

CALCULO DE PROBABILIDADES I

Tarea 2

1. Un punto es seleccionado aleatoriamente en el cuadrado unitario, y se sabe que está en el triángulo delimitado por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, encuentre la probabilidad que el punto también se encuentre en el triángulo delimitado por $y = 0$, $x = 1$, $y = x$.
2. Una caja tiene 10 pelotas de las cuales 6 son negras y 4 son blancas.
 - a) Tres pelotas se extraen de la caja pero no se sabe su color. Encuentre la probabilidad de que una cuarta pelota extraída de la caja sea blanca. Suponga que las pelotas son extraídas aleatoriamente.
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres pelotas extraídas de la caja sean negras, si se sabe que al menos una de ellas es negra?.
3. La experiencia indica que el 20% de las personas que reservan una mesa en algún restaurante nunca asisten. Si el restaurante tiene 50 mesas y acepta 52 reservaciones, ¿cuál es la probabilidad de que se pueda acomodar a todas las personas que lleguen?.
4. Un blanco circular de radio 1 es dividido en cuatro zonas anulares determinadas por círculos concéntricos de radios $1/4$, $1/2$, $3/4$ y 1 respectivamente. Suponga que 10 tiros son lanzados independiente y aleatoriamente en el blanco.
 - a) Encuentre la probabilidad de que a lo mas 3 tiros caigan en la zona delimitada por el círculo de radio $1/2$ y por el de radio 1.
 - b) Si 5 tiros caen dentro del círculo de radio $1/2$, encuentre la probabilidad de que al menos un tiro haya caído dentro del círculo de radio $1/4$.
5. Un cierto componente de la máquina de un cohete falla 5% de la veces cuando el cohete es lanzado. Para lograr una mejoría en el funcionamiento de la máquina, este componente es duplicado n veces. La máquina falla solo si todos los n componentes fallan. Supongamos que las fallas de los componentes ocurren independientemente. ¿Cuál es el mínimo valor de n que puede usarse para garantizar que la máquina trabaje el 99% de la veces?.
6. Un hombre tiene n llaves, y solamente una de ellas abre la cerradura de la puerta de su casa. Él intenta abrir con una llave a la vez y en cada intento escoge aleatoriamente una llave de las que no ha probado. Encuentre la probabilidad de que la r -ésima probada sea la llave correcta.
7. Un autobús empieza su recorrido con 6 personas y realiza 10 paradas en diferentes lugares. Suponga que todos los pasajeros tienen la misma probabilidad de bajarse en cualquier parada. Encuentre la probabilidad de que no bajen dos o más pasajeros en la misma parada.
8. Suponga que una persona tiene r cajas y que aleatoriamente coloca pelotas en las cajas, una por una, hasta que alguna caja tenga 2 pelotas. Encuentre la probabilidad de que ésto ocurra con la n -ésima pelota.
9. Si Samuel y Pedro están en una fila de n personas formadas aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente k personas estén en medio de ellos?.
10. -Demuestre que:

$$\left(1 - \frac{n-1}{s}\right)^{n-1} \leq \frac{{}_s P_n}{s^n} \leq \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{n-1}$$
11. Se seleccionan al azar, una por una, cartas de una baraja con 52 cartas, hasta que aparece el primer rey. Encuentre la probabilidad de que ésto ocurra con la n -ésima carta seleccionada.

12. En una población compuesta de r elementos se tiene k elementos con cierta característica A . De esta población se selecciona una muestra aleatoria de tamaño n .
- Encuentre la probabilidad de que ninguno de los elementos con la característica A se encuentre en la muestra, si la selección se realiza: a.1) con reemplazo y a.2) sin reemplazo.
 - Si la selección se realiza sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que todos los elementos con la característica A se incluyan en la muestra?
13. Una caja contiene 50 fusibles de los cuales 10 están defectuosos. Si se seleccionan al azar 10 fusibles de la caja, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los fusibles sea defectuoso?.
14. ¿Cuál es la probabilidad de que las manos de bridge correspondientes a una pareja de jugadores (un total de 26 cartas) tengan exactamente 3 ases?
15. Encuentre la probabilidad de que una mano de póker de 5 cartas incluya cartas no menores a 7, dado que contiene al menos un carta mayor a 10 (los ases son considerados mayores a 10)
16. Usted posee 3 boletos de una rifa en la cual se vendieron n boletos. Si se van a dar 5 premios, ¿cuál es la probabilidad de que usted gane al menos un premio?.
17. Se tienen dos cajas y cada una contiene r bolas numeradas $1, 2, \dots, r$. Una muestra aleatoria de tamaño $n \leq r$ es tomada sin reemplazo de cada caja. Encuentre la probabilidad de que las muestras contengan exactamente k bolas con los mismos números.
18. Cuatro bebedores (I, II, III y IV) van a catalogar 3 diferentes marcas de cerveza (A, B y C) en una prueba ciega. Cada bebedor califica las 3 cervezas asignando 1 a la que considera la mejor, 2 a la siguiente y 3 a la menos preferida. Posteriormente se suman las calificaciones de los cuatro bebedores para cada marca. Suponga que los bebedores no pueden en realidad discriminar entre las cervezas, es decir, cada calificación es asignada aleatoriamente.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la cerveza A reciba una calificación total de 4?.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que alguna cerveza reciba una calificación total de 4?.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que alguna cerveza reciba un calificación total de 5 o menos?.
19. Los siguientes 3 problemas son considerados problemas clásicos en probabilidad.
- (Galileo y Duque of Toscani) Compare la probabilidad de un total de 9 con un total de 10 cuando 3 dados honestos son lanzados una vez.
 - (Chevalier de Méré) Compare la probabilidad de que se obtenga al menos un 6 en 4 lanzamientos de un dado honesto con la probabilidad de que se obtenga al menos un doble 6 en 24 lanzamientos de dos dados honestos.
 - (Correspondencia a Newton) Compare la probabilidad de obtener al menos un 6 cuando seis dados son lanzados con la probabilidad de obtener al menos dos seises cuando doce dados son lanzados.
20. Un vendedor tiene una docena de pequeños motores eléctricos, dos de los cuales no funcionan. Un cliente está interesado en la docena de motores. El vendedor puede empaquetar los 12 motores en una caja o bien poner 6 en cada una de dos cajas. Él sabe que el cliente va a inspeccionar 2 de los 12 motores si todos están en una caja, o uno de cada caja si están en dos cajas. El vendedor tiene 3 estrategias para vender los dos motores fallidos: i) empaquetar los 12 en una caja; ii) poner uno de los motores fallidos en cada caja chica; o iii) poner ambos motores fallidos en una caja chica y en la otra ningún motor fallido. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente no encuentre los motores fallidos en cada una de las estrategias?.
21. La probabilidad de que al lanzar una moneda deshonesto se obtenga sol es p . Hugo, Paco y Luis tiran la moneda sucesivamente y Hugo es el que comienza los lanzamientos. El primero que obtenga un sol gana. Encuentre la probabilidad de ganar de cada uno de ellos.

22. La tradición nos dice que en ciertas áreas rurales de Rusia el matrimonio de una joven se determinaba de la siguiente manera: La joven sostenía en su mano 6 listones por la parte media, de manera que las puntas se encontraran por arriba y por abajo de la mano. El joven pretendiente debía amarrar por pares las 6 puntas que salían por arriba, y después amarrar las 6 puntas de abajo, también en pares. Si el joven amarró los 6 listones en un solo círculo, entonces la boda se realizaría en menos de un año.
- ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un solo círculo si los listones fueron amarrados aleatoriamente?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que se formen dos o más círculos?
23. Mr. Bandit, un bien conocido ranchero pero no bien conocido ladrón de ganado, tiene 20 cabezas de ganado listas para vender. Dieciséis de estas cabezas son suyas y consecuentemente llevan su propia marca. Las otras cuatro llevan marcas ajenas. Mr. Bandit sabe que el inspector de marcas revisa el 20% del ganado de cualquier cargamento. Él tiene dos camiones, uno de los cuales puede cargar a las 20 cabezas a la vez, y el otro puede cargar sólo 10 cabezas. Mr. Bandit considera 4 estrategias en su intento de llevar el ganado al mercado para venderlo sin que sea descubierto: 1) enviar en un solo cargamento las 20 cabezas, 2) enviar dos cargamentos de 10 cabezas cada uno, en donde las 4 cabezas robadas se encuentran en uno de los viajes, 3) se envían dos cargamentos de 10, uno con 3 cabezas robadas y el otro con una, y 4) se envían dos cargamentos de 10, cada uno con dos cabezas robadas. ¿Qué estrategia minimiza la probabilidad de que Mr. Bandit sea descubierto?
24. Suponga que 0.1% de la población en una ciudad tiene tuberculosis (TB). Un prueba para detectar tuberculosis se comporta de la siguiente manera: si las personas tienen TB, la prueba lo detecta con una probabilidad de 0.999. Si no tiene TB, existe una probabilidad de 0.002 de que la prueba indique erróneamente que sí tiene.
- Para una persona seleccionada aleatoriamente, la prueba indica que tiene TB, ¿cuál es la probabilidad de que realmente tenga TB?
 - Si esta persona se realiza la prueba por segunda vez y vuelve a indicar que tiene TB, ¿cuál es la probabilidad de que realmente tenga TB?
25. Considere una urna que contiene 10 pelotas, de las cuales 5 son negras. Escoga al azar un número entero n en $[1,6]$, y después seleccione una muestra de n pelotas sin reemplazo de la urna. Encuentre la probabilidad de que todas las pelotas en la muestra sean negras.
26. Un distribuidor de semillas de sandía determinó, después de muchas pruebas, que el 4% de una gran cantidad de semillas no germina. Él vende las semillas en paquetes de 50, y garantiza al menos un 90% de germinación. ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete no cumpla la garantía?
27. Mr. Stoneguy, un experimentado comerciante de diamantes, decide recompensar a su hijo permitiéndole escoger una de dos cajas. Cada caja contiene 3 diamantes. En una de las cajas 2 de los diamantes son reales y el otro es una excelente imitación; en la otra caja uno es real y los otros dos son imitaciones. Si el hijo escoge aleatoriamente entre las dos cajas, su oportunidad de conseguir 2 diamantes verdaderos es $1/2$, por lo que Mr. Stoneguy decide ayudarlo de la siguiente manera: permite a su hijo sacar un diamante de una de las cajas y examinarlo para ver si es un verdadero diamante; si el diamante examinado es real, el hijo se queda con esa caja, y se queda con la otra caja en el otro caso. ¿Cuál es la probabilidad de que el hijo se quede con 2 verdaderos diamantes.
28. Un jugador tira un par de dados dos veces. Él gana si los dos totales obtenidos no difieren en más de dos con las siguientes excepciones: si obtiene un 3 en el primer tiro, debe obtener un 4 en el segundo tiro; si obtiene un 11 en el primer tiro, debe obtener un 10 en el segundo. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?