

**Tarea**  
**Estadística I**

**III.- Distribución de función de variables aleatorias.**

1.- Sea X un variable aleatoria con distribución uniforme con  $a = 0$  y  $b = 1$ , sea  $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X$ ,  $\lambda > 0$ , encontrar la función de densidad de Y. ¿ A que familia pertenece la densidad de Y ?.

2.- Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad:

$$P(X = k) = \frac{e^{-1}}{(k+1)!}, k = -1, 0, 1, 2, \dots$$

calcular su media. (Sugerencia. calculen la distribución de  $Y = X + 1$ ).

3.- Supóngase que X tiene fdp  $f_X(x) = 2x I_{(0,1)}(x)$ , sea  $Y = e^{-x}$  encontrar la fdp de Y.

4.- Supóngase que X tiene fdp  $f_X(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^2 I_{[0,3]}(x)$ , sea  $Y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  encontrar la fdp de Y.

5.- Supóngase que X tiene fd acumulativa  $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{4} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ ,  $Y = F_X(x)$  encontrar la fdp de Y.

6.-a) Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a.i.i.d. con distribución Bernoulli(p), obtener la función de densidad de  $\sum_{i=1}^n X_i$ .

b) Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a.i.i.d. con distribución Cauchy( $\alpha, \beta$ ), obtener la función de densidad de  $\bar{X}$ .

7.- Sea U una v.a con distribución  $U(0, 1)$ . Encontrar la distribución de  $Y = (b-a)U+a$  donde  $b > a$ .

8.- Sea U una v.a con distribución  $U(0, 1)$ . Encontrar la distribución de

a)  $Y = (b-a)U+a$  don de  $b > a$

b)  $Z = 1 - U$ .

9.- Demostrar que si  $X$  es una v.a con distribución  $\exp(1)$ , entonces  $Y = \left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$  donde  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$  tiene distribución Weibull.

10.- Resolver el problema 6 del Mood (3era edición) cap. V.

11.- Resolver el problema 8 del Mood (3era edición) cap. V.

12.- Resolver el problema 15 del Mood (3era edición) cap. V.

13.- Resolver el problema 23 del Mood (3era edición) cap. V.

14.- Resolver el problema 34 del Mood (3era edición) cap. V.

15.- Resolver el problema 20 del Mood (3era edición) cap. VI.

16.- Resolver el problema 21 del Mood (3era edición) cap. VI.

17.- Si  $X_1$  y  $X_2$  son variables aleatorias independientes que se distribuyen como una Gamma con parámetros  $n_1, \lambda$  y  $n_2, \lambda$  respectivamente sea:  $Y_1 = X_1 + X_2, Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$

a) Obtener la conjunta de  $(Y_1, Y_2)$

b) Obtener la marginal de  $Y_2$

18.- Sean  $\theta = 2\pi U_1$  y  $R = \sqrt{-2 \ln U_2}$  donde  $U_1$  y  $U_2$  son v.a.i con distribución  $U(0, 1)$ . Demostrar que

$$X = R \cos(\theta), Y = R \sin(\theta)$$

Son v.a.i con distribución Normal  $(0, 1)$ .

19.- Si un vector  $Y$  tiene una distribución normal multivariada con media  $\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y matriz de covarianza  $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

a) Encuentren  $V^{-1}$ .

b) Encuentren la distribución marginal de  $y_1$ .

c) Encuentren la distribución marginal conjunta de  $y_1, y_2$

d) Encuentren la distribución condicional de  $y_1$  dado  $y_2$  y  $y_3$

20.- Sean  $x, y$  v.a. con la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{4}{3}}} \exp\left\{\frac{-x^2 - y^2 + xy}{2}\right\} \quad -\infty < x, y < \infty$$

a) Muestra que la distribución anterior es una normal bivariada, por medio de la definición de normal multivariada.

b) ¿Cuál es la matriz de varianzas covarianzas? Obten el vector de medias.

c) Encuentra la densidad de  $Y|X$