Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Acatlán
Actuaría
Probabilidad I
Espacios de probabilidad.
Por Mahil H. José Cruz. Leonardo Marín.

Nombre: ____Calificación:_________

“ Ningún fracaso es terminante, ni tampoco ningún éxito”

El examen consta de 4 preguntas, cada una con el mismo valor.
Las filas impares contesta la pregunta 1 y las filas pares la 2 de cada una de las preguntas.

¡¡ SUERTE !!

I.- 1.- Sea $\Omega =$ (0,1] y defínase $A_i = [\,1/i\,,1\,]$ demuestre que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega \quad ; \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega$$

2.- Analizar la convergencia de:

$$A_n = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 < \left(\frac{-2}{n}\right)^n + 1\right\} \forall x, y \in \Re$$

II.- Álgebras y σ-álgebras Demostrar.

1.- Sea C una clase no vacía de conjuntos de Ω. Probar que $\sigma\{\sigma(C)\} = \sigma(C)$.

2.- Sea A un álgebra y A, B,C elementos de A, ¿$A \cap B \cap C \in \mathsf{A}$?.

III.- Demostrar.

1.- Sea (Ω, A) un espacio probabilizable, con $\Omega =$ (0,∞) y verificar si **P** es una medida de probabilidad

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^{[\omega]} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$ donde $[\omega]$ es la parte entera de ω, $\omega \in \Omega$

2.- Sea (Ω, A) un espacio probabilizable, y sea $\{P_n\}$; $n \in N$ una sucesión de medidas de probabilidad definidas sobre él. Demostrar que la función de conjunto $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(A)$ es una medida de probabilidad sobre el mismo espacio, para cualquier sucesión a_n; $n \in N$, tal que $a_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$

IV.- Pruebe o desapruebe las siguientes declaraciones:

1.- (a) Si $P(A) = P(B) = P(B|A) = ½$, entonces A es independiente de B.
(b) Si $P(A) = a$ y $P(B) = b$, entonces $P(A|B) \geq (a + b - 1)/b$

2.- (c) Si $P(A) = P(B) = p^2$ entonces $P(AB) \leq p^2$
(d) Si A es independiente de B, entonces $P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$