando a álgebra de rotulação $\{(\mathbf{T}), (\mathbf{D}), (\mathbf{4}), \forall x, y [R(\text{succ}(x), y) \rightarrow = \text{succ}(x)]\}$.

Uma prova de correspondência entre o sistema axiomático de $S4.1$ e este MLDS particular poderia ser facilmente obtida com modificações apropriadas no Teorema 2.6. Como um primeiro passo, é mostrado abaixo que o axioma de McKinsey é provável em uma estrutura de trabalho MLDS baseada sobre a álgebra de rotulação acima.

Axioma de McKinsey. Seja λ um termo raso arbitrário de $Mon(\mathcal{L}_L, \mathcal{L}_M)$ e seja $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_\emptyset$. A seguinte derivação mostra que $\mathcal{C}_0 \vdash_{K\{(T),(D),(4),(Mc)\}} \Box \Diamond \alpha \rightarrow \Diamond \Box \alpha : \lambda$.

\mathcal{C}_0	$\langle \rangle$	
\mathcal{C}_0	$\langle [\Box \Diamond \alpha : \lambda] \rangle$	(suposição)
\mathcal{C}_1	$\langle R(\lambda, succ(\lambda)) \rangle$	(Afirmação do R)
\mathcal{C}_2	$\langle [R(succ(\lambda), box_\alpha(succ(\lambda)))] \rangle$	(suposição)
\mathcal{C}_3	$\langle \Diamond \alpha : succ(\lambda) \rangle$	($\Box E$)
\mathcal{C}_4	$\langle \alpha : f_\alpha(succ(\lambda)), R(succ(\lambda), f_\alpha(succ(\lambda))) \rangle$	($\Diamond E$)
\mathcal{C}_5	$\langle f_\alpha(succ(\lambda)) = succ(\lambda) \rangle$	(Afirmação do R)
\mathcal{C}_6	$\langle \alpha : succ(\lambda) \rangle$	(\mathcal{I}_{Sub})
\mathcal{C}_7	$\langle box_\alpha(succ(\lambda)) = succ(\lambda) \rangle$	(Afirmação do R)
\mathcal{C}_8	$\langle box_\alpha \alpha : (succ(\lambda)) \rangle$	(\mathcal{I}_{Sub})
\mathcal{C}_9	$\langle \Box \alpha : succ(\lambda) \rangle$	($\Box I$)
\mathcal{C}_{10}	$\langle \Diamond \Box \alpha : \lambda \rangle$	($\Diamond I$)
\mathcal{C}'	$\langle \Box \Diamond \alpha \rightarrow \Diamond \Box \alpha : \lambda \rangle$	($\rightarrow I$)

2.5 Comentários

Neste capítulo, mostramos que o sistema de dedução natural proposto é correto. A noção do tamanho de uma regra de inferência foi apresentada para simplificar a prova do teorema da correção. As características típicas de fazer e de descarregar suposições em uma prova por dedução natural (veja [FIT83]) é realizado em um MLDS, definindo-se as condições sobre regras de inferência (nas duas classes de regras de inferência \mathcal{I}^+ e \mathcal{I}^{++}). Como essas condições são subderivações (que correspondem realmente à noção de “caixas” definida em [PRA65]), a definição de uma prova, como uma seqüência de regras, é recursiva. Entretanto, um MLDS também inclui regras (todas membros da classe \mathcal{I}^0) que não se baseiam em subderivações e, portanto, são regras de “passo único”. Usando a definição de tamanho de regras de inferência, o primeiro tipo de regras pode ser expresso como seqüências de regras de passo único. Do mesmo jeito, usando a definição de tamanho de uma prova, podemos considerar uma derivação como uma seqüência de regras de passo único. Como consequência, a característica recursiva de uma derivação é eliminada, e a indução sobre o tamanho de uma prova pode ser usado para provar propriedades de derivações, como mostramos na prova do teorema da correção. Neste tipo de indução, frequentemente usamos a regra de redução de configuração como caso base. De fato, como ela infere informação já contida na configuração inicial, é considerada como uma aplicação “vazia” de regras de passo único (portanto, seu tamanho é definido como zero).

Outro resultado mostrado neste capítulo é que, para um $K\delta$ -MLDS arbitrário, a relação de derivabilidade \vdash_{MLDS} é completa com respeito à implicação semântica \Vdash_{MLDS} . Como uma observação técnica, a prova descrita aqui, embora baseada sobre a metodologia de Henkin, torna-se mais simples do que as provas de completude padrão de lógicas modais. As últimas exigem a construção de conjuntos consistentes máximos como *conjuntos subordinados*. Essa construção envolve primeiro definir o “conjunto consistente máximo do mundo inicial”, e então definir seus conjuntos consistentes máximos subordinados (ou dos mundos acessíveis) e repetir o mesmo processo para cada um deles até que não possam mais ser construídos conjuntos máximos subordinados. Esse processo varia

para cada tipo de lógica modal, pois a definição de um conjunto subordinado depende das propriedades da relação de acessibilidade.

No caso de um $K\delta$ -MLDS, não há necessidade para conjuntos consistentes máximos subordinados. A construção de uma configuração consistente máxima exige apenas a adição consistente de todas as unidades declarativas e R -literais de uma MLDL para uma configuração inicial. Não impõe qualquer distinção entre o conjunto consistente máximo inicial e os conjuntos subordinados. Essa simplificação é devida ao fato de que, em uma unidade declarativa, a associação de fórmulas modais a um mundo possível é especificada explicitamente. As relações entre mundos possíveis também são explícitas. A construção de uma configuração consistente máxima (Definição 2.5) é idêntica para cada $K\delta$ -MLDS. Essa simplificação é devida à modularidade dos MLDSs. As propriedades da relação de acessibilidade são um conjunto à parte em uma álgebra de rotulação \mathcal{A} a qual define conjuntos diferentes de R -literais em uma configuração consistente máxima.

3 Lógica Modal para Representação do Conhecimento

Embora a *epistemologia*, o estudo do conhecimento, tenha uma tradição duradoura e honrável na filosofia, iniciando com os gregos, a idéia de uma análise lógica formal do raciocínio sobre o conhecimento é algo mais recente. Lógicas epistêmicas, ou lógicas do conhecimento, foram estudadas na filosofia com o objetivo de analisar propriedades formais do raciocínio sobre conhecimento e crença desde os anos 1950, com os trabalhos de Wright. O primeiro livro que tratou todo sobre lógicas epistêmicas foi o primeiro trabalho de Hintikka, “Conhecimento e Crença” (*Knowledge and Belief*, [HIN62]) Os anos 1960 viram um florescer de interesses nessa área na comunidade filosófica. Axíomas para o conhecimento foram sugeridos, atacados e defendidos. Modelos para as várias axiomatizações foram propostos, principalmente em termos de semânticas de mundos possíveis, e novamente atacados e defendidos (veja, por exemplo, referências em [HAL95]).

Mais recentemente, ao longo dos últimos 20 anos, entretanto, a lógica epistêmica encontrou aplicações em várias outras disciplinas, como economia, lingüística, inteligência artificial e ciência da computação. Algumas das outras disciplinas em que a lógica epistêmica encontrou aplicações são ([FAG95]):

- na teoria dos jogos, é usada para uma análise epistêmica dos jogos com informação incompleta;
- na inteligência artificial, a lógica epistêmica é aplicada para descobrir o que um agente tem que saber (em particular, sobre o que ele sabe) para mostrar um comportamento inteligente;
- na ciência da computação, é empregada para analisar o comportamento de sistemas multiagentes;

Esta lista não está completa de maneira alguma; outras aplicações podem ser encontradas em [FAG95, HAL95, GAB2003].

3.1 Raciocínio sobre conhecimento em sistemas multiagentes

Em um *sistema multiagentes*, agentes diferentes têm conhecimentos diferentes sobre o mundo. Um agente pode precisar raciocinar sobre o seu próprio conhecimento sobre o mundo; ele também pode precisar raciocinar sobre o que os outros agentes sabem sobre o mundo. Por exemplo, em uma situação de barganha, o vendedor de um carro deve considerar o que um comprador sabe sobre o valor do carro. O comprador também deve considerar o que o vendedor sabe sobre o que o comprador sabe sobre o valor do carro e assim por diante.

O *raciocínio sobre conhecimento* é algo que se refere à idéia de que os agentes em um grupo levam em conta não só os fatos do mundo, mas também o conhecimento dos outros agentes do grupo. As aplicações dessa idéia incluem: jogos, economia, criptografia e protocolos. Como já mencionado, não é muito fácil para os humanos seguir a linha de sentenças aninhadas tais como *José não sabe se Luís sabe que José sabe que Luís sabe que Fernando assaltou o escritório de Silva em Brasília.*, mas agentes computacionais são melhores que os humanos a esse respeito.

3.1.1 Exemplos clássicos

Apresentamos aqui alguns exemplos clássicos sobre raciocínio em um ambiente de multiagentes. Esta apresentação é feita com base em [HUT2000]. Na próxima seção, construiremos uma lógica modal que permite uma representação formal destes exemplos via seqüentes e que os resolve provando-os em um sistema de dedução natural.

O jogo dos homens sábios

Imagine que há três homens sábios e um rei que tem três chapéus vermelhos e dois chapéus brancos, e que todos os homens sábios sabem que ele tem apenas esses chapéus. É conhecimento comum - conhecido por todos e sabido ser conhecido por todos, etc. — que há três chapéus vermelhos e dois chapéus brancos. O rei coloca um chapéu na cabeça de cada um dos três homens sábios. Cada um deles vê a cor dos chapéus dos outros dois homens, mas não pode ver o seu próprio chapéu. Agora o rei pergunta a cada um por vez se eles sabem a cor do chapéu que está na sua cabeça.

Suponha que o primeiro homem diga que não sabe; e então o segundo diz que não sabe também. Segue que o terceiro homem tem que poder dizer que sabe a cor do seu próprio chapéu. Por que isso? De que cor é o chapéu do terceiro homem?

Para responder a essas questões, enumeramos as sete possibilidades existentes:

V	V	V	V	B	B	B
V	V	B	B	V	V	B
V	B	V	B	V	B	V

onde, por exemplo, V B B refere-se à situação em que o primeiro homem tem um chapéu vermelho, o segundo tem um chapéu branco, e o terceiro, também um chapéu branco. A oitava possibilidade, B B B, é impossível pelo fato de que há apenas dois chapéus brancos.

Agora vamos pensar sobre isso a partir dos pontos de vista do segundo e do terceiro homem. Quando eles ouvem o primeiro homem falar, eles podem descartar a possibilidade de ser verdadeira a situação V B B, porque, se fosse o caso dessa situação, então o primeiro homem, vendo que os outros estavam usando chapéus brancos e sabendo que há apenas dois chapéus brancos, teria concluído que o seu próprio chapéu teria que ser vermelho. Como ele disse que não sabia, a situação verdadeira não pode ser V B B. Note que o segundo e o terceiro homem deveriam ser inteligentes para fazer esse raciocínio; e eles devem saber que o primeiro homem é inteligente e sincero também. No jogo, assumimos a honestidade, a inteligência e a percepção dos homens como conhecimento comum — conhecido por todos e sabido ser conhecido por todos, etc.

Quando o terceiro homem ouve o segundo homem falar, ele pode descartar a possibilidade da situação verdadeira ser BVB, por razões parecidas: se esse fosse o caso, o segundo homem teria dito que ele sabia que a cor do seu chapéu é vermelha, mas ele não disse isso. Além disso, o terceiro homem também pode descartar a situação V V B quando ele ouve a segunda resposta, pela seguinte razão: se o segundo homem tivesse visto que o primeiro estava usando um chapéu vermelho, e o terceiro um chapéu branco, ele teria sabido que a situação deveria ser V B B ou V V B; mas ele teria sabido, pela resposta do primeiro homem, que a situação não poderia ser V B B, então ele teria concluído que era V V B e que ele próprio estava usando um chapéu vermelho; mas ele não chegou a essa conclusão, então, pensa o terceiro homem, a situação não pode ser V V B.

Tendo ouvido os dois primeiros homens falar, o terceiro homem tinha eliminado as situações V B B, B V B e V V B, deixando apenas V V V, V B V, B V V e B B V. Em

todos esses casos, ele próprio está usando um chapéu vermelho, então ele conclui que ele deve estar usando um chapéu vermelho.

Note que o homem aprendeu muito ao ouvir os outros homens falarem. Enfatizamos novamente a importância da suposição de que eles dizem a verdade sobre o seu conhecimento e são perspicazes e inteligentes o suficiente para chegar a conclusões corretas. Por isso, não é suficiente que os três homens sejam honestos, perspicazes e inteligentes; eles devem saber que os outros o são e, (nos exemplos posteriores) esse fato também deve ser conhecido, etc. Portanto, assumimos que tudo isso é conhecimento comum.

O jogo das crianças sujas de lama

Esta é uma das muitas variações do jogo dos homens sábios; uma diferença é que as perguntas são respondidas em paralelo, não em seqüência. Há um grupo grande de crianças brincando no jardim (sua percepção, honestidade e inteligência são conhecimento comum, ou seja, isso é verdadeiro, sem que se precise dizê-lo). Um certo número de crianças (digamos k) ficou suja de lama na testa. Cada criança consegue ver a lama nas outras, mas não na sua própria testa. Se $k > 1$, então cada criança pode ver uma outra com lama na testa, então cada uma sabe que pelo menos uma no grupo está suja de lama. Considere estes dois cenários:

Cenário 1. O pai pergunta repetidamente “Alguém de vocês sabe se está com lama na testa?”. A primeira vez, todas elas vão dizer *não*; mas, diferente do exemplo dos homens sábios, elas não aprendem por ouvir as outras dizerem *não*, então elas prosseguem respondendo *não* às perguntas repetidas do pai.

Cenário 2. O pai anuncia primeiro que pelo menos uma delas está suja de lama (o que é algo que eles já sabem); e então, como antes, ele pergunta repetidamente “Alguém de vocês sabe se está com lama na testa?”. Na primeira vez, todos respondem *não*. Por isso, eles prosseguem respondendo *não* às primeiras $k - 1$ repetições da mesma questão; mas na k -ésima vez, a criança que está com lama na testa pode responder *sim*.

À primeira vista, parece mais intrigante que os dois cenários sejam diferentes, dado que a única diferença nos eventos conduzidos entre eles está em que, no segundo cenário, o pai anuncia algo que eles já sabem. Seria errado, entretanto, concluir que as crianças não aprenderam a partir desse anúncio. Embora todas soubessem o conteúdo do anúncio, o fato de o pai dizer isso torna isso conhecimento comum entre todos, então agora todos sabem que todos sabem disso, etc. Essa é a diferença crucial entre os dois cenários.

Para entender o cenário 2, considere alguns poucos casos de k .

$k = 1$, isto é, apenas uma criança tem lama na testa. Essa criança está imediatamente apta a responder *sim*, pois ela ouviu o pai falar e não vê nenhuma outra criança suja de lama.

$k = 2$, digamos que apenas as crianças a e b têm lama na testa. Todos respondem *não* na primeira vez. Agora, a pensa: como b respondeu *não* na primeira vez, ela deve ter visto alguém com lama. Bem, a única pessoa que eu consigo ver com lama é b , então se b vê mais alguém com lama, esse alguém deve ser eu. Então a responde *sim* na segunda vez. A criança b raciocina de maneira simétrica sobre a e também responde *sim* na segunda rodada.

$k = 3$, digamos apenas as crianças a , b e c têm lama. Todos respondem *não* nas duas primeiras vezes. Mas agora a pensa: se só b e c estão com lama, eles teriam respondido *sim* na segunda vez, conforme o argumento para $k = 2$ acima. Então deve haver uma

terceira pessoa com lama; como eu só posso ver b e c com lama, a terceira pessoa deve ser eu. Então a responde *sim* na terceira vez. Por razões simétricas, b e c fazem o mesmo.

E assim também ocorre para outros casos de k .

Para ver que isso não era conhecimento comum antes do anúncio do pai de que uma das crianças estava suja de lama, considere novamente $k = 2$, com crianças a e b . Evidentemente, a e b conhecem alguém que está sujo de lama (elas vêem uma à outra); mas, por exemplo, a não sabe que b sabe que alguém está sujo. Conforme tudo que a sabe, b deve ser a única criança suja e, portanto, b não pode estar vendo uma criança suja.

3.2 O modelo clássico

Em todos esses casos, o uso da linguagem multimodal \mathcal{ML}_n para capturar propriedades de conhecimento e crença parece um muito natural. Começamos, então, revisando o modelo “clássico” para conhecimento e crença, o modelo dos *mundos possíveis*. A idéia intuitiva aqui é que, além do estado verdade dos casos, existe um número de outros estados possíveis dos casos, ou mundos possíveis. Alguns desses mundos possíveis podem ser indistinguíveis do mundo verdadeiro para um agente. Diz-se então que um agente *sabe* um fato φ se um fato φ é verdade em todos os mundos que ele pensa serem possíveis. Por exemplo, um agente pode pensar que dois estados do mundo são possíveis: em um, está fazendo sol em Londres, enquanto no outro, está chovendo em Londres. Entretanto, em ambos os estados, está fazendo sol em São Francisco. Portanto, esse agente sabe que está fazendo sol em São Francisco, mas não sabe se está fazendo sol em Londres.

Suponha, por exemplo, que tenhamos um grupo de n agentes chamados $1, \dots, n$. Para cada um deles, introduzimos um operador modal \Box_i que é lido como “o agente i sabe” ou “o agente i acredita que”. Os axiomas

1. $\Box_i(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow (\Box_i p_0 \rightarrow \Box_i p_1)$,
2. $\Box_i p_0 \rightarrow p_0$,
3. $\Box_i p_0 \rightarrow \Box_i \Box_i p_0$,
4. $\neg \Box_i p_0 \rightarrow \Box_i \neg \Box_i p_0$

significam então que

1. o agente i sabe todas as conseqüências lógicas do seu conhecimento (esse fenômeno é conhecido na literatura como *onisciência lógica*),
2. tudo o que i sabe é verdade (*consistência do que é sabido*),
3. o agente i sabe o que ele sabe (*introspecção positiva*), e
4. o agente i sabe o que ele não sabe (*introspecção negativa*).

Lembre agora que (1) é um axioma de qualquer lógica modal normal, (2) é um axioma de **T**, (3) é um axioma de **K4**, e (2)-(4) são axiomas de **S5** (veja nosso trabalho anterior, [MAL2002] para uma revisão sobre lógicas modais). Todas as lógicas epistêmicas a ser consideradas contêm o axioma (1) para qualquer agente e são fechadas sob a regra de necessitação ($\varphi/\Box_i \varphi$, o que significa, em particular, que os agentes sabem todas as tautologias da lógica clássica. Evidentemente, essa suposição dá modelos de conhecimento um pouco idealizados para agentes humanos (e talvez para robôs também), mas, para muitos propósitos de modelagem do comportamento dos sistemas multiagentes em inteligência artificial, essa simplificação parece ser justificada ou pelo menos a melhor aproximação possível.

As *lógicas epistêmicas* básicas da linguagem \mathcal{ML}_n são as seguintes variantes multimodais dos sistemas **K**, **T**, **S4**, **KD45** e **S5**, definidas em [GAB2003]:

- K_n : apenas a propriedade da onisciência lógica de todos os agentes é assumida;
- T_n : além da onisciência lógica, é assumido que o que é sabido é verdade;
- $S4_n$: além das propriedades de T_n , temos a introspecção positiva;
- $KD45_n$: além da onisciência lógica e da introspecção positiva, a introspecção negativa e a consistência do que é conhecido é assumida;
- $S5_n$: além das propriedades de $S4_n$, temos a introspecção negativa.

Foi mostrado em [HAL95] que todas essas lógicas são decidíveis e que seus problemas de decisão são PSPACE-completos (veja [GAB2003]).

Tendo postulado (1) e as regras de necessitação para as lógicas epistêmicas, encontramos novamente na classe das lógicas multimodais normais que podem ser interpretadas em modelos de Kripke. A questão é como esses modelos encaixam-se no contexto epistêmico. De acordo com a semântica dos mundos possíveis, o significado da fórmula $\Box_i \varphi$ é analisado como segue: $\Box_i \varphi$ é verdade em um mundo ω se e somente se φ é verdade em todos os mundos (ou situações) que o agente i considera como possíveis. E um mundo v é considerado possível por i em ω se v é acessível a partir de ω via a relação que interpreta \Box_i . Segue que i não sabe φ se e somente se existe um mundo, que é considerado possível por i , onde φ é falso. O exemplo do jogo dos homens sábios, dado na próxima seção, ilustra como essa análise é elegante.

A literatura filosófica tende a se concentrar sobre o caso de um agente, para enfatizar as propriedades do conhecimento. Entretanto, muitas aplicações de interesse envolvem múltiplos agentes. Então, torna-se importante considerar não somente o que um agente sabe sobre a “natureza”, mas também o que ele sabe sobre o que os outros agentes sabem ou não sabem. Deveria estar claro que esse tipo de raciocínio é crucial nos negócios e na tomada de decisões econômicas. Como veremos, também é relevante na análise de protocolos em sistemas de computação distribuída (nesse contexto, os “agentes” são os processos do sistema). Tal raciocínio pode ficar muito complicado. A maioria das pessoas perde rapidamente o fio da meada em sentenças aninhadas como “José não sabe se Luís sabe que José sabe que Luís sabe que Fernando assaltou o escritório de Silva em Brasília”. Mas este é precisamente o tipo de raciocínio que ocorre em diversas aplicações que envolvem muitos agentes.

3.2.1 Interpretações dos operadores modais epistêmicos

A estrutura básica para lógica modal permite as seguintes leituras de uma fórmula como $\Box \varphi$:

1. É necessariamente verdade que φ
2. Sempre será verdade que φ
3. Deveria ser o caso que φ
4. O agente Q acredita que φ
5. O agente Q sabe que φ
6. Após alguma execução do programa P, φ é válida.

FIGURA 3.1 – Leituras interessantes de $\Box \varphi$

Como a lógica modal dá automaticamente o conetivo \Diamond , que é equivalente a $\neg \Box \neg$, podemos descobrir quais serão as leituras correspondentes de \Diamond em nosso sistema. Por exemplo, “não é necessariamente verdade que *não* φ ” significa que é possivelmente verdade que φ . Poderíamos trabalhar isso em passos:

- Não é necessariamente verdade que φ

$\Box\varphi$	$\Diamond\varphi$
É necessariamente verdade que φ	É possivelmente verdade que φ
Sempre será verdade que φ	Em algum momento futuro, φ valerá
Deveria ser o caso que φ	É permitido que φ
O agente Q acredita que φ	φ é consistente com as crenças de Q
O agente Q sabe que φ	Para tudo o que Q sabe, φ
Após qualquer execução do program P, φ vale	Após alguma execução de P, φ vale

TABELA 3.1 – Leituras de \Diamond correspondentes a cada leitura de \Box

- = é possível que *não* φ .
- Portanto,
- *Não* é necessariamente verdadeiro que *não* φ
- = é possível que *não não* φ
- = é possível que φ .

Trabalharemos com a leitura “o agente Q sabe φ ” para $\Box\varphi$. Então $\Diamond\varphi$ é lida como “o agente Q *não* sabe *não* φ ”

= até onde vai o conhecimento de Q, poderia ser o caso que φ

= φ é consistente com o que o agente Q sabe

= para tudo o que o agente Q sabe, vale φ .

As leituras de \Diamond para os outros modos são dadas na Tabela 3.1.

Vimos algumas fórmulas válidas da lógica modal básica, tais como instâncias do esquema de axioma **K**: $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$ e os esquemas

$$\neg\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\neg\varphi$$

$$\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi$$

$$\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi.$$

Exemplo 3.1 *Um Modelo de Kripke:*

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \langle W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \\ R &= \{(\omega_1, \omega_2), (\omega_1, \omega_3), (\omega_2, \omega_2), (\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_2), (\omega_4, \omega_5), (\omega_5, \omega_4), (\omega_5, \omega_6)\}, \\ \mathbf{v} &= \{(\omega_1, q), (\omega_2, p), (\omega_2, q), (\omega_3, p), (\omega_4, q), (\omega_6, p)\} \end{aligned}$$

Muitas fórmulas, tais como $\Box p \rightarrow p$, $\Box p \rightarrow \Box\Box p$, $\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$, $\Diamond\top$, *não* são válidas. Por exemplo, para cada uma dessas, existe um mundo no modelo de Kripke do Exemplo 3.1 que não satisfaz a fórmula. O mundo x_1 satisfaz $\Box p$, mas não satisfaz p , então não satisfaz $\Box p \rightarrow p$. Se adicionarmos $R(x_2, x_1)$ ao nosso modelo, então x_1 também não satisfaz $\Box\Box p$, também falha em satisfazer $\Box p \rightarrow \Box\Box p$. Se ajustamos $L(x_4) = \{p, q\}$, então x_4 não satisfaz $\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$, porque satisfaz $\neg\Box p$ mas não satisfaz $\Box\neg\Box p$ (o caminho $x_4 R x_5 R x_4$ serve como um contra-exemplo). Finalmente, x_6 não satisfaz $\Diamond\top$, pois essa fórmula declara que existe um mundo relacionado que satisfaz \top . Entretanto, não há qualquer mundo relacionado a x_6 .

Se estamos construindo uma lógica que captura o conceito de necessidade, entretanto, devemos garantidamente ter que $\Box p \rightarrow p$ é válida: pois qualquer coisa que seja *necessariamente verdadeira* é também simplesmente verdadeira. Analogamente, esperamos que $\Box p \rightarrow p$ seja válida no caso em que $\Box p$ significa “o agente Q sabe p”, pois o que

$\Box\varphi$	1	2	3	4	5	6
$\Box\varphi \rightarrow \varphi$	✓	×	×	×	✓	×
$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	✓	✓	×	✓	✓	×
$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	✓	×	×	✓	✓	×
$\Diamond\top$	✓	×	✓	✓	✓	×
$\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	✓	×	✓	✓	✓	×
$\Box\varphi \vee \Box\neg\varphi$	×	×	×	×	×	×
$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi \rightarrow \Diamond(\varphi \wedge \psi)$	×	×	×	×	×	×

TABELA 3.2 – Esquemas de fórmulas válidos para as diversas leituras de \Box da Figura 3.1

quer que seja conhecido deve também ser verdade. Não podemos *saber* algo que é falso. Podemos, entretanto, *acreditar* em coisas falsas; então, no caso de uma lógica de crença, *não* esperamos que $\Box p \rightarrow p$ seja válida.

A Tabela 3.2 mostra as seis leituras interessantes para \Box apresentadas na Figura 3.1 e oito esquemas de fórmulas. Para cada leitura e cada esquema de fórmulas, decidimos se deveríamos esperar que o esquema seja válido. Colocamos um “✓” se a fórmula deveria ser válida para todos os casos de φ e ψ . Se poderia ser válida para alguns casos e não para outros, colocamos um “×”.

Existem muitos pontos importantes a observar sobre a Tabela 3.2. Primeiro, observe que é discutível colocar um ✓ ou um × em alguns espaços. Precisamos ser precisos sobre o conceito de verdade que estamos tentando formalizar para resolver toda e qualquer ambigüidade.

Necessidade. Quando nos perguntamos se $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ e $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ deveriam ser válidos, isso parece depender de a qual noção de necessidade estamos nos referindo. Essas fórmulas são válidas se aquilo que é necessário é *necessariamente* necessário. Se estamos lidando com *necessidade física*, então isso considera o seguinte: as leis do universo são elas próprias fisicamente necessárias, isto é, elas implicam que elas deveriam ser leis do universo? A resposta parecer ser “não”. Entretanto, se temos a intenção de tratar com *necessidade lógica*, parece que deveríamos responder “sim”, pois as leis da lógica significam essas afirmações cuja verdade não pode ser negada. A linha é preenchida conforme a compreensão que queremos dizer com a necessidade lógica.

Sempre no futuro. Devemos ser precisos sobre se o futuro inclui ou não inclui o presente; isso é precisamente o que a fórmula $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ declara. É uma questão de convenção se o futuro inclui o presente ou não. A lógica CTL de [HUT2000] adota a convenção de que sim. Para variar, portanto, vamos assumir que o futuro *não* inclui o presente nesta linha da tabela. Isso significa que $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ não vale. E $\Diamond\top$? Esta fórmula diz que há um mundo futuro no qual \top é verdade. Em particular, então, existe um mundo futuro, isto é, o tempo não tem fim. Se consideramos isso como verdade ou não, isso depende exatamente de qual noção de “futuro” estamos tentando modelar.

Dever. Neste caso, as fórmulas $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ e $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ declaram que os códigos morais que adotamos são eles próprios forçados a serem assim pela moralidade. Isso não parecer ser verdadeiro; por exemplo, podemos acreditar que *Devemos usar cintos de segurança*, mas isso não nos compele a acreditar que *Devemos dever usar cintos de*

segurança. Entretanto, qualquer coisa que deva ocorrer deve ser permitida; portanto, $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$.

Crença. Para decidir se $\Diamond\top$, vemos expressá-la como $\neg\Box\perp$, pois isso é semanticamente equivalente. Isso diz que o agente Q não acredita em quaisquer contradições. Aqui devemos ser precisos sobre se estamos modelando seres humanos, com todas as suas crenças freqüentemente completamente contraditórias, ou se estamos modelando agentes idealizados que são onscientes logicamente (isto é, capazes de trabalhar sobre as conseqüências lógicas de suas crenças). Optamos por modelar o último conceito. A mesma questão surge quando consideramos, por exemplo, $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$, que (quando reescrevemos como $\neg\Box\psi \rightarrow \Box\neg\Box\psi$) diz que, se o agente Q não acredita em algo, então ele acredita que ele não acredita naquilo. A validade da fórmula $\Box\varphi \vee \Box\neg\varphi$ significaria que Q tem uma opinião sobre toda e qualquer questão; supomos que isso é improvável. $\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi \rightarrow \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ é reescrita como $\neg\Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)$, isto é, $\Box(\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow (\Box\neg\varphi \vee \Box\neg\psi)$, ou, se considerarmos as negações dentro de φ e ψ , $\Box(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Box\varphi \vee \Box\psi)$. Isso parece não ser válido, pois o agente Q poderia encontrar-se em uma situação em que acredita que existe uma chave na caixa vermelha, ou na caixa verde, sem acreditar que ela está na caixa vermelha e também sem acreditar que esteja na caixa verde.

Conhecimento. Este caso parece diferir da crença apenas no aspecto da primeira fórmula da Tabela 3.2; enquanto o agente Q pode ter crenças falsas, ele só pode *saber* o que é verdade. No caso do conhecimento, relembramos que as fórmulas $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ e $\neg\Box\psi \rightarrow \Box\neg\Box\psi$ são chamadas de *introspecção positiva* e *introspecção negativa*, respectivamente, pois declaram que o agente pode fazer introspecções sobre seu próprio conhecimento; se Q sabe algo, Q sabe que sabe aquilo; e se Q não sabe algo, Q sabe que não sabe aquilo. Claramente, isso representa um *conhecimento idealizado*, pois a maioria dos humanos (com todas as suas infelicidades) não satisfaz essas propriedades. O esquema de fórmulas **K** é referido algumas vezes como *onisciência lógica* na lógica do conhecimento, pois diz que o conhecimento do agente é fechado sob a conseqüência lógica, como já foi mencionado. Isso significa que o agente sabe todas as conseqüências de tudo o que ele sabe, o que, infelizmente (ou felizmente?) é verdadeiro só para agentes idealizados, não para humanos.

Execução de programas. Poucas fórmulas parecem ser válidas neste caso. O esquema $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ diz que rodar o programa duas vezes é o mesmo que rodá-lo uma vez, o que está completamente errado no caso de um programa que debita dinheiro da sua conta bancária. $\Diamond\top$ diz que existe uma execução do programa que termina; isso é falso para alguns programas.

As fórmulas $\Diamond\top$ e $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ são vistas como equivalentes (veja [GAB2003]), por isso têm o mesmo padrão de \checkmark e \times . Também podemos mostrar que $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ implica $\Diamond\top$ (isto é, $(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Diamond\top$ é válida), então sempre que a primeira tiver uma \checkmark , a segunda terá uma \checkmark .

3.2.2 Propriedades importantes da relação de acessibilidade

Para cada uma das seis leituras de \Box , existe uma leitura correspondente da relação de acessibilidade R . Além disso, para algumas leituras faz sentido estipular que R é reflexiva ou transitiva ou tem algumas outras propriedades. No caso do conhecimento, pensamos em $R(x, y)$ como dizendo: y poderia ser o mundo possível de acordo com o

$\Box\varphi$	$R(x, y)$
É necessariamente verdade que φ	y é possível de acordo com a informação em x
Sempre será verdade que φ	y está no futuro de x
Deveria ser o caso que φ	y é aceitável de acordo com a informação em x
O agente Q acredita que φ	y poderia ser o mundo atual de acordo com as crenças de Q em x
O agente Q sabe que φ	y poderia ser o mundo atual de acordo com o conhecimento de Q em x
Após qualquer execução de P, φ é válida	y é um estado resultante possível depois da execução de P em x

TABELA 3.3 – Significado de R para cada leitura de \Box

conhecimento do agente Q em x . Em outras palavras, se o mundo atual é x , então o agente Q (que não é onisciente) não pode descartar a possibilidade de estar em y . Se associarmos essa definição na cláusula acima para $x \Vdash \Box\varphi$, descobrimos que o agente Q sabe φ se e somente se φ é verdade em todos os mundos que, para tudo o que ele sabe, poderiam ser o mundo atual. A Tabela 3.3 resume o significado de R para cada uma das leituras de \Box .

Lembre que uma dada relação binária R pode ser:

reflexiva : se, para cada $x \in W$, temos que $R(x, x)$.

simétrica : se, para cada $x, y \in W$, temos que $R(x, y)$ implica $R(y, x)$.

serial : se, para cada x , existe um y tal que $R(x, y)$.

transitiva : se, para cada $x, y, z \in W$, temos que $R(x, y)$ e $R(y, z)$ implicam $R(x, z)$.

euclideana : se, para todo $x, y, z \in W$, com $R(x, y)$ e $R(x, z)$, temos que $R(y, z)$.

funcional : se, para cada x , existe um único y tal que $R(x, y)$.

linear : se, para cada $x, y, z \in W$, temos que $(R(x, y)$ e $R(x, z))$ juntos implicam que $(R(y, z)$, ou y igual a z ou $R(z, y))$.

total : se, para cada $x, y \in W$, temos que $R(x, y)$ ou $R(y, x)$.

(uma relação de equivalência) : se ela for reflexiva, simétrica e transitiva.

Agora, consideremos a seguinte questão: de acordo com as diversas leituras de R , esperamos que R tenha quais dessas propriedades?

Exemplo 3.2 Se $\Box\varphi$ significa “o agente Q sabe φ ”, então $R(x, y)$ significa que y poderia ser o mundo atual de acordo com o conhecimento de Q em x .

- R deveria ser reflexiva? Isso significa: x poderia ser o mundo atual de acordo com o conhecimento de Q em x . Em outras palavras, Q não pode saber que as coisas são diferentes de como elas realmente são – isto é, Q não pode ter conhecimentos falsos. Essa é uma propriedade desejável para R ter. Além disso, parece ficar na mesma intuição (isto é, a impossibilidade de conhecimento falso) que a validade da fórmula $\Box\varphi \rightarrow \varphi$. Por isso, a validade dessa fórmula e a propriedade da reflexividade estão estreitamente relacionadas, como veremos na próxima seção.
- R deveria ser transitiva? Isso significa: se y é possível de acordo com o conhecimento de Q em x , e z é possível de acordo com o conhecimento de Q em y , então z é possível de acordo com o conhecimento de Q em x . Isso parece ser verdade. Supondo que não seja verdade, isto é, em x , Q soube algo que impede z de ser o mundo real. Então Q saberia que sabe isso em x ; portanto, saberia algo em y que impede z de ser o mundo real; o que contradiz nossa premissa. Neste argumento, baseamo-nos sobre a introspecção positiva, isto é, a fórmula $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$. Veremos brevemente que existe uma correspondência muito próxima entre R ser transitiva e a validade dessa fórmula.

3.3 Sintaxe

Para formalizar todos esses tipos de raciocínio apresentados, primeiro precisamos de uma linguagem. A linguagem considerada aqui, com base em [HAL95], é uma linguagem modal proposicional para n agentes; é uma sutil generalização da lógica descrita por Fitting [FIT83]. Começando com um conjunto Φ de proposições primitivas (usualmente denotadas pelas letras p, q e r), são formadas fórmulas complicadas fechadas sob negação, conjunção e os operadores modais K_1, \dots, K_n . Portanto, se φ e ψ são fórmulas, então $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi$ e $K_i\varphi, i = 1, \dots, n$ também são fórmulas. Como usual, tomamos $\varphi \wedge \psi$ como uma abreviação para $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, e $\varphi \rightarrow \psi$ como uma abreviação para $\neg\varphi \vee \psi$.

Como já foi mencionado, a fórmula $K_i\varphi$ é lida como “o agente i sabe que φ ”. Os K_i s são chamados de operadores modais; portanto o nome lógica modal. Também podemos considerar uma lógica de primeira ordem que permite quantificação nos moldes discutidos por Fitting, mas o caso proposicional é algo mais simples e tem todos os ingredientes de que precisamos para esta discussão.

3.3.1 A lógica modal $KT45^n$

Podemos expressar enunciados um pouco mais complicados de uma maneira direta usando essa linguagem, conforme [HAL95]. Por exemplo, a fórmula

$$K_1K_2p \wedge \neg K_2K_1K_2p$$

diz que o agente 1 sabe que o agente 2 sabe p , mas que o agente 2 não sabe que o agente 1 sabe que o agente 2 sabe p . Vemos a possibilidade como o dual do conhecimento. Portanto, o agente 1 considera φ possível exatamente se ele não sabe se $\neg\varphi$. A situação pode ser descrita pela fórmula $\neg K_1\neg\varphi$. Um enunciado como “José não sabe se φ ” diz que José considera tanto φ como $\neg\varphi$ possíveis. Com essas observações, podemos lidar com a sentença anteriormente citada, “José não sabe se Luís sabe que José sabe que Luís sabe que Fernando assaltou o escritório de Silva em Brasília”. Se tomamos José como agente 1, Luís como agente 2 e p como o enunciado “Fernando assaltou o escritório de Silva em Brasília”, então essa sentença pode ser expressa nessa lógica como

$$\begin{aligned} &\neg K_1\neg(K_2K_1K_2p) \wedge \neg K_1\neg(\neg K_2K_1K_2p). \\ &(\neg K_1\neg\varphi \wedge \neg K_1\neg(\neg\varphi)) \end{aligned}$$

Agora generalizamos a lógica modal $KT45$ (apresentada em nosso trabalho anterior, [MAL2002]), conforme [HUT2000]. Em vez de termos apenas um \Box , teremos muitos, um para cada agente i de um conjunto fixo $\mathbf{A} = \{1, 2, \dots, n\}$ de agentes. Escrevemos esses conectivos modais como K_i (para cada agente $i \in \mathbf{A}$); o K serve para enfatizar a aplicação ao *conhecimento* (*knowledge*). Assumimos uma coleção p, q, r, \dots de fórmulas atômicas. A fórmula K_ip significa que o agente i sabe que p ; então, por exemplo, a fórmula $K_1p \wedge K_1\neg K_2K_1p$ significa que o agente 1 sabe que p , mas sabe que o agente 2 não sabe que ele sabe isso.

Segundo [HAL95], quando raciocinamos sobre o conhecimento de um grupo, torna-se útil raciocinar não somente sobre o estado de conhecimento de um agente individual, mas também sobre o conhecimento do grupo. Por exemplo, podemos querer fazer declarações como “todos no grupo G sabem φ ”. Então, torna-se útil a capacidade de fazer declarações até mais complicadas tais como “todos em G sabem que todos em G sabem que φ ”, e “ φ é conhecimento comum entre os agentes de G ”, onde *conhecimen-*

to comum é, informalmente, a conjunção infinita dos enunciados “todos sabem, e todos sabem que todos sabem, e todos sabem que todos sabem que todos sabem, . . .”.

Os primeiros estudos sobre o conhecimento comum foram feitos no contexto das convenções. Descobriu-se que, para algo ser uma convenção, deveria ser conhecimento comum entre os membros do grupo. O conhecimento comum também surge na compreensão de fala. Se a Ana pergunta ao Bob “você já viu o filme que está passando no Roxy esta noite?”, então, para essa pergunta ser interpretada de maneira apropriada, não só Ana e Bob devem saber qual filme está passando esta noite, mas Ana deve saber que Bob sabe, Bob deve saber que Ana sabe que Bob sabe, etc.

Para expressar essas noções, aumentamos a linguagem com os operadores modais $E_G C_G$ (“é conhecimento comum entre os agentes do grupo G ”), onde G é qualquer subconjunto não-vazio de $\mathbf{A} = \{1, \dots, n\}$. A fórmula $E_G p$ significa que todos os agentes no grupo G sabem p , e a fórmula $C_G p$ significa que p é conhecimento comum entre os agentes do grupo G . Portanto, podemos produzir declarações como $E_G p \wedge \neg C_G p$: todos em G sabem p , mas p não é conhecimento comum. Além disso, se $G = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, então $E_G p$ é equivalente a $K_1 p \wedge K_2 p \wedge \dots \wedge K_n p$.

Convenção 3.1 (*Prioridades de ligação de $KT45^n$*) *As prioridades das ligação da lógica $KT45^n$ são aquelas mesmas da lógica modal básica, se pensarmos em cada modalidade K_i, E_G e C_G como “sendo \square ”. (Assumimos, portanto, prioridades de ligação semelhantes às declaradas na convenção de prioridade de conetivos da lógica modal básica.)*

Alguém pode pensar que φ não pode ser mais amplamente conhecido do que todos o conhecendo, mas esse não é o caso. Poderia ser, por exemplo, que todos conhecessem φ , mas eles podem não saber que todos sabem disso. Se se supõe que φ é secreto, pode ser que você e seu amigo saibam disso, mas seu amigo não saiba que você sabe, e você não saiba que seu amigo sabe. Então $E_G E_G \varphi$ é um estado de conhecimento até maior do que $E_G \varphi$, e $E_G E_G E_G \varphi$ é maior ainda. Nós dizemos que φ é *conhecimento comum entre G* , e escrevemos isso como $C_G \varphi$, se todos sabem φ e todos sabem que todos sabem; e todos sabem disso; e sabem *disso*, etc., isto é, podemos pensar em $C_G \varphi$ como uma conjunção infinita: $E_G \varphi \wedge E_G E_G \varphi \wedge E_G E_G E_G \varphi \wedge \dots$

Entretanto, como nossa lógica só tem conjunções finitas, não podemos reduzir C_G a algo que já está na lógica. Temos que expressar o aspecto infinito de C_G via sua semântica e mantê-lo como um conetivo modal adicional. Finalmente, $D_G \varphi$ significa que o conhecimento de φ está distribuído entre o grupo G ; embora ninguém no grupo G possa sabê-lo, eles poderiam trabalhar com isso se juntassem suas cabeças e combinassem a informação distribuída entre eles.

Definição 3.1 (*Fórmula de lógica multimodal*) *Uma fórmula φ na lógica multimodal $KT45^n$ é definida pela seguinte gramática:*

$$\varphi ::= \perp | \top | p | \neg \varphi | (\varphi \wedge \varphi) | (\varphi \vee \varphi) | (\varphi \rightarrow \varphi) | (\varphi \leftrightarrow \varphi) | K_i \varphi | E_G \varphi | C_G \varphi | D_G \varphi$$

onde p é qualquer fórmula atômica, $i \in \mathbf{A}$ e $G \subseteq \mathbf{A}$. Escrevemos simplesmente E, C e D sem subscritos se nos referimos a $E_{\mathbf{A}}, C_{\mathbf{A}}$ e $D_{\mathbf{A}}$.

Comparando essa definição com a da prioridade de conetivos da lógica modal básica, temos, em vez de \square , várias modalidades K_i e também E_G, C_G e D_G para cada

$G \subseteq A$. Na realidade, todos esses conetivos serão vistos brevemente como mais do “tipo *box*” do que do “tipo *diamond*”, no sentido de que eles se distribuem sobre \wedge e não sobre \vee . Os correspondentes do “tipo *diamond*” desses conetivos não estão explícitos na linguagem, mas evidentemente, podem ser obtidos usando negações (isto é, $\neg K_i \neg$, $\neg C_G \neg$, etc.).

3.4 Semântica

Podemos dar semântica a essa lógica usando a idéia dos *mundos possíveis* e as *estruturas de Kripke*. Formalmente, uma estrutura de Kripke M é uma tupla $(W, (R_i)_{i \in A}, \mathbf{v})$, onde W é um conjunto de *estados* ou *mundos possíveis*, \mathbf{v} é uma *interpretação* que associa com cada estado em W uma atribuição verdade às proposições primitivas (isto é, $\mathbf{v}(\omega)(p) \in \{true, false\}$ para cada estado $\omega \in W$ e cada proposição primitiva p), e R_i é uma *relação de equivalência* sobre W (lembre que uma relação de equivalência é uma relação binária que é reflexiva, simétrica e transitiva). R_i é a *relação de possibilidade* do agente i . Intuitivamente, $(\omega_0, \omega_1) \in R_i$ se o agente i não pode distinguir o estado ω_0 do estado ω_1 (assim, se ω_0 é o estado atual do mundo, o agente i consideraria ω_1 como um estado possível do mundo). Tomamos R_i como sendo uma relação de equivalência, pois isso corresponde à situação em que, em um estado ω_0 , o agente i considera ω_1 possível se ele tem a mesma informação tanto em ω_0 como em ω_1 . Esse tipo de situação surge frequentemente em sistemas distribuídos e em aplicações de economia. Entretanto, também é possível considerar relações de possibilidade com outras propriedades (por exemplo, reflexiva e transitiva, mas não simétrica); a maioria das discussões envolve muitas pequenas alterações se mudamos a natureza da relação de possibilidade.

Definição 3.2 (*Modelo*) $M = (W, (R_i)_{i \in A}, \mathbf{v})$ da lógica multimodal $KT45^n$ com o conjunto A de n agentes é especificado por três elementos:

1. um conjunto W de mundos;
2. para cada $i \in A$, uma relação de equivalência R_i sobre W ($R_i \subseteq W \times W$), chamadas relações de acessibilidade;
3. uma função de rotulação $\mathbf{v} : W \rightarrow \mathcal{P}(\text{Átomos})$.

A diferença entre essa definição de modelo e aquela da lógica modal básica é que, em vez de apenas uma relação de acessibilidade, agora temos uma família, uma para cada agente de A ; e assumimos que as relações de acessibilidade são relações de equivalência.

Exploramos essas propriedades de R_i nas ilustrações gráficas de modelos de Kripke para $KT45^n$. Por exemplo, um modelo com mundos $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ é mostrado na Figura 3.2.

As ligações entre os mundos têm que ser rotuladas com o nome da relação, pois temos várias relações. Por exemplo, ω_1 e ω_2 estão R_1 -relacionados, enquanto ω_4 e ω_5 estão relacionados tanto por R_1 como por R_2 . Simplificamos, não exigindo mais setas nas ligações. Isso porque sabemos que as relações são simétricas, e portanto são bidirecionais. Além disso, as relações também são reflexivas, então deveria haver laços em todos os mundos e para todas as relações. Podemos omiti-los simplesmente desse diagrama, pois não queremos distinguir entre mundos que são auto-relacionados e aqueles que não o são.

Agora definimos uma relação \models , onde $(M, \omega) \models \varphi$ é lida como “ φ é verdadeira, ou *satisfeita*, no estado ω da estrutura M ”.

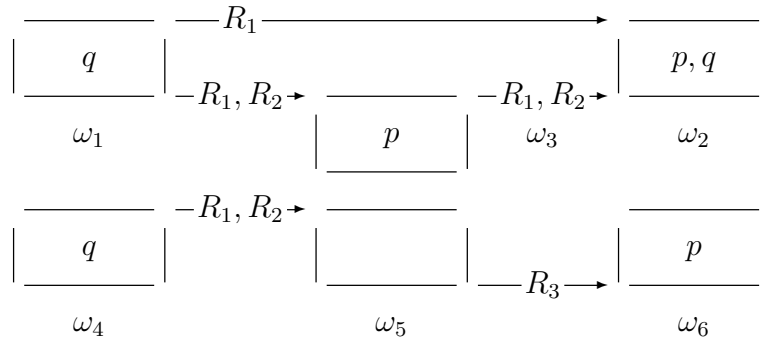


FIGURA 3.2 – Modelo para KT45

Definição 3.3 (*Relação de satisfação de modelo*) Tome um modelo $\mathbf{M} = (W, (R_i)_{i \in \mathcal{A}}, \mathbf{v})$ de KT45. Definimos quando φ é verdadeira em um mundo ω de um modelo \mathbf{M} via uma relação de satisfação $\omega \models \varphi$ por indução sobre φ .

- $(\mathbf{M}, \omega_0) \models p$ para uma proposição primitiva p se $\mathbf{v}(\omega_0)(p) = true$
- $(\mathbf{M}, \omega_0) \models \neg\varphi$ se $(\mathbf{M}, \omega_0) \not\models \varphi$
- $(\mathbf{M}, \omega_0) \models \varphi \wedge \psi$ se $(\mathbf{M}, \omega_0) \models \varphi$ e $(\mathbf{M}, \omega_0) \models \psi$
- $(\mathbf{M}, \omega_0) \models K_i\varphi$ se $(\mathbf{M}, \omega_1) \models \varphi$ para todo ω_1 tal que $(\omega_0, \omega_1) \in K_i$
- $(\mathbf{M}, \omega_0) \models E_G\varphi$ se $(\mathbf{M}, \omega_0) \models K_i\varphi$ para todo $i \in G$
- $(\mathbf{M}, \omega_0) \models C_G\varphi$ se $(\mathbf{M}, \omega_0) \models E_G^k\varphi$ para $k = 1, 2, \dots$,
onde $E_G^1\varphi =_{def} E_G\varphi$ e $E_G^{k+1}\varphi =_{def} E_G E_G^k\varphi$.

A primeira cláusula mostra como usamos \mathbf{v} para definir a semântica das proposições primitivas. As duas outras cláusulas, que definem a semântica do \neg e do \wedge , são as cláusulas padrão da lógica proposicional. A quarta cláusula é destinada a capturar a intuição de que o agente i sabe que φ exatamente se φ é verdade em todos os mundos que i pensa que são possíveis. A quinta cláusula define a semântica de $E_G\varphi$ da maneira mais óbvia: $E_G\varphi$ é válida se cada agente em G sabe que φ , isto é, se $K_i\varphi$ vale para todo $i \in G$. Finalmente, a última cláusula captura a definição intuitiva de conhecimento comum discutida acima.

Definição 3.4 (*Relação de satisfação*) Tome um modelo $\mathbf{M} = (W, (R_i)_{i \in \mathcal{A}}, \mathbf{v})$ de KT45. Definimos quando φ é verdadeira em x via uma relação de satisfação $x \Vdash \varphi$ por indução sobre φ . (Novamente, escrevemos $\mathbf{M}, x \Vdash \varphi$ se queremos enfatizar o modelo \mathbf{M} , o que nos dá, então, a Definição 3.3.)

- $\omega_0 \Vdash p$ sse $p \in \underline{\square}(\omega_0)$
- $\omega_0 \Vdash \neg\varphi$ sse $\omega_0 \not\Vdash \varphi$
- $\omega_0 \Vdash \varphi \wedge \psi$ sse $\omega_0 \Vdash \varphi$ e $\omega_0 \Vdash \psi$
- $\omega_0 \Vdash \varphi \vee \psi$ sse $\omega_0 \Vdash \varphi$ ou $\omega_0 \Vdash \psi$
- $\omega_0 \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ sse $\omega_0 \Vdash \psi$ sempre que temos $\omega_0 \Vdash \varphi$
- $\omega_0 \Vdash K_i\psi$ sse, para cada $\omega_1 \in W$, $R_i(\omega_0, \omega_1)$ implica $\omega_1 \Vdash \psi$
- $\omega_0 \Vdash E_G\psi$ sse, para cada $i \in G$, $\omega_0 \Vdash K_i\psi$
- $\omega_0 \Vdash C_G\psi$ sse, para cada $k = 1, 2, \dots$, temos $\omega_0 \Vdash E_G^k\psi$,
onde E_G^k significa $E_G E_G \dots E_G$ (k vezes)
- $\omega_0 \Vdash D_G\psi$ sse, para cada $\omega_1 \in W$, temos $\omega_1 \Vdash \psi$,
sempre que $R_i(\omega_0, \omega_1)$ para todo $i \in G$.

Comparando essa definição com aquela da lógica modal básica, vemos que os casos para conectivos booleanos são os mesmos. Cada K_i comporta-se como uma \Box , mas refere-se a sua própria relação de acessibilidade R_i . Não há equivalentes de \Diamond , mas, como já enunciado, podemos recuperá-los como $\neg K_i \neg$. O conectivo E_G é definido em termos de K_i , e C_G é definido em termos de E_G .

Muitos dos resultados que temos para lógica modal básica (com uma única relação de acessibilidade) também são válidos nesta configuração mais geral, que tem várias relações de acessibilidade. Resumindo,

- uma estrutura \mathbf{F} para $KT45^n$ ($(W, (R_i)_{i \in \mathbf{A}})$) para a lógica modal $KT45^n$ é um conjunto W (de mundos) e, para cada $i \in \mathbf{A}$, uma relação R_i sobre W .
- uma estrutura $\mathbf{F} = (W, (R_i)_{i \in \mathbf{A}})$ para $KT45^n$ é dita satisfazer φ , o que é escrito $\mathbf{F} \models \varphi$ se, para cada função de rotulação \mathcal{L}_L e cada $\omega \in W$, temos $\mathbf{M}, \omega \Vdash \varphi$, onde $\mathbf{M} = (W, (R_i)_{i \in \mathbf{A}}, \mathbf{v})$.

O teorema seguinte é útil para responder questões sobre fórmulas que envolvem E e C . Seja $\mathbf{M} = (W, (R_i)_{i \in \mathbf{A}}, \mathbf{v})$ um modelo para $KT45^n$ e $\omega_0, \omega_1 \in W$. Dizemos que y é G -atingível em k passos a partir de x se há $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1} \in W$ e i_1, i_2, \dots, i_k em G tais que

$$x R_{i_1} \omega_1 R_{i_2} \omega_2 \dots R_{i_{k-1}} \omega_{k-1} R_{i_k} y.$$

Também dizemos que y é G -atingível a partir de x se existe algum k tal que y é G -atingível em k passos.

- Teorema 3.1**
1. $x \Vdash E_G^k \varphi$ sse, para todos os y que sejam G -atingíveis a partir de x em k passos, temos $y \Vdash \varphi$.
 2. $x \Vdash C_G \varphi$ sse, para todos os y que sejam G -atingíveis a partir de x , temos $y \Vdash \varphi$.

Prova:

1. Primeiro, suponha que $y \Vdash \varphi$ para todos os y G -atingíveis a partir de x em k passos. Provaremos que $x \Vdash E_G^k \varphi$. É suficiente mostrar que $x \Vdash K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_k} \varphi$ para qualquer $i_1, i_2, \dots, i_k \in G$. Tome qualquer $i_1, i_2, \dots, i_k \in G$ e qualquer $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}$ e y tal que $x R_{i_1} \omega_1 R_{i_2} \omega_2 \dots R_{i_{k-1}} \omega_{k-1} R_{i_k} y$. Como y é G -atingível a partir de x em k passos, temos $y \Vdash \varphi$ por nossa suposição, então $x \Vdash K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_k} \varphi$ como exigido.
Por outro lado, suponha que $x \Vdash E_G^k \varphi$ e y é G -atingível a partir de x em k passos. Devemos mostrar que $y \Vdash \varphi$. Tome i_1, i_2, \dots, i_k pela G -atingibilidade; como $x \Vdash E_G^k \varphi$ implica $x \Vdash K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_k} \varphi$, temos $y \Vdash \varphi$.
2. Este argumento é parecido.

Essa noção de conhecimento é razoável? Quais são suas propriedades? Uma maneira de investigar esse assunto é tentar encontrar uma caracterização completa de fórmulas *válidas*, isto é, aquelas fórmulas que são verdadeiras em qualquer estado em qualquer estrutura.

Se ignorarmos os operadores E_G e C_G por um momento, as fórmulas válidas na linguagem com apenas K_i podem ser completamente caracterizadas pelo seguinte sistema de axiomas *correto* e *completo*, devido a Hintikka [HIN62]; isto é, todos os axiomas são válidos e qualquer fórmula válida pode ser provada a partir desses axiomas.

A1. Todas as instâncias das tautologias proposicionais;

A2. $K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\psi$;

A3. $K_i\varphi \Rightarrow \varphi$;

A4. $K_i\varphi \Rightarrow K_iK_i\varphi$;

A5. $\neg K_i\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\varphi$.

R1. A partir de φ e $\varphi \Rightarrow \psi$, infere-se ψ (modus ponens)

R2. A partir de φ , infere-se $K_i\varphi$

A1 e R1, evidentemente, são suportados pela lógica proposicional. A2 diz que o conhecimento de um agente é fechado sob a implicação. A3 diz que um agente sabe apenas coisas que são verdadeiras. Este é o axioma que é usualmente tomado para distinguir *conhecimento* de *crença*. Você não pode saber um fato que é falso, embora você possa acreditar nele. A4 e A5 são axiomas de introspecção. Intuitivamente, eles dizem que um agente é introspectivo: ele pode olhar para sua base de conhecimentos e saberá o que ele sabe e o que não sabe. Existem numerosos artigos na literatura filosófica que discutem a propriedade desses axiomas. Os filósofos tendem a rejeitar ambos os axiomas de introspecção por diversas razões.

A validade de A3, A4 e A5 é devida ao fato de que tomamos os K_i s como relações de equivalência. Em um sentido preciso, A3 segue do fato de que K_i é reflexiva; A4, do fato de que é transitiva; e A5, do fato de que é simétrica e transitiva. Modificando-se essas propriedades das relações K_i , podemos obter noções de conhecimento que satisfazem axiomas diferentes. Por exemplo, tomando K_i reflexiva e transitiva, mas não necessariamente simétrica, mantemos A3 e A4, mas perdemos A5; modificações similares dão uma noção que corresponde à crença, e não satisfazem A3.

Entretanto, a abordagem dos mundos possíveis parece ligar-nos a A2 e R2. Isso sugere uma visão de nossos agentes como “conhecedores ideais”, aqueles que sabem todas as fórmulas válidas, assim como todas as conseqüências lógicas de seu conhecimento. Isso certamente não parece ser um modelo realístico para agentes humanos (embora possa talvez ser aceitável como uma primeira aproximação). Também não parece nem ser um modelo adequado para uma base de conhecimento que é limitada em termos de tempo de computação e espaço em memória que pode usar.

Uma vez incluídos os operadores E_G e C_G na linguagem, obtemos mais propriedades. Essas são completamente caracterizadas pelos seguintes axiomas adicionais:

C1. $E_G\varphi \leftrightarrow \bigwedge_{i \in G} K_i\varphi$

C2. $C_G\varphi \leftrightarrow E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$ (axioma do ponto fixo)

RC1. A partir de $\varphi \rightarrow E_G(\varphi \wedge \psi)$, infere-se $\varphi \rightarrow C_G\psi$ (regra de indução)

O axioma do ponto fixo diz que o conhecimento comum de φ é válido exatamente quando o grupo G está em uma situação particular onde todos em G sabem que φ é válido e que o conhecimento comum de φ é válido. Isso revela que esta é a propriedade chave do conhecimento comum que o torna um pré-requisito para concordância e coordenação. A regra de indução oferece uma técnica para verificar que o conhecimento comum é válido em uma certa situação. A razão para o seu nome é que uma vez que saibamos que $\varphi \rightarrow E_G(\varphi \wedge \psi)$ é válida, então podemos mostrar, por indução sobre k , que $\varphi \rightarrow E_G^k(\varphi \wedge \psi)$ é válida para todo k , a partir do que podemos concluir que $\varphi \rightarrow C_G\psi$ é válida.

É difícil dizer se uma dada fórmula define uma propriedade de conhecimento válida? Podemos dar uma resposta em termos de teoria da complexidade. Pode ser mostrado

que, se uma fórmula φ é válida se e somente se ela é verdadeira em qualquer estado em qualquer estrutura com pelo menos 2^n estados, onde n é o tamanho de φ vista como uma string de símbolos. A partir desse resultado, segue que a validade é decidível: existe um algoritmo que, dada uma fórmula φ , pode dizer se ela é válida ou não. Entretanto, decidir a validade não é fácil. Se consideramos sistemas com apenas um agente, então o problema é co-NP-completo, assim como o é para a lógica proposicional [HAL95]. Mas uma vez que consideramos sistemas com dois agentes ou mais, qualquer algoritmo que decida a validade exige espaço polinomial no tamanho da fórmula de entrada, mesmo se não incluirmos o conhecimento comum na linguagem. Uma vez que incluirmos conhecimento comum, a complexidade pula para tempo exponencial [FAG95].

3.5 Sistemas de prova

Algumas fórmulas válidas em $KT45^n$

A fórmula **K** é válida para os conectivos K_i , E_G , C_G e D_G , isto é, temos os esquemas de fórmulas correspondentes

$$\begin{aligned} K_i\varphi \wedge K_i(\varphi \rightarrow \psi) &\rightarrow K_i\psi \\ E_G\varphi \wedge E_G(\varphi \rightarrow \psi) &\rightarrow E_G\psi \\ C_G\varphi \wedge C_G(\varphi \rightarrow \psi) &\rightarrow C_G\psi \\ D_G\varphi \wedge D_G(\varphi \rightarrow \psi) &\rightarrow D_G\psi \end{aligned}$$

Isso significa que esses “níveis” diferentes de conhecimento são fechados sob a consequência lógica. Por exemplo, se certos fatos são conhecimento comum e alguns outros fatos seguem logicamente deles, então esse fato também é conhecimento comum.

Observe que E , C e D são conectivos “tipo box”, no sentido de que eles quantificam universalmente sobre algumas relações de acessibilidade. Isso quer dizer, podemos definir as relações R_{E_G} , R_{D_G} e R_{C_G} em termos das relações R_i como segue:

$$\begin{aligned} R_{E_G}(x, y) &\text{ sse } R_i(x, y) \text{ para algum } i \in G \\ R_{D_G}(x, y) &\text{ sse } R_i(x, y) \text{ para todos os } i \in G \\ R_{C_G}(x, y) &\text{ sse } R_{E_G}^k(x, y) \text{ para cada } k \geq 1 \end{aligned}$$

Segue daí que E_G , D_G e C_G satisfazem a fórmula **K** com respeito às relações de acessibilidade R_{E_G} , R_{D_G} e R_{C_G} , respectivamente.

Teorema 3.2 *Seja $\mathbf{F} = (W, R)$ uma estrutura.*

1. *As seguintes declarações são equivalentes:*
 - R é reflexiva;
 - \mathbf{F} satisfaz $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
 - \mathbf{F} satisfaz $\Box p \rightarrow p$
2. *As seguintes declarações são equivalentes:*
 - R é transitiva;
 - \mathbf{F} satisfaz $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
 - \mathbf{F} satisfaz $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

nome	esquema de fórmula	propriedade de R
T	$\Box\varphi \rightarrow \varphi$	reflexiva
B	$\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	simétrica
D	$\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	serial
4	$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	transitiva
5	$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	euclideana
	$\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$	funcional
	$\Box(\varphi \wedge \Box\varphi \rightarrow \psi) \vee \Box(\psi \wedge \Box\psi \rightarrow \varphi)$	linear

TABELA 3.4 – Propriedade de R correspondente a algumas fórmulas

Sobre as outras fórmulas, temos que, como estipulamos que as relações R_i são relações de equivalência, segue dos análogos multimodais do Teorema 3.2 e da Tabela 3.4 que as seguintes fórmulas são válidas em $KT45^n$ (para cada agente i):

$K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$ introspecção positiva
 $\neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi$ introspecção negativa
 $K_i\varphi \rightarrow \varphi$ verdade

Essas fórmulas também são válidas para D_G , pois R_{D_G} também é uma relação de equivalência, mas essas não se generalizam automaticamente para E_G e C_G . Por exemplo, $E_G\varphi \rightarrow E_G E_G\varphi$ não é válida; se fossem válidas, isso implicaria que o conhecimento comum não seria nada além do conhecimento por todos. O esquema $\neg E_G\varphi \rightarrow E_G\neg E_G\varphi$ também não é válido. A falha dessas fórmulas em ser válidas pode ser rastreada até o fato de que R_{E_G} não é necessariamente uma relação de equivalência, embora cada R_i seja uma relação de equivalência.

Entretanto, R_{E_G} é reflexiva, e então $E_G\varphi \rightarrow \varphi$ é válida, gerando que $G \neq \emptyset$ (se $G = \emptyset$, então $E_G\varphi$ é válida por vacuidade, mesmo se φ for falsa).

Como R_{C_G} é uma relação de equivalência, as fórmulas **T**, **4** e **5** acima são válidas para C_G , embora a terceira ainda exija a condição de que $G \neq \emptyset$.

3.5.1 Dedução natural para $KT45^n$

O sistema de prova para $KT45$ é facilmente estendido para $KT45^n$ (mas, por simplicidade, omitimos a referência ao conetivo D).

1. As caixas tracejadas agora vêm em diversos “sabores” para conetivos modais diferentes; indicaremos a modalidade no canto superior esquerdo das caixas tracejadas.
2. Os axiomas **T**, **4** e **5** podem ser usadas para qualquer K_i , enquanto os axiomas **4** e **5** podem ser usados para C_G , mas não para E_G (lembre da discussão na seção 3.3.1).
3. A partir de $C_G\varphi$, podemos deduzir $E_G^k\varphi$, para qualquer k (chamamos essa regra de CE); ou poderíamos ir diretamente a $K_{I_1} \dots K_{I_k}\varphi$ para quaisquer agentes i_1, \dots, i_k . Essa regra é chamada de CK . Estritamente falando, é um conjunto inteiro de tais regras, uma para cada opção de i_1, \dots, i_k , mas nós nos referimos a todos eles como CK .
4. A partir de $E_G\varphi$, podemos deduzir $K_i\varphi$ para qualquer $i \in G$ (chamada EK_i). A partir de $\bigwedge_{i \in G} K_i\varphi$, podemos deduzir $E_G\varphi$ (regra KE). Note que a prova da regra EK_i é como uma regra de eliminação do \wedge generalizada, enquanto KE comporta-se como uma regra de introdução do \wedge .

$\frac{\left[\begin{array}{c} \cdot K_i \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \right]}{K_i \varphi} K_i i$	$\frac{\left[\begin{array}{c} \cdot E_G \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \right]}{E_G \varphi} E_G i$	$\frac{\left[\begin{array}{c} \cdot C_G \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \right]}{C_G \varphi} C_G i$
$\frac{K_i \varphi}{\left[\begin{array}{c} \cdot K_i \vdots \\ \varphi \\ \vdots \end{array} \right]} K_i e$	$\frac{E_G \varphi}{\left[\begin{array}{c} \cdot E_G \vdots \\ \varphi \\ \vdots \end{array} \right]} E_G e$	$\frac{C_G \varphi}{\left[\begin{array}{c} \cdot C_G \vdots \\ \varphi \\ \vdots \end{array} \right]} C_G e$
$\frac{K_i \varphi \text{ para cada } i \in G}{E_G \varphi} KE$	$\frac{E_G \varphi \text{ para cada } i \in G}{K_i \varphi} EK_i$	$\frac{C_G \varphi}{E_G \dots E_G \varphi} CE$
$\frac{C_G \varphi}{K_{i_1} \dots K_{i_k} \varphi} CK$	$\frac{C_G \varphi}{C_G C_G \varphi} C4$	$\frac{\neg C_G \varphi}{C_G \neg C_G \varphi} C5$
$\frac{K_i \varphi}{\varphi} KT$	$\frac{K_i \varphi}{K_i K_i \varphi} K4$	$\frac{\neg K_i \varphi}{K_i \neg K_i \varphi} K5$

TABELA 3.5 – Regras de dedução natural para $KT45^n$

As provas das regras para $KT45^n$ são resumidas na Tabela 3.5. Como antes, podemos pensar nas regras $K4$ e $K5$ e $C4$ e $C5$ como relaxamentos das regras sobre movimentação de fórmulas para dentro e para fora das caixas de prova tracejadas. Como a regra $K4$ permite-nos duplicar K_i , podemos pensar nela como permitindo-nos mover fórmulas que começam com K_i para dentro de caixas tracejadas K_i . De maneira similiar, a regra $C5$ tem o efeito de permitir-nos mover fórmulas que começam com $\neg C_G$ para dentro de caixas tracejadas C_G .

Uma maneira intuitiva de pensar sobre as caixas tracejadas é que as fórmulas dentro delas são conhecidas dos agentes em questão. Quando você abre uma caixa tracejada K_i , você está considerando o que o agente i sabe. É muito intuitivo que uma fórmula qualquer φ não possa ser trazida para dentro de uma caixa tracejada como essa, porque a simples veracidade de φ não significa que o agente i a conheça. Note que isso significa, por exemplo, que você não pode usar a regra $\neg i$ se uma das premissas da regra está fora da caixa tracejada em que você está trabalhando.

Observe o poder de $C\varphi$ nas premissas: podemos trazer φ para dentro de *qualquer* caixa tracejada (pelas regras CK e $K_i e$), não importando quão profundamente aninhada. $E^k\varphi$, por outro lado, significa que φ pode ser trazida para dentro de qualquer caixa tracejada com aninhamento $\leq k$. (Compare isto com o Teorema 3.1.)

Exemplo 3.3 *Mostramos que o seqüente $C(p \vee q), K_1(K_2p \vee K_2\neg p), K_1\neg K_2q \vdash K_1p$ é provável na lógica modal $KT45^n$. (Nesta seção, escrevemos simplesmente \vdash para provas na lógica $KT45^n$, a menos de indicação do contrário.) Isso significa: se é conhecimento comum que $p \vee q$; e o agente 1 sabe que o agente 2 sabe se p é o caso e também sabe que o agente 2 não sabe que q é verdade; então o agente 1 sabe que p é verdade. Veja a Figura 3.6. Na linha 12, derivamos q a partir de $\neg p$ e $p \vee q$. Em vez de mostrar toda a derivação na lógica proposicional (o que não é o foco aqui), resumimos, escrevendo “prop” (para uma inferência da lógica proposicional) como justificativa.*

1	$C(p \vee q)$		premissa
2	$K_1(K_2p \vee K_2\neg p)$		premissa
3	$K_1\neg K_2q$		premissa
4	$K_1K_2(p \vee q)$		$CK1$
5	$K_1K_2(p \vee q)$		K_1e4
6	$K_2p \vee K_2\neg p$		K_1e2
7	$\neg K_2q$		K_1e3
8	K_2p	hipótese	$K_2\neg p$ hipótese
9	p	axioma T8	$K_2\neg p$ K_2e8
10			$p \vee q$ K_2e5
11			q <i>prop</i> 9, 10
12			K_2q $K_2i9 - 11$
13			\perp $\neg e12, 7$
14			p $\perp e13$
15	p		$\vee e6, 8 - 14, 8 - 14$
16	K_1p		$K_1i5 - 15$

TABELA 3.6 – Uma prova de $C(p \vee q), K_1(K_2p \vee K_2\neg p), K_1\neg K_2q \vdash K_1p$

3.5.2 Formalizando os exemplos

Agora que configuramos a lógica modal $KT45^n$, podemos voltar nossa atenção para a questão de como representar os jogos dos homens sábios e das crianças sujas nesta lógica. Infelizmente, a despeito de sua sofisticação, nossa lógica é simples demais para capturar todas as nuances desses exemplos. Embora ela tenha conectivos para representar itens diferentes de conhecimento válido por agentes diferentes, não tem qualquer aspecto temporal, e portanto não pode capturar diretamente a maneira na qual o conhecimento dos agentes muda conforme o tempo passa. Superaremos essa limitação, considerando vários instantes durante os quais o tempo é fixado.

O quebra-cabeça dos homens sábios

Lembre que existem três homens sábios; e é conhecimento comum que existem três chapéus vermelhos e dois chapéus brancos. O rei coloca um chapéu na cabeça de cada um dos homens sábios e pergunta-lhes seqüencialmente se eles sabem a cor do chapéu que está na sua própria cabeça – eles não podem ver o seu próprio chapéu. Supomos que o primeiro homem diga que não sabe; então o segundo diz que não sabe. Queremos provar que, qualquer que seja a distribuição dos chapéus, o terceiro homem agora sabe que o seu chapéu é vermelho.

Considere que p_i significa que o homem i tem um chapéu vermelho; então $\neg p_i$ significa que o homem i tem um chapéu branco. Seja Γ o conjunto de fórmulas

$$\{C(p_1 \vee p_2 \vee p_3), \\ C(p_1 \rightarrow K_2 p_1), C(\neg p_1 \rightarrow K_2 \neg p_1), \\ C(p_1 \rightarrow K_3 p_1), C(\neg p_1 \rightarrow K_3 \neg p_1), \\ C(p_2 \rightarrow K_1 p_2), C(\neg p_2 \rightarrow K_1 \neg p_2), \\ C(p_2 \rightarrow K_3 p_2), C(\neg p_2 \rightarrow K_3 \neg p_2), \\ C(p_3 \rightarrow K_1 p_3), C(\neg p_3 \rightarrow K_1 \neg p_3), \\ C(p_3 \rightarrow K_2 p_3), C(\neg p_3 \rightarrow K_2 \neg p_3)\}.$$

Isso corresponde à configuração inicial: é conhecimento comum (de todos) que um dos chapéus tem que ser vermelho e que cada homem pode ver a cor dos chapéus dos outros dois homens.

A declaração de que o primeiro homem não sabe a cor do seu próprio chapéu leva em conta a fórmula $C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1)$ e ocorre de maneira semelhante com o segundo homem.

Uma tentativa ingênua de formalizar o problema dos homens sábios seria algo como isto: simplesmente provamos

$$\Gamma, C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1), C(\neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2) \vdash K_3 p_3,$$

isto é, se Γ é verdade, e as declarações são feitas, então o terceiro homem sabe que seu chapéu é vermelho. Entretanto, isso falha ao capturar o fato de que o tempo passa entre as declarações. O fato de que $C\neg K_1 p_1$ é verdade depois da primeira declaração não significa que é verdadeiro depois de algumas declarações subseqüentes. Por exemplo, se alguém anuncia p_1 , então Cp_1 torna-se verdadeiro.

A razão pela qual essa formalização é incorreta, então, é que, embora o conhecimento aumente com o tempo, a *falta* de conhecimento não cresce com o tempo. Se eu sei φ , então (assumindo que φ não muda) eu saberei disso até o último instante; mas se eu *não* sei φ , pode ser que eu *saiba* isso no próximo instante, pois eu posso *adquirir mais conhecimento*.

Para formalizar corretamente o problema dos homens sábios, precisamos quebrá-lo em duas implicações, cada uma correspondendo a uma declaração. Quando o primeiro homem declara que não sabe a cor do seu próprio chapéu, uma certa fórmula φ *positiva* torna-se conhecimento comum. Nosso raciocínio informal explicou que todos os homens poderiam então descartar a situação $\vee B B$ pois, dado $p_1 \vee p_2 \vee p_3$, leva-os ao conhecimento comum de $p_2 \vee p_3$. Portanto, φ é apenas $p_2 \vee p_3$, e precisamos provar a implicação

$$\textbf{Implicação 1. } \Gamma, C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1) \vdash C(p_2 \vee p_3).$$

Uma prova desse seqüente pode ser encontrada na Figura 3.7. Como $p_2 \vee p_3$ é uma fórmula positiva, ela *persiste com o tempo* e pode ser usada em conjunção com o segundo anúncio para provar a conclusão desejada:

Implicação 2. $\Gamma, C(p_2 \vee p_3), C(\neg K_2 p_2, \vee \neg K_2 \neg p_2) \vdash K_3 p_3$.

Este método exige um pensamento cuidadoso: dada uma declaração de informação negativa (tal como um homem declarando que não sabe qual é a cor do seu chapéu), precisamos descobrir quais fórmulas de conhecimento positivo podem ser derivadas a partir dessa, e tal conhecimento tem que ser suficiente para permitir-nos prosseguir para a próxima rodada (= fazer até mais progresso em direção à resolução do quebra-cabeça).

Os segmentos de prova de rotina como aqueles das linhas 12-16 da Figura 3.7 podem ser abreviados dentro de um passo até que todas as provas de regras participantes sejam registradas. A representação mais curta resultante pode ser vista na Figura 3.8.

Na Figura 3.7, note que as premissas nas linhas 2 e 5 não são usadas. As premissas nas linhas 2 e 3 permanecem para qualquer fórmula para um dado valor de i e j , gerando que $i \neq j$; isso explica a inferência feita na linha 8. Na Figura 3.9, note novamente que as premissas das linhas 1 e 5 não são usadas. Observe também que o axioma **T**, em conjunção com CK, permite-nos inferir φ a partir de qualquer $C\varphi$, embora tivéssemos que dividi-la em dois passos separados nas linhas 16 e 17. Implementações práticas provavelmente permitiriam regras híbridas que condensassem tais raciocínios em um único passo.

1	$C(p_1 \vee p_2 \vee p_3)$	premissa
2	$C(p_1 \rightarrow K_j p_i)$	premissa, ($i \neq j$)
3	$C(\neg p_i \rightarrow K_j \neg p_i)$	premissa, ($i \neq j$)
4	$C\neg K_1 p_1$	premissa
5	$C\neg K_1 \neg p_1$	premissa
6	C	
7	$\neg p_2 \wedge neg p_3$	suposição
8	$\neg p_2 \rightarrow K_1 \neg p_2$	C e 3 (i,j)=(2,1)
9	$\neg p_3 \rightarrow K_1 \neg p_3$	C e 3 (i,j)=(3,1)
10	$K_1 \neg p_2 \wedge K_1 \neg p_3$	prop 7,8,9
11	$K_1 \neg p_2$	$\wedge e_1$ 10
12	$K_1 \neg p_3$	$\wedge e_2$ 10
13	K_1	
14	$\neg p_2$	K_1 e 11
15	$\neg p_3$	K_1 e 12
16	$\neg p_2 \wedge \neg p_3$	\wedge i 14,15
17	$p_1 \vee p_2 \vee p_3$	C e 1
18	p_1	prop 16,17
19	$K_1 p_1$	K_1 i 11-18
20	$\neg K_1 p_1$	C e 4
21	\perp	\neg e 19,20
22	$\neg(\neg p_2 \wedge \neg p_3)$	\neg i 7-21
23	$p_2 \vee p_3$	prop 22
24	$C(p_2 \vee p_3)$	C i 6-23

TABELA 3.7 – Prova do seqüente “Implicação 1” para o quebra-cabeça dos homens sábios

O quebra-cabeça das crianças sujas de lama

1	$C(p_1 \vee p_2 \vee p_3)$	premissa
2	$C(p_1 \rightarrow K_j p_i)$	premissa, ($i \neq j$)
3	$C(\neg p_i \rightarrow K_j \neg p_i)$	premissa, ($i \neq j$)
4	$C\neg K_1 p_1$	premissa
5	$C\neg K_1 \neg p_1$	premissa
6	C	
7	$\neg p_2 \wedge neg p_3$	suposição
8	$\neg p_2 \rightarrow K_1 \neg p_2$	C e 3 (i,j)=(2,1)
9	$\neg p_3 \rightarrow K_1 \neg p_3$	C e 3 (i,j)=(3,1)
10	$K_1 \neg p_2 \wedge K_1 \neg p_3$	prop 7,8,9
11	K_1	
12	$\neg p_2 \wedge \neg p_3$	$\wedge e_1, K_1 e, \wedge i$
13	$p_1 \vee p_2 \vee p_3$	C e 1
14	p_1	prop 16,17
15	$K_1 p_1$	$K_1 i$ 11-14
16	$\neg K_1 p_1$	C e 4
17	\perp	$\neg e$ 15, 16
18	$\neg(\neg p_2 \wedge \neg p_3)$	$\neg i$ 7-17
19	$p_2 \vee p_3$	prop 18
20	$C(p_2 \vee p_3)$	C i 6-19

TABELA 3.8 – Uma representação mais compacta da prova da figura anterior

Suponha que existam n crianças. Considere que p_1 significa que a i ésima criança tem lama em sua testa. Consideramos o cenário 2, no qual o pai anuncia que uma das crianças está suja de lama. De maneira similar ao caso dos homens sábios, é conhecimento comum que cada criança pode ver as outras crianças, então ela sabe se as outras têm lama na testa ou não. Portanto, por exemplo, temos que $C(p_1 \rightarrow K_2 p_1)$, o que diz que é conhecimento comum que, se a criança 1 está suja de lama, então a criança 2 sabe disso e também $C(\neg p_1 \rightarrow K_2 \neg p_1)$. Seja Γ a coleção de fórmulas:

$$C(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \\ \bigwedge_{i \neq j} C(p_i \rightarrow K_j p_i) \\ \bigwedge_{i \neq j} C(\neg p_i \rightarrow K_j \neg p_i).$$

Note que $\bigwedge_{i \neq j} \varphi_{(i,j)}$ é uma abreviatura para a conjunção de todas as fórmulas $\varphi_{(i,j)}$, onde i é diferente de j . Seja G qualquer conjunto de crianças. Exigiremos fórmulas da forma

$$\alpha_G \stackrel{def}{=} \bigwedge_{i \in G} p_i \wedge \bigwedge_{i \notin G} \neg p_i,$$

A fórmula α_G declara que é precisamente a criança de G que tem a testa enlameada.

Suponha agora que $k = 1$, isto é, que uma criança tenha lama na testa. Gostaríamos de mostrar que essa criança sabe que é essa uma. Provamos a seguinte implicação.

Implicação 1. $\Gamma, \alpha_{\{i\}} \vdash K_i p_i$.

Isso diz que, se a situação atual é aquela em que apenas uma criança (chamada i) tem lama na testa, então esse agente saberá disso. Nossa prova segue exatamente as mesmas linhas da intuição: i vê que nenhuma das outras crianças tem lama na testa, mas

1	$C(p_1 \vee p_2 \vee p_3)$	premissa
2	$C(p_1 \rightarrow K_j p_i)$	premissa, ($i \neq j$)
3	$C(\neg p_i \rightarrow K_j \neg p_i)$	premissa, ($i \neq j$)
4	$C\neg K_2 p_2$	premissa
5	$C\neg K_2 \neg p_2$	premissa
6	$C(p_2 \vee p_3)$	premissa
7	K_3	
8	$\neg p_3$	suposição
9	$\neg p_3 \rightarrow K_2 \neg p_3$	CK 3 (i,j)=(3,2)
10	$K_2 \neg p_3$	\rightarrow e 9,8
11	K_2	
12	$\neg p_3$	K_2 e 10
13	$p_2 \vee p_3$	Ce 6
14	p_2	prop 12,13
15	$K_2 p_2$	K_2 i 11-14
16	$K_i \neg K_2 p_2$	CK 4, para cada i
17	$\neg K_2 p_2$	KT 16
18	\perp	\neg e 15, 17
19	p_3	RAA 8-18
20	$K_3 p_3$	K_3 i 7-19

TABELA 3.9 – Prova do seqüente “Implicação 2” para o quebra-cabeça dos homens sábios

sabe que pelo menos uma tem lama na testa, então sabe que deve ser ela própria quem tem a testa enlameada. A prova é dada na Figura 3.10.

Note que o comentário “para cada $j \neq i$ ” significa que fornecemos esse argumento para qualquer j assim. Portanto, podemos formar a conjunção de todas essas inferências que deixamos implícitas na inferência da linha 10.

Suponha, entretanto, que não é o caso de que existe apenas um criança com lama na testa. Nesse caso, todas as crianças declaram na primeira rodada paralela que elas não sabem se elas estão enlameadas ou não, o que corresponde à fórmula

$$A \stackrel{def}{=} C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1) \wedge \dots \wedge C(\neg K_n p_n \wedge \neg K_n \neg p_n).$$

No exemplo do quebra-cabeça dos homens sábios, vimos que é perigoso colocar o anúncio A ao lado das premissas Γ , porque não se pode garantir que a verdade de A (que tem declarações negativas sobre o conhecimento das crianças) persista com o tempo. Então, procuramos alguma fórmula positiva que represente o que a criança aprendeu ao ouvir o anúncio. Como no exemplo dos homens sábios, essa fórmula está implícita no raciocínio informal sobre as crianças sujas de lama dado na Seção 3.1.1; se é conhecimento comum que existam pelo menos k crianças sujas de lama, então, depois de uma declaração da forma A , será conhecimento comum que existam pelo menos $k+1$ crianças sujas de lama.

Portanto, depois da primeira declaração de A , o conjunto de premissas é

$$\Gamma, \bigwedge_{1 \leq i \leq n} C\neg \alpha_{\{i\}}.$$

Isso é Γ junto com o conhecimento comum de que o conjunto de crianças sujas de

1	$\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge p_1 \wedge \dots \wedge \neg p_n$	$\alpha_{\{i\}}$
2	$C(p_1 \vee \dots \vee p_n)$	em Γ
3	$\neg p_j$	$\wedge e$ 1, para cada $j \neq i$
4	$\neg p_j \rightarrow K_i \neg p_j$	em Γ , para cada $j \neq i$
5	$K_i \neg p_j$	$\rightarrow e$ 4,3, para cada $j \neq i$
6	$K_i(p_1 \vee \dots \vee p_n)$	CK 2
7	K_i	
8	$p_1 \vee \dots \vee p_n$	$K_i e$ 6
9	$\neg p_j$	$K_i e$ 5, para cada $j \neq i$
10	p_i	prop 9,8
11	$K_i p_i$	$K_i i$

TABELA 3.10 – Prova do seqüente “Implicação 1” para o quebra-cabeça das crianças sujas

lama não é um conjunto unitário.

Depois da segunda declaração A , o conjunto de premissas torna-se

$$\Gamma, \bigwedge_{1 \leq i \leq n} C \neg \alpha_{\{i\}}, \bigwedge_{i \neq j} C \neg \alpha_{\{i,j\}},$$

o que pode ser escrito como

$$\Gamma, \bigwedge_{|G| \leq 2} C \neg \alpha_G,$$

usando a seguinte notação:

α_G o conjunto das crianças sujas de lama é precisamente o conjunto G .

$\neg \alpha_G$ o conjunto das crianças sujas de lama é algum outro conjunto que não G .

$\bigwedge_{|G| \leq k} \neg \alpha_G$ o conjunto das crianças sujas de lama é de tamanho maior que k .

A implicação correspondente à segunda rodada é:

$$\Gamma, C(\bigwedge_{|G| \leq 2} \neg \alpha_G), \alpha_H \vdash \bigwedge_{i \in H} K_i p_i, \text{ onde } |H| = 3.$$

A implicação correspondente à k -ésima rodada é:

$$\mathbf{Implicação 2.} \Gamma, C(\bigwedge_{|G| \leq k} \neg \alpha_G), \alpha_H \vdash \bigwedge_{i \in H} K_i p_i, \text{ onde } |H| = k + 1.$$

Esta implicação está dizendo “Se todas as coisas em Γ são verdadeiras e se é conhecimento comum que o conjunto de crianças sujas de lama não é de tamanho menor ou igual a k e se na realidade ele é de tamanho $k + 1$, então cada uma dessas $k + 1$ crianças pode deduzir que elas estão enlameadas.” Note como isso encaixa em nossa noção intuitiva dada anteriormente neste texto.

Para provar a Implicação 2, tome qualquer $i \in H$. É suficiente provar que

$$\Gamma, C(\bigwedge_{|G| \leq k} \neg \alpha_G), \alpha_H \vdash \bigwedge_{i \in H} K_i p_i.$$

Usando $\wedge I$ repetidamente sobre todos os valores de i , isso nos dá uma prova da Implicação 2. Seja G igual a $H - \{i\}$; a prova de que $\Gamma, C(\neg \alpha_G), \alpha_H \vdash K_i p_i$ é dada na Figura 3.11. Ela é dada, seguindo os passos tomados na prova informal da Seção 3.1.1.

A linha 14 da prova da Figura 3.11 aplica várias instâncias de $\wedge I$ em seqüência e é um passo legítimo, pois as fórmulas nas linhas 11-13 foram mostradas “para cada” elemento no respectivo conjunto.

1	α_H	premissa
2	$C\neg\alpha_G$	premissa pois $ G \leq k$
3	p_j	\wedge e 1, para cada $j \in G$
4	$\neg p_k$	\wedge e 1, para cada $k \notin H$
5	$p_j \rightarrow K_i p_j$	em Γ para cada $j \in G$
6	$K_i p_j$	\rightarrow e 5,4, para cada $j \in G$
7	$\neg p_k \rightarrow K_i \neg p_k$	em Γ para cada $k \notin H$
8	$K_i \neg p_k$	\rightarrow e 7,4 para cada $k \notin H$
9	$K_i \neg\alpha_G$	CK 2
10	K_i	
11	p_j	K_i e 6 ($j \in G$)
12	$\neg p_k$	K_i e 8 ($k \notin H$)
13	$\neg p_i$	suposição
14	α_G	\wedge i 11,12,13
15	$\neg\alpha_G$	K_i e 9
16	\perp	\neg e 14,15
17	$\neg\neg p_i$	\neg i 13-16
18	p_i	$\neg\neg$ e 17
19	$K_i p_i$	K_i i 10-18

TABELA 3.11 – A prova de $\Gamma, C(\neg\alpha_G), \alpha_H \vdash K_i p_i$ usada para provar a “Implicação 2” para o quebra-cabeça das crianças sujas

Conclusões

A comparação entre os sistemas dedutivos pesquisados em nosso trabalho anterior [MAL2002] suscitou reflexões a respeito de aspectos como expressividade sintática, facilidade de construção de provas, clareza da apresentação de tais provas, além da uniformidade da linguagem (sintaxe) utilizada. Os sistemas rotulados, por constituírem uma abordagem híbrida, ou “solução de compromisso”, que combina as melhores características dos outros sistemas pesquisados, foram considerados os de maior interesse para nossos trabalhos atuais de pesquisa e aprofundamento, bem como para os trabalhos futuros de construção de provas e pesquisa e desenvolvimento de aplicações dentro da Ciência da Computação.

Dando continuidade à pesquisa iniciada no Trabalho Individual I referido, apresentamos aqui a utilização de *sistemas rotulados* [GAB96] em lógicas modais para representação do conhecimento [FAG95]. Sistemas rotulados, devido à sua uniformidade e capacidade de generalização, têm sido utilizados como uma abordagem unificadora de lógicas. Pudemos perceber, ao longo desta pesquisa, que isso permite que lógicas de diferentes famílias sejam apresentadas de maneira uniforme em uma única estrutura de trabalho. Esta apresentação partiu de conceitos básicos sobre a lógica clássica de primeira ordem, que fundamenta a tradução padrão. Analisamos também os principais métodos de tradução implícita (relacional, funcional e a semi-tradução).

Tendo introduzido esses conceitos básicos, apresentamos o sistema de dedução natural rotulada para lógica modal. Mostramos sua sintaxe e sua semântica. Nesta fase dos trabalhos, pudemos reforçar as conclusões obtidas no trabalho anterior de que o sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) proposicional pesquisado tem a vantagem de ser uniforme e mais geral (em mais do que um mundo atual inicial) do que os demais sistemas dedutivos para lógica modal.

Estudamos também as suas propriedades fundamentais, como correção, completude e correspondência, analisando algumas extensões, tendo em vista a apresentação rotulada desses sistemas. A seguir, estudamos, de forma geral, as lógicas modais para representação do conhecimento: sua sintaxe, sua semântica e seus sistemas de prova. A utilização do sistema de prova estudado foi ilustrada pela sua aplicação a exemplos clássicos da área de raciocínio sobre o conhecimento de agentes, tais como *muddy children puzzle* (o quebra-cabeça das crianças sujas de lama) e o *wise men puzzle* (o quebra-cabeça dos homens sábios).

Tanto o sistema dedutivo rotulado modal (MLDS) aqui apresentado como suas extensões para a lógica de conhecimento sugerem muitos outros ramos de investigação. Segundo [HAL95], as três áreas seguintes parecem ser onde as pesquisas mais avançadas levarão a progressos maiores: Conexões entre lógicas epistêmicas e *provas com conhecimento zero*; Raciocínio sobre conhecimento/crença que muda com o tempo; e Programação baseada em conhecimento. A correspondência entre MLDS e uma formalização tradicional de lógica modal pode garantir que as extensões existentes das lógicas modais também possam ser formalizadas dentro da estrutura de trabalho do MLDS. Portanto, consideramos interessante investigar, por exemplo, a formalização de sistemas baseados no tratamento do conhecimento e da crença como um MLDS.

Para esse tipo de sistema, no qual consistem nossos projetos de pesquisas a curto prazo, é importante que, além do mundo real, sejam levados em consideração outros mun-

dos de “estruturas da mente” onde fatos diferentes possam ser válidos. Uma formalização de MLDS adequada para tais sistemas exige a introdução de tipos de relações de acessibilidade diferentes e uma investigação de como elas podem interagir entre si. Pudemos perceber que isso deve levar a sistemas dedutivos rotulados multimodais. Como o objetivo principal de nossa pesquisa está sendo estudar sistemas de prova rotulados para lógicas de representação do conhecimento, concluímos que este trabalho contribui significativamente para o andamento futuro do trabalho de pesquisa.

Bibliografia

- [ARS94] AITKEN, S.; REICHGELT, H.; SHADBOLT, N. Resolution theorem proving in reified modal logics. *Journal of Automated Reasoning*. v. 12, p.103-129, 1994.
- [BAR77] BARWISE, J. (Ed.) *Handbook of mathematical logic*. North Holland, Amsterdam, 1977.
- [BEN90] BENEVIDES, M; MAIBAUM, T. A constructive natural deduction presentation for the modal connectives. Technical Report 90/13, Imperial College, Department of Computing, 1990.
- [BRO2002] BRODA, Krysia; GABBAY, Dov; LAMB, Luís; RUSSO, Alessandra. *Compiled labelled deductive systems: a uniform approach to logic presentation*. Londres: Imperial College, 2002. (manuscrito).
- [CHA97] CHAGROV, A.; ZAKHARYASCHEV, M. *Modal logic*. Oxford: Clarendon Press, 1997.
- [DGA94] D'AGOSTINO, Marcelo; GABBAY, Dov M. *A generalization of analytic deduction via labelled deductive systems*. Part I: Basic substructural logics. *Journal of Automated Reasoning*. 1994. n. 13, p. 243-281.
- [END72] ENDERTON, H. B. *A mathematical introduction to logic*. Academic Press, New York, 1972.
- [FAG95] FAGIN, R.; HALPERN, J.; MOSES, Y.; VARDI, M. *Reasoning about knowledge*. MIT Press, 1995.
- [FIT83] FITTING, Melvin. *Proof methods for modal and intuitionistic logics*. Dordrecht: D. Reidel, 1983.
- [GAB96] GABBAY, DOV M. *Labelled Deductive Systems*. Oxford University Press, 1996. Oxford Logic Guides vol. 33.
- [GAB2000] GABBAY, Dov M.; BRODA, Krysia; LAMB, Luís C.; RUSSO, Alessandra. *Compiled LDS: A Uniform Approach to Logic Presentation ou "Labelled Deductive Systems": Theory and Applications*. volume II - Further Developments. London, Dec. 2000. (draft book).
- [GAB2003] GABBAY, D.; KURUCZ, A.; WOLTER, F.; ZAKHARYASCHEV, M. *Many-dimensional modal logics: theory and applications*. 2003. (draft book - A ser publicado pela North-Holland, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 2003).
- [GEN88] GENESERETH, M. *Logical Foundations of Artificial Intelligence*. Morgan Kaufmann, 1988.

- [HAL95] HALPERN, Joseph Y. Reasoning About Knowledge: a survey. In: GABBAY, D.; HOGGER, C. J.; ROBINSON, J. A. (eds.) *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*. v. 4. Oxford University Press, 1995. p. 1-34.
- [HAR79] HAREL, D. First order dynamic logic. *Lecture Notes in Computer Science*, 68, 1979.
- [HIN62] HINTIKKA, J. *Knowledge and Belief: An Introduction into the logic of the two notions*. Cornell University Press: Ithaca, 1962.
- [HUG96] HUGHES, G.; CRESSWELL, M. *A New Introduction to Modal Logic*. John Wiley: Routledge, 1996.
- [HUT2000] HUTH, Michael. *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. Cambridge: Cambridge University, 2000. 387 p.
- [MAL2002] MALANOVICZ, Aline Vieira. *Sistemas de dedução para lógicas modais proposicionais*. 2002. 72p. Trabalho Individual (Programa de Pós-Graduação em Computação) - Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- [MOO80] MOORE, R. C. *Reasoning about Knowledge and Action*. MIT, Cambridge, 1980.
- [NON93] NONNENGART, Andreas. First-order modal logic theorem proving and functional simulation. In: INTERNATIONAL JOINT CONFERENCE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE. *Proceedings...*, 1993.
- [OHL91] OHLBACH, H. J. Semantics-based translation methods for modal logics. *Journal of Logic and Computation*. v.1, n.5, p.691-746, 1991.
- [PRA65] PRAWITZ, Dag. *Natural deduction: a proof-theoretical study*. Almqvist and Wiksell, 1965.
- [RUS95] RUSSO, Alessandra. *Modal Labelled Deductive Systems*. Londres: Imperial College. 1995. (Research Report).
- [SHO67] SHOENFIELD, J. R. *Mathematical logic*. Addiston-Wesley, Reading, Mass, 1967.
- [SIM93] SIMPSON, Alex K. *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*. PhD thesis. Edinburgh University, 1994.
- [WAJ33] WAJSBERG, M. Ein erweiter Klassenkalkül. *Monatsh Math. Phys.* n.40, p.113-126, 1933.