Procesos Estocásticos I.
Cadenas de Markov
Tarea 3

A.- (Proceso de nacimiento y muerte en tiempo discreto). Sea $\{ X_n \}$ una cadena de Markov con $S = \{1, 2, \ldots, d\}$ su espacio de estados, donde $d < \infty$. Los estados representan el número de personas. Por lo que $X_n = j$ significa que hay j individuos en la población al tiempo n. Las transiciones pueden tomar tres caminos; se decrementa en uno la población (muerte), se incremente en uno (vida) o permanezca igual. La matriz de transición esta dada por

$$p_{x,y} = \begin{cases} p_x & y = x+1 \\ r_x & y = x \\ q_x & y = x-1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

donde $p_x + r_x + q_x = 1$. Sea $a, b \in S$ tal que $a < b$ y se define

$$T_a = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = a \}$$
$$T_b = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = b \}$$

Entonces $a < x < b$ y defínase $u(x) = P_x(T_a < T_b) = P(T_a < T_b \mid X_0 = x)$.
Con $u(a) = 1$ y $u(b) = 0$. Demostrar que

a) $u(x + 1) - u(x) = \dfrac{q_x}{p_x}(u(x) - u(x-1))$

b) $u(y) - u(y + 1) = \dfrac{\gamma_y}{\gamma_a}(u(a) - u(a+1))$ donde $\gamma_y = \dfrac{q_1 \cdots q_y}{p_1 \cdots p_y}$

c) $u(x) = \dfrac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}$

d) $P_x(T_b < T_a) = \dfrac{\sum_{y=a}^{x-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}$