CALCULO DE PROBABILIDADES I

Tarea 1

1.Una urna contiene tres pelotas rojas, dos pelotas blancas y una pelota azul. Una segunda urna contiene una pelota roja, dos pelotas blancas y tres pelotas azules.

a)Una pelota es seleccionada al azar de cada urna.
a.1)Describa el espacio muestral para este experimento.
a.2)Encuentre la probabilidad de que ambas pelotas sean del mismo color
a.3)¿La probabilidad de que ambas pelotas sean rojas es mayor que la probabilidad de que sean blancas?
b)Las pelotas de las dos urnas son mezcladas en una sola urna, y posteriormrnte se extrae una muestra de tres pelotas. Encuentre la probabilidad de que los tres colores esten representados en la muestra cuando i)la selección se hace con reemplazo, y ii)la selección se hace sin reemplazo.

2.Demostrar la verdad o falsedad de una de las siguientes afirmaciones.

a)Si $P(A) = P(B) = p$, entonces $P(A \cap B) \leq p^2$.
b)Si $P(A) = P(B^c)$, entonces $A^c = B$.
c)Si $P(A) = 0$, entonces $A = \emptyset$.
d)Si $P(A) = 0$, entonces $P(A \cap B) = 0$.

3.Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, , eventos en un σ-álgebra $\mathcal{A}$. Demostrar lo siguiente,

$$P\left[\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right] = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{i<j}\sum P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}\sum\sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots.. + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)$$

4.Cierto programa de computadora opera usando alguna de dos subrutinas, A o B, dependiendo del trabajo que se realiza; la experiencia indica que la subrutina A se usa el cuarenta por ciento de las veces, y la B el sesenta por ciento de las veces. Si se utiliza A, se tiene una probabilidad de setenta y cinco por ciento de que el programa termine de ejecutarse antes de cierto tiempo límite; y si se utiliza B, hay una posibilidad de cincuenta por ciento de que el programa se ejecute antes del tiempo límite. ¿Cuál es la probabilidad de que un programa se ejecute sin excederse del tiempo límite?

5.Probar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a)Si $P(A \mid B) \geq P(A)$, entonces$P(B \mid A) \geq P(B)$.

b)Si $P(B \mid A^c) = P(B \mid A)$, entonces A y B son independientes.

c)Si $P(A) = a$ y $P(B) = b$, entonces $P(A \mid B) \geq (a+b-1) / b$.

6.Un dado es lanzado tantas veces como sea necesario hasta obtener un seis. ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten más de cuatro lanzamientos para obtener un seis, dado que no se obtuvo un seis en el primer lanzamiento?

7.La urna A contienen dos pelotas blancas y dos negras, la urna B contiene tres pelotas blancas y dos negras. Una pelota es transferida de A a B; posteriormente se extrae una pelota de B y resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la pelota transferida haya sido blanca?

8.Dado que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, demostrar la verdad o falsedad de lo siguiente:

a)Si $P(A) = P(B)$, entonces $P(A \mid B) = P(B \mid A)$.
b)Si $P(A \mid B) = P(B \mid A)$, entonces $P(A) = P(B)$.

9.Si A y B son independientes con $P(A) = P(B) = 1/2$, encontrar $P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)]$.

10.Si $P(B) = P(A \mid B) = P(C \mid A \cap B) = 1/2$, encontrar $P(A \cap B \cap C)$.

11.Sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eventos mutuamente excluyentes, y $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Supongamos que $P(B_j) > 0$ y que $P(A \mid B_j) = p$, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Demostrar que $P(A \mid B) = p$.

12.En un experimento de laboratorio se intenta enseñar a un animal a dar vuelta a la derecha dentro de un laberinto.A manera de incentivo, el animal es premiado si dá vuelta a la derecha y castigado si la dá a la izquierda. En el primer intento, la probabilidad de que el animal de vuelta a la izquierda es la misma que a la derecha. Si en cualquier intento el animal fué premiado, la probabilidad de que de vuelta a la derecha en el siguiente intento es $p_1 > 1/2$, y si el animal fué castigado, la probalidad de que de vuelta a la derecha en el siguiente intento es $p_2 > p_1$.

a)¿Cuál es la probabilidad de que el animal de vuelta a la derecha en el tercer intento?
b)¿Cuál es la probabilidad de que el animal de vuelta a la derecha en el tercer intento, dado que dió vuelta a la derecha en el primer intento?

13.Sean A y B dos eventos independientes en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Demostrar la independencia entre A y B^c, entre A^c y B, y finalmente entre A^c y B^c.

14.El proveedor de cierto aparato de prueba asegura que dicho aparato es altamente confiable ya que $P(A \mid B) = P(A^c \mid B^c) = 0.95$, donde A = {el aparato indica que el artículo que se prueba es defectuoso} y B = {artículo defectuoso}. El aparato se usará para localizar artículos defectuosos en un gran lote, en el cual existen cinco por ciento de artículos con algun defecto.

a)Encontrar $P(B \mid A)$
b)Se desea tener $P(B \mid A) = 0.9$. Sea $p = P(A \mid B) = P(A^c \mid B^c)$. ¿Qué tan grande debe ser el valor de p?

l5.Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, donde $\mathcal{A}$ es el σ-álgebra de todos los subconjuntos de Ω y P es una medida de probabilidad que le asigna probabilidad $p > 0$ a cada punto de Ω.
a)Demuestre que Ω debe tener un número finito de puntos. Hint: demuestre que Ω no puede tener más de p^{-1} elementos.
b)Demuestre que si n es el número de elementos en Ω, entonces p debe ser n^{-1}.

16.Supóngase que un punto es escogido al azar en el cuadrado unitario. Sea A el evento de que el punto esté en el triángulo delimitado por las líneas $y = 0$, $x = 1$, y $x = y$, y sea B el evento de que el punto esté en el rectángulo con vértices (0,0), (1,0), (1,1/2), (0,1/2). Calcule $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.

17.Un modelo para un apuntador circular aleatorio puede construirse considerando un espacio de probabilidad uniforme sobre la circunferencia de un círculo de radio 1, de tal manera que la probabilidad de que el indicador caiga en un arco de longitud s es $s/2\pi$. Suponga que el círculo está dividido en treinta y siete zonas idénticas numeradas 1,2,...,37. Calcule la probabilidad de que el apuntador pare en una zona con número par.

l8.Una caja tiene l0 pelotas rojas y 5 pelotas negras. Una pelota es seleccionada de la caja. Si la pelota es roja, se regresa a la caja. Si la pelota es negra, ésta y 2 pelotas adicionales negras se agregan a la caja.

a)Encuentre la probabilidad de que una segunda pelota seleccionada de la caja sea
a.1) roja.
a.2) negra.
b) Si la segunda pelota fué roja, ¿ cuál es la probabilidad de que la primera pelota haya sido roja?.

l9.La caja I contiene 2 pelotas blancas y 2 pelotas negras, la caja II contiene 2 pelotas blancas y una pelota negra, y la caja III contiene una pelota blanca y 3 pelotas negras.

a)Una pelota es seleccionada de cada caja. Calcule la probabilidad de que todas las pelotas seleccionadas sean blancas.

a)Una pelota es seleccionada de cada caja. Calcule la probabilidad de que todas las pelotas seleccionadas sean blancas.
b) Una caja es seleccionada al azar y una pelota extraída de ella. Calcule la probabilidad de que sea blanca.
c) En b) , calcule la probabilidad de que la primera caja haya sido seleccionada dado que se obtuvo una pelota blanca.

20.Suponga que los coches tienen la misma probabilidad de ser fabricados en lunes, martes, miércoles, jueves o viernes. Los coches hechos en lunes tienen una probabilidad del 4% de ser amarillos; los coches hechos en martes, miércoles o jueves tienen una probabilidad del l% de ser amarillos; y los coches hechos en viernes tienen una probabilidad del 2% de ser amarillos. Si se compra un coche y resulta ser amarillo, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en lunes?.

21.Suponga que hay una prueba para detectar cáncer con la propiedad de que el 90% de aquellas personas con cáncer reaccionan positivamente y el 5% de aquellas sin cáncer reaccionan positivamente. Si el 1% de los pacientes en un hospital tienen cáncer, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente seleccionado al azar, que reacciona en forma positiva a la prueba, realmente tenga cáncer ?.

22.Supónga que una fábrica tiene 2 máquinas, A y B, que hacen el 60% y el 40% de la producción total respectivamente. La máquina A produce un 3% de artículos defectuosos, mientras que la máquina B produce un 5% de artículos defectuosos.

a)Construya el espacio muestral asociado a observar la máquina que produce un artículo.
b)Construya el espacio muestral asociado a observar el tipo de artículo que produjeron las máquinas.
c)Construya el espacio muestral que especifique la máquina que produjo el artículo y el tipo de artículo producido.
d)Para cada uno de los incisos anteriores calcule las probabilidades de cada uno de los eventos simples.

23.Supónga que las 6 caras de un dado tienen la misma probabilidad de ocurrir y que los lanzamientos sucesivos del dado son independientes. Defina un espacio de probabilidad para el experimento de lanzar el dado 3 veces.

24.Demuestre que si A,B y C son tres eventos tales que $P(A\cap B\cap C) \neq 0$ y $P(C \mid A\cap B) = P(C \mid B)$, entonces $P(A \mid B\cap C) = P(A \mid B)$.

25.Supónga que la probabilidad de acertarle a un blanco es 1/4. Si se disparan 8 tiros al blanco, ¿cuál es la probabilidad de que se acierte en por lo menos 2 ocasiones?.

26.Una máquina consiste de 4 componentes que funcionan en paralelo, de tal forma que la máquina falla si por lo menos tres componentes fallan. Suponga que las fallas en los componentes son independientes entre si. Si los componentes tienen probabilidades 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4 de fallar cuando la máquina se pone a funcionar, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina funcione correctamente cuando empiece a funcionar?

27.En una baraja de 52 cartas hay 4 reyes. Una carta es extraída al azar de la baraja y se anota su valor; luego la carta es regresada. Este procedimiento se realiza 4 veces. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 2 reyes en las 4 cartas seleccionadas si se sabe que hay por lo menos 1 rey en ellas.