Teoría del Riesgo.
Cadenas de Markov
Tarea

Nota: En esta tarea vienen preguntas desde muy básicas hasta de un grado de nivel muy bueno, los problemas donde se detendrán a pensar como hacerlas son las 4 últimas, estas salen en aproximadamente 2 semanas, así que hasta la K deben de entregarla para el miércoles 15 de Abril y de la L, M, N y O serán para el martes 21, no se confíen, si bien hay cosas que salen rápido hay otras preguntas en las que se tardarán en hacerlas, el valor de cada pregunta no se los tengo determinado, pero cada pregunta tendrá un valor diferente según dificultad.
Esta tarea junto con el tema de proceso Poisson habremos cubierto ya un 75% del curso de procesos estocásticos

A.- Hacer una clasificación de estados con respecto a la recurrencia, transitoriedad, periodicidad y absorción. Todas son matrices estocásticas y # representa un número positivo, no necesariamente el mismo. Revisen la definición 2.16 y el ejemplo 2.5 de las notas.

1.- $\begin{pmatrix} \# & \# \\ \# & \# \end{pmatrix}$ **2.-** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **3.-** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \# & \# & \# \end{pmatrix}$ **4.-** $\begin{pmatrix} 0 & \# & \# \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \# & \# \end{pmatrix}$ **6.-** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \# & \# & 0 \end{pmatrix}$ **7.-** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \end{pmatrix}$ **8.-** $\begin{pmatrix} \# & 0 & \# \\ 0 & 1 & 0 \\ \# & \# & \# \end{pmatrix}$

9.- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \# & 0 & \# \\ \# & \# & 0 \end{pmatrix}$ **10.-** $\begin{pmatrix} \# & 0 & 0 & \# & 0 \\ 0 & \# & 0 & 0 & \# \\ \# & 0 & \# & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **11.-** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \# & 0 & 0 & \# & \# & 0 \\ \# & 0 & 0 & 0 & \# & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \# & 0 & \# & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B.- Demostrar el teorema 2.7 de la notas.

C.- Prueben que una clase de comunicación es una relación de equivalencia.

En los siguientes ejercicios representar el espacio de estados y las matrices de transición en un paso y en dos pasos.

D.-Considérese una serie de lanzamientos independientes de una moneda que tiene una probabilidad p de salir cara. Para n ≥2, sea X_n igual a 0, 1, 2, 3 según que los lanzamientos (n–1)-ésimo y n-ésimo hayan salido (cara, cara), (cruz, cara), (cara, cruz), (cruz, cruz), respectivamente.

E.- Considérese lanzamientos independientes de un dado. Sea X_n el mayor de los números que aparecen en los primeros n lanzamientos.

F.- De la siguiente matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

con distribución inicial $P(X_0 = i) = 1/3$, $i = 0, 1, 2$
calculen
a) $P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) =$
b) $P(X_2 = 2, X_1 = 0 \mid X_0 = 2) =$
c) $P(X_3=1, X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 2)=$
d) $P(X_2 = 1, X_0 = 0) =$

G.- Demostrar que j es recurrente si, y sólo si, $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{n} = \infty$

H.- Calcular la matriz R y F de las siguientes matrices de transición y clasifique los estados.

a) $$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$$

I.- Una tienda departamental, tiene un plan de cuentas de crédito en sus tiendas. Cada mes se clasifican estás cuentas en cuatro categorías: saldadas, con saldo insoluto, con saldo vencido y como cuenta pérdida. Las cuentas saldadas son las que no tienen saldo a pagar en el mes; las cuentas con saldo insoluto son las que no adeudan saldos del mes anterior, pero a las que se les ha cargado compras realizadas en el mes, las cuentas con saldo vencido son las que tienen un saldo que ha permanecido sin pagarse durante más de un mes pero menos de tres meses, las cuentas perdidas son las que tienen un saldo con más de tres meses de vencido y que no se espera poder cobrar.

De los registros de la tienda, se ha determinado que 60% de las cuentas con saldo insoluto se pagan al siguiente mes, 30% permanece en la misma categoría y 10% se convierte en saldo vencido. También se ha determinado que 40% de las cuentas vencidas se convierten en saldos insolutos, 35% se pagan (saldadas), 15% permanecen vencidas y 10% se clasifican como cuents pérdidas. Una vez que una cuenta llega a la categoría de perdida, se le cancela.

a) Escribe la matriz de transición del problema y clasifiquen los estados.

b) Si en la actualidad existen \$100000 de las cuentas por cobrar en la categoría de saldadas, \$50000 en la categoría de saldo insoluto, \$20000 en la categoría de saldos vencidos y \$5000 en la categoría de cuentas pérdida, ¿ que cantidad habrá en cada categoría al mes siguiente ?

c)¿ Y al mes después de éste?

d)¿ que porcentaje del dinero de las cuentas por cobrar se encontrará en la categoría de cuentas perdidas?

J.- Sea X_n denota el capital de un jugador al final de n-ésimo juego. Su estrategia es la siguiente, si su capital es de 4 dólares o más, entonces el apuesta 2 dólares de los cuáles obtiene 4, 3 o 0 dólares con probabilidad 0.25, 0.30 y 0.45 respectivamente. Si su capital es de 1, 2 o 3 dólares entonces el juega más conservadoramente, apuesta un dólar y obtiene 2 o 0 dólares con probabilidad 0.45 y 0.55 respectivamente. Cuando su capital es cero el para.

a) Sea Y_{n+1} las ganancias netas en el n+1-ésimo juego, talque $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$.
Calcular $P\{Y_{n+1} = k \mid X_n = i\}$

b) Demostrar que $X = \{X_n : n \in N\}$ es una cadena de Markov.

c)Calcular las probabilidades de transición de X y clasificar los estados.

K.- Sea X un cadena de Markov irreducible y aperiódica con $m < \infty$, y supóngase que la matriz de transición es doblemente estocástica. Demostrar que

$$\pi(i) = \frac{1}{m}, \ i \in E$$

es la distribución limite.

L.- (Proceso de nacimiento y muerte en tiempo discreto). Sea $\{ X_n \}$ una cadena de Markov con $S = \{1, 2, \ldots, d\}$ su espacio de estados, donde $d < \infty$. Los estados representan el número de personas. Por lo que $X_n = j$ significa que hay j individuos en la población al tiempo n. Las transiciones pueden tomar tres caminos; se decrementa en uno la población (muerte), se incremente en uno (vida) o permanezca igual. La matriz de transición esta dada por

$$p_{x,y} = \begin{cases} p_x & y = x+1 \\ r_x & y = x \\ q_x & y = x - 1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

donde $p_x + r_x + q_x = 1$. Sea $a, b \in S$ tal que $a < b$ y se define

$$T_a = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = a \}$$
$$T_b = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = b \}$$

Entonces $a < x < b$ y defínase $u(x) = P_x(T_a < T_b) = P(T_a < T_b \mid X_0 = x)$.
Con $u(a) = 1$ y $u(b) = 0$. Demostrar que

a) $u(x + 1) - u(x) = \dfrac{q_x}{p_x}(u(x) - u(x-1))$

b) $u(y) - u(y + 1) = \dfrac{\gamma_y}{\gamma_a}(u(a) - u(a +1))$ donde $\gamma_y = \dfrac{q_1 \cdots q_y}{p_1 \cdots p_y}$

c) $u(x) = \dfrac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}$

d) $P_x(T_b < T_a) = \dfrac{\sum_{y=a}^{x-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}$

M.- Sean *b* puntos distribuidos en la periferia de un círculo. Se define una caminata aleatoria en el círculo de la siguiente forma. Una partícula brinca de un punto a otro en el círculo, sólo en puntos continuos, la probabilidad de que la partícula se mueva en el sentido de las manecillas del reloj es *p* y en contra de las manecillas del reloj es *q*, es lo mismo para todos los puntos. La partícula a completado una vuelta desde el punto j, si su primer retorno a j es desde otro punto vecindario que no es el de su salida. Demostrar que la probabilidad de completar una vuelta para $p \neq q$ es

$$\frac{(p-q)\left(p^b+q^b\right)}{p^b-q^b}$$

también calculen la probabilidad de completar una vuelta si $p = q$

N.- Considérese el sistema de colas M/G/1 (un solo servidor, llegadas como un procesos Poisson, tiempos de servicio independientes e idénticamente distribuidas) con un cuarto de espera de capacidad m. Todos los clientes que llegan y encuentran el cuarto de espera lleno (m+1 clientes en el sistema), salen del sistema y nunca regresan. Sea X_n el número de clientes en el sistema exactamente después de que el n-ésimo cliente fue atendido.

a) Mostrar que $X = \{X_n\}_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{0, 1, \dots, m\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & \cdot & \cdot & \cdot & q_{m-1} & r_{m-1} \\ q_0 & q_1 & q_2 & \cdot & \cdot & \cdot & q_{m-1} & r_{m-1} \\ 0 & q_0 & q_1 & \cdot & \cdot & \cdot & q_{m-2} & r_{m-2} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & q_0 & q_1 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & q_0 & r_0 \end{pmatrix}$$

Donde q_n es la probabilidad de que exactamente n llegadas ocurran durante un tiempo de servicio y donde $r_n = q_{n+1} + q_{n+2} + \cdots$.

b) Calcule la distribución limite para m = 3, y luego para un m cualquiera.

O.- Para satisfacer la demanda de agua de una región, se ha decidido construir una presa en un río. Para la capacidad de la presa hay dos opciones, de 2 unidades o 3 unidades. La distribución de probabilidad del número de unidades de agua que fluyen (ingresan) hacia la presa durante cada semana esta dado por $p_0 = 1/8$, $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/2$ y $p_3 = 1/8$. Si el suministro de agua por el río excede la capacidad de la presa, el exceso de agua se pierde. La demanda de agua es de 2 unidades en cada semana, se asume que el agua debe ser provista comenzando cada semana.

Si la presa no contiene suficiente agua para satisfacer la demanda, la demanda será satisfecha con un costo de 10 mil pesos por unidad. El costo de depreciación semanal de la presa tiene los valores de 2 y 2.5 mil pesos a la semana para las respectivas capacidades de 2 y 3 unidades.

a)¿Cuál es la matriz de transición, cuando la presa tiene capacidad de 2 unidades?
¿Cuál es la matriz de transición, cuando la presa tiene capacidad de 3 unidades?

b) ¿Cuál es la matriz de transición a largo plazo, cuando la presa tiene capacidad de 2 unidades?

c) ¿Cuál es la matriz de transición a largo plazo, cuando la presa tiene capacidad de 3 unidades?

d) Calcular el costo promedio por semana en el largo plazo, para ambas presas. ¿Para que capacidad de presa el costo promedio por semana es a largo plazo menor ?.