# Capítulo 2.

## 2.- Cadenas de Markov.

### 2.1. Introducción.

Hay procesos estocásticos, tales que, la información de algún estado futuro $X_{n+1}$, dado que se sabe la información de los estados pasados $X_0$ , $X_1$, … , $X_{n-1}$ y del estado presente $X_n$, es independiente de los estados pasados y únicamente depende del estado presente $X_n$, por su forma de comportarse, estos procesos se aplican en diversas áreas, aquí analizaremos aquellos que tienen un espacio parametral de tiempo discreto $T$ y un espacio de estados $E$, finito o contable infinito.

***Definición 2.1.*** Un proceso estocástico $\{X_n\ ,\ n \in T\}$, con espacio parametral de tiempo discreto $T$ y un espacio de estados $E$ finito o contable infinito es una *cadena de Markov* si

$$P\{\ X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0\ , X_1 = i_1, \ldots , X_n = i\} = P\{\ X_{n+1} = j \mid X_n = i\ \} = p_{ij}.$$

$p_{ij}$ es la probabilidad de transición o de paso, del estado $i$ en el tiempo $n$, al estado $j$ en el tiempo $n+1$, es decir, $p_{ij}$ es la probabilidad de transición o de paso del estado $i$ al estado $j$ en un paso.

Sin pérdida de generalidad tomaremos a $T$ y $E$ como subconjunto de los números enteros.

***Definición 2.2.*** Si las $p_{ij}$ no dependen de $n$, se dice que la cadena de Markov es *homogénea*.

La definición 2.2 nos dice que

$$P\{\ X_{n+1} = j \mid X_n = i\ \} = P\{\ X_{m+1} = j \mid X_m = i\ \} = p_{ij} \text{ con } m \neq n.$$

supondremos siempre que $p_{ij}$ no dependen de $n$. A $p_{ij} = P\{\ X_1 = j \mid X_0 = i\ \}$ también lo podemos poner como

$$P\{X_1 = j \mid X_0 = i\} = P_i\{X_1 = j\}$$

Las probabilidades de transición $p_{ij}$ satisfacen

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j \in E} p_{ij} = 1.$$

Podemos escribir todas las probabilidades de transición del estado $i$ en el tiempo $n$, al estado $j$ en el tiempo $n+1$, de la siguiente forma matricial

$$\text{estados de } X_n \qquad \begin{array}{c c} & \text{estados de } X_{n+1} \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} = \mathbf{P}$$

**P** es la matriz de probabilidades de transición.

***Definición 2.3.*** Una matriz **P** se llama *estocástica* si cada uno de sus elementos, $p_{ij} \geq 0$, $i, j \geq 0$ y $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$, es decir cada uno de los elementos de la matriz es mayor o igual que cero y en cada renglón su suma es uno.

***Definición 2.4.*** Una matriz **P** se llama *doblemente estocástica* si cada uno de sus elementos $p_{ij} \geq 0$, $i, j \geq 0$, $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$ y $\sum_{i \in E} p_{ij} = 1$

La definición 2.4 nos dice que una matriz es doblemente estocástica si tanto sus columnas como sus renglones suman uno.

*Ejemplo 2.1*. Supóngase que la posibilidad de que el día de mañana llueva sólo depende de la situación climatológica de hoy y no de días previos, además supongamos que si llueve hoy, la probabilidad de que mañana llueva es $\alpha$ y si hoy no llueve, la probabilidad de que llueva mañana es $\beta$, esto quiere decir que si hoy llueve, entonces mañana no lloverá con probabilidad $1-\alpha$ y si hoy no llueve, la probabilidad de que mañana tampoco sería $1-\beta$, si consideramos que el estado 0 es que llueva y al estado 1 que no llueva, claramente bajo los supuestos que hemos hecho éste ejemplo es una cadena de Markov con la siguiente matriz de transición,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

*Ejemplo 2.2.* Un apostador tiene \$N , en cada juego que apuesta tiene la probabilidad $p$ de ganar \$1 o perder \$1 con probabilidad $1 - p$ , el jugador se retirará cuando se quede sin dinero o bien cuando haya duplicado su dinero original \$N.

Si consideramos $X_n$ como el dinero que tienen el apostador después de la $n$-ésima vez que apuesta, $X_n$ claramente es una cadena de Markov, ya que lo que va apostar únicamente dependerá del dinero que tenga actualmente y no de lo que haya jugado antes, $X_n$ tienen espacio de estados $E = \{0, 1, 2, \ldots, 2N\}$, sus probabilidades de transición son

$$p_{ij} = p \quad \text{con } j = i+1,\ i = 1, 2, \ldots, 2N-1$$

$$p_{ij} = 1-p \quad \text{con } j = i-1,\ i = 1, 2, \ldots, 2N-1 \quad \text{y}$$

$$p_{00} = p_{2N,2N} = 1$$

los estados 0 y 2N son estados absorbentes, este concepto lo definiremos más adelante, de aquí obtenemos la siguiente matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Ejemplo 2.3.* Sea $\{X_n ; n = 0, 1, \ldots\}$ definido por

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n & \text{si } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

con $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, variables aleatorias discretas, independientes e idénticamente distribuidas, con distribución de probabilidad $\{ p_k ; k = 0, 1, 2, \ldots \}$. Dado que $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$, tenemos que,

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0, X_1, \ldots, X_n\} = P\{Y_{n+1} = j - X_n \mid X_0, X_1, \ldots, X_n\} = p_{j-X_n}$$

Claramente únicamente depende de $X_n$. Así tenemos que el proceso $\{X_n, n \in T\}$ define una cadena de Markov con probabilidades de transición

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = p_{j-i}$$

y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

***Teorema 2.1.*** Sea $\{X_n; n \in T, n \geq 0\}$ una cadena de Markov, para todo $m, n \in T$, con $m, n \geq 0$ y $i_0, i_1, \ldots, i_m \in E$

$$P\{ X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0 \} = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m}$$

*Demostración.*

$$P\{ X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0 \}$$

$$= P\{ X_{n+2} = i_2, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0, X_{n+1} = i_1\} \, P\{ X_{n+1} = i_1 \mid X_n = i_0 \}$$

por ser $\{X_n; n \in T, n \geq 0\}$ una cadena de Markov y por definición de probabilidad de transición

$$= P\{ X_{n+2} = i_2, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_{n+1} = i_1\} \; p_{i_0 i_1}$$

repitiendo el primer paso

$$= P\{ X_{n+3} = i_3, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_{n+1} = i_1, X_{n+2} = i_2\} \, p_{i_0 i_1} \, P\{ X_{n+2} = i_2 \mid X_{n+1} = i_1\}$$

$$= P\{ X_{n+3} = i_3, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_{n+2} = i_2\} \, p_{i_0 i_1} \; p_{i_1 i_2}$$

y así sucesivamente hasta llegar a

$$P\{ X_{n+1} = i_1, \dots , X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0 \} = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m}$$

□

Sea $\pi(i) = P\{ X_0 = i \}$ la distribución inicial de $X_n$.

***Corolario 2.1.1.*** Sea $\{X_n;\, n \in T,\, n \geq 0\}$ una cadena de Markov, la ley de distribución de probabilidades del vector aleatorio $( X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots , X_n = i_n )$ depende de las probabilidades de transición $p_{ij}$ y de la distribución inicial, es decir,

$$P\{ X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots , X_n = i_n \} = \pi(i_0)\, p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

*Demostración.*

$$P\{ X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots , X_n = i_n \} = P\{ X_1 = i_1, \dots , X_n = i_n \mid X_0 = i_0 \}\, P\{ X_0 = i_0 \}$$

Del teorema 2.1 y de la definición de distribución inicial

$$P\{ X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots , X_n = i_n \} = \pi(i_0)\, p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

□

Los $p_{ij}^{n}$ para $n, i, j \geq 0$, son los elementos de la matriz $\mathbf{P^n}$.

***Teorema 2.2.*** Sea $\{X_n;\, n \in T,\, n \geq 0\}$ una cadena de Markov, para $m \in T$, con $m \geq 0$

$$P\{ X_{n+m} = j \mid X_n = i \} = p_{ij}^{m}$$

para todo $i, j \in E$.

*Demostración.*

Demostremos por inducción.

Para $m = 1$, por definición, esto es claro.

Por hipótesis de inducción se cumple para $m = l$, ahora verifiquemos si se cumple para $m = l + 1$.

$$P\{ X_{n+l+1} = j \mid X_n = i \} = \sum_{k \in E} P\{X_{n+l+1} = j, X_{n+l} = k \mid X_n = i\}$$

$$=\sum_{k\in E} P\{X_{n+l+1}=j \mid X_{n+l}=k, X_n=i\} P\{X_{n+l}=k \mid X_n=i\}$$

$$=\sum_{k\in E} P\{X_{n+l+1}=j \mid X_{n+l}=k\} P\{X_{n+l}=k \mid X_n=i\}$$

por hipótesis de inducción

$$= \sum_{k\in E} p_{kj} p_{ik}^{l} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{l} p_{kj}$$

$$= p_{ij}^{l+1}$$

□

Así que para una cadena de Markov, la probabilidad de transición en $m$ pasos se define como

$$P\{ X_{n+m}=j \mid X_n=i\} = p_{ij}^{m} .$$

***Teorema 2.3.*** Sea $\{X_n;\, n \in T,\, n \geq 0\}$ una cadena de Markov

$$P\{ X_n=j \} = \sum_{i\in E} P\{X_0=i\} p_{ij}^{n}$$

para todo $j \in E$ .

*Demostración.*

$$P\{ X_n=j \} = \sum_{i\in E} P\{X_n=j, X_0=i\}$$

$$= \sum_{i\in E} P\{X_0=i\} P\{X_n=j \mid X_0=i\}$$

por el teorema anterior

$$= \sum_{i\in E} P\{X_0=i\} p_{ij}^{n}$$

□

***Teorema 2.4.*** ( Ecuación de Chapman – Kolmogorov ) Sea $\{X_n;\, n \in T,\, n \geq 0\}$ una cadena de Markov, para todo $m, n \in T$, con $m, n \geq 0$ e $i, j \in E$

$$p_{ij}^{n+m} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{n} p_{kj}^{m}$$

*Demostración.*

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{n+m} &= P\{X_{n+m}=j \mid X_0=i\} \\
&= \sum_{k\in E} P\{X_{n+m}=j, X_m=k \mid X_0=i\} \\
&= \sum_{k\in E} P\{X_{n+m}=j \mid X_m=k, X_0=i\} P\{X_m=k \mid X_0=i\} \\
&= \sum_{k\in E} P\{X_{n+m}=j \mid X_m=k\} P\{X_m=k \mid X_0=i\} \\
&= \sum_{k\in E} p_{ik}^{m} p_{kj}^{n}
\end{aligned}
$$

□

*Ejemplo 2.4.* Del ejemplo 2.1, consideremos que $\alpha = 0.7$ (la probabilidad de que mañana llueva dado que hoy llueve) y $\beta = 0.4$ (la probabilidad de que mañana llueva dado que hoy no llueva), entonces la matriz de transición es:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la probabilidad de que llueva en 4 días dado que hoy está lloviendo?

Tenemos que calcular $p_{00}^{4}$, para obtenerlo calculemos la matriz de transición $\mathbf{P}^4$, luego entonces

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix} \qquad \text{y}$$

$$\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^2\,\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{pmatrix}$$

por tanto la probabilidad de que llueva dentro de 4 días dado que está lloviendo hoy es 0.5749.

## 2.2. Clasificación de estados.

***Definición 2.5.*** Si la probabilidad $p_{ij}^{n}$ es no cero para alguna $n \geq 1$ se dice que el estado $i$ lleva al estado $j$ o también que $j$ es *alcanzado* o *accesible* desde el estado $i$ se denota por $i \to j$.

***Definición 2.6.*** Se dice que los estados $i, j$ se *comunican* si $i \to j$ y $j \to i$, se denota por $i \leftrightarrow j$.

***Definición 2.7.*** Una cadena de Markov es *irreducible* si todos los estados se comunican.

La definición anterior nos dice que una cadena de Markov es irreducible si cada estado es alcanzado desde cualquier otro, en algún número de pasos.

***Teorema 2.5.*** La comunicación es simétrica y transitiva es decir para estados $i, j$ y $k$,

1) $i \leftrightarrow j \;\Rightarrow\; j \leftrightarrow i$
2) si $i \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow k \;\Rightarrow\; i \leftrightarrow k$

*Demostración.*

1) se cumplen inmediatamente a partir de la definición, probemos 2).

Si $i \leftrightarrow j$ entonces existe $n_1 > 0$, $p_{ij}^{n_1} > 0$ y
$j \leftrightarrow k$ entonces existe $n_2 > 0$, $p_{jk}^{n_2} > 0$

usando Chapman Kolmogorov

$$p_{ik}^{n_1+n_2} = \sum_{r \in E} p_{ir}^{n_1} p_{rk}^{n_2} \geq p_{ij}^{n_1} p_{jk}^{n_2} > 0,$$

lo que significa que si existe un $n_3$ tal que

$$p_{ik}^{n_3} > 0 .$$

□

***Definición 2.8.*** Un estado $j$ que se comunica nuevamente con él, $j \leftrightarrow j$ , se dice que es un *estado de retorno*, es decir, $j$ es un estado de *retorno* si $p_{jj}^{n} > 0$, para alguna $n \geq 1$.

***Definición 2.9.*** Dado un estado $j$ una *clase de comunicación* $E_j$ es definida como el conjunto de todos los estados $k$ los cuales se comunican con $j$; es decir

$$k \in E_j \text{ si, y sólo si } k \leftrightarrow j.$$

Podría pasar que $E_j$ sea un conjunto vacío, es decir, que puede existir un estado $j$ que no se comunica ni con el mismo, $j$ es un estado de *no retorno*.

***Teorema 2.6.*** Si $E_1$ y $E_2$ son dos clases de comunicación, entonces $E_1$ y $E_2$ son disjuntos.

*Demostración.*

Si para un estado que esté tanto en $E_1$ como en $E_2$, significa que $E_1 = E_2$, habremos probado que son disjuntos.
Supongamos que $E_1$ y $E_2$ tienen un estado $i$ en común. Sean $j$ y $k$ dos estados tales que $E_1 = E_j$ y $E_2 = E_k$ , probemos que $E_j = E_k$.

Verifiquemos primero que $E_j \subset E_k$ sea $h \in E_j$ , dado que $h \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow i$ , entonces $h \leftrightarrow i$, como $i \leftrightarrow k$ entonces $h \leftrightarrow k$, se cumple que $E_j \subset E_k$,, análogamente podemos probar que $E_k \subset E_j$, lo que significa que $E_1 = E_2$ cuando tienen un estado en común.

□

Con la definición de clase de comunicación, tenemos que una cadena de Markov es irreducible si la cadena consiste de una sola clase de comunicación.

Podemos entonces decir que todo estado $j$ en una cadena de Markov o bien pertenece a una clase de comunicación o es un estado de no retorno. Podemos enunciar el siguiente resultado.

***Teorema 2.7.*** El conjunto de estados $E$ de una cadena de Markov puede escribirse como la unión de un finito o contable infinito, de conjuntos disjuntos $E_r$ ,

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \ \dots \ \cup E_r \cup \dots \qquad \text{y} \quad E_i E_j = \varnothing \text{ para } i \neq j,$$

Donde cada conjunto $E_r$ es una clase de comunicación o contiene exactamente un estado de no retorno.

Cuando un proceso entra a un conjunto $C$ de estados y ya no puede salir nunca de él, se dice que el conjunto $C$ de estados es cerrado, un conjunto cerrado puede contener uno o más estados, definamos formalmente a un conjunto cerrado.

***Definición 2.10.*** Un conjunto $C$ de estados se dice que es *cerrado* si $p_{ij}^{n} = 0$, para alguna $n \geq 1$ y para todo $i \in C$ y $j \notin C$.

***Definición 2.11.*** $j$ es un estado *absorbente* si, $p_{jj}^{n} = 1$ y $p_{jk}^{n} = 0$ para toda $n \geq 1$ y para todo $j \neq k$.

La definición anterior nos dice que, si un conjunto cerrado $C$ contiene solamente un estado, entonces se le llama absorbente.

A partir de las definiciones es claro que si un proceso no contiene conjuntos cerrados será irreducible.

***Definición 2.12.*** El *periodo* $d(i)$ de retorno al estado $i$ es definido como

$$d(i) := \text{m.c.d. } \{m : p_{ii}^{m} > 0\}.$$

***Definición 2.13.*** El estado $i$ es *aperiódico* si $d(i) = 1$ y *periódico* si $d(i) > 1$.

***Definición 2.14.*** El *tiempo de llegada* a un estado $j \in E$, se define como

$$T_j = \inf \{n \geq 1 \mid X_n = j\}.$$

La probabilidad de empezar en el estado $i$ y llegar al estado $j$ en $m$ pasos es, $f_{ij}^{m} = P_i\{T_j = m\}$.

Definamos a

$$f_{ij} = P_i\{T_j < \infty\} = \sum_{m=1}^{\infty} P_i\{T_j = m\} = \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{m}$$

como la probabilidad de que el proceso esté en $i$ y alcance alguna vez $j$.

$f_{ij}$ la podemos calcular teniendo en cuenta las siguientes opciones:

1) que de $i$ pase a $j$ en el primer paso con probabilidad $p_{ij}$ o
2) que la primera transición sea a $k \in \{E - j\}$ y después eventualmente pasar a $j$.

De esto, podemos enunciar el siguiente resultado.

***Teorema 2.8.*** Para cada $i, j \in E$,

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in \{E-j\}} p_{ik} f_{kj} \ .$$

Del teorema anterior podemos también deducir

$$f_{ij}^{m} = \begin{cases} p_{ij} & m = 1 \\ \sum_{k \in \{E-j\}} p_{ik} f_{kj}^{m-1} & m \geq 2 \end{cases}$$

***Definición 2.15.*** Sea $\{X_n;\, n \in T,\, n \geq 0\}$ una cadena de Markov, definimos a

$$N_j = \sum_{k=0}^{\infty} I\{X_k = j\}$$

como el *número de llegadas* al estado $j$

De la definición anterior $P_i\{N_j = m\}$ es la probabilidad, de estando en el estado $i$ visitemos $m$ veces el estado $j$.

***Teorema 2.9.*** Sea $\{X_n;\, n \in T,\, n \geq 0\}$ una cadena de Markov entonces

1) $P_j\{N_j = m\} = \left(f_{jj}\right)^{m-1} (1 - f_{jj})$, $m = 1, 2, \ldots$

2) $P_i\{N_j = m\} = \begin{cases} 1 - f_{ij} & m = 0 \\ f_{ij}\left(f_{jj}\right)^{m-1}\left(1 - f_{jj}\right) & m = 1, 2, \ldots \end{cases}$ para $i \neq j$.

Hacemos notar que $\left(f_{jj}\right)^{m-1}$ significa que $f_{jj}$ está elevado a la potencia $m-1$, que es muy diferente a como definimos $f_{jj}^{m}$.

*Demostración.*

Demostremos 1), el que suceda el evento $N_j = m$ es equivalente a que ocurra $T_{j_1} < \infty$, $T_{j_2} < \infty$, $\ldots$, $T_{j_m} < \infty$, $T_{j_{m+1}} = \infty$, donde $j_m$ representa la $m$-ésima llegada al estado $j$.

El tiempo entre las llegadas es independiente es decir,

$$\{T_{j_1} < \infty\},\ \{T_{j_2} - T_{j_1} < \infty\}, \{T_{j_3} - T_{j_2} < \infty\},\ \ldots\ ,\ \{T_{j_{m+1}} - T_{j_m} = \infty\}$$

son independientes, esto se debe a que Markov implica independencia de llegadas de *j* a *j*, sus respectivas probabilidades asociadas son:

$$1, f_{jj}, f_{jj}, \ldots, 1 - f_{jj}$$

la primera es uno porque ya estamos en *j*, luego entonces tenemos que

$$P_j\{N_j = m\} = f_{jj}\, f_{jj} \cdots (1 - f_{jj}) = \left(f_{jj}\right)^{m-1} (1 - f_{jj}).$$

Ahora demostremos 2), para $m = 0$, significa que *j* nunca será alcanzado desde *i*, es decir

$$P_i\{N_j = 0\} = P_i\{T_j = \infty\} = 1 - P_i\{T_j < \infty\} = 1 - f_{ij}.$$

Para $m \neq 0$, la diferencia con el inciso anterior es que ya estamos en el estado *j* ( con probabilidad uno ) luego entonces sólo hace falta considerar la probabilidad de pasar de *i* a *j* por primera vez, esto sucederá con probabilidad

$$P_i\{T_j < \infty\} = f_{ij}$$

tenemos entonces que

$$P_i\{N_j = m\} = f_{ij}\left(f_{jj}\right)^{m-1} (1 - f_{jj})$$

□

***Definición 2.16.***

1) *j* es *recurrente* si $P_j\{T_j < \infty\} = 1$, significa que si estamos en el estado *j*, la probabilidad de que el proceso regrese alguna vez al estado *j* es uno.
2) Si no es recurrente se dice que es *transitorio*. Es decir $P_j\{T_j = \infty\} > 0$.
3) Si *j* es recurrente y $E_j(T_j) = \infty$ se dice que *j* es *cero recurrente* o *recurrente nulo*.
4) Si *j* es recurrente y $E_j(T_j) < \infty$ se dice que es *recurrente positivo*.

Si $f_{jj} = 1$ entonces *j* es recurrente, que $f_{jj} = 1$ significa que tendremos un número infinito de llegadas a *j*, $P\{N_j = \infty\} = 1$ y que para todo *m*, $P\{N_j = m\} = 0$, también podemos ver que $E_j(N_j) = \infty$.

Si $f_{jj}$ <1, tenemos que $P_j\{ T_j < \infty \} <1$, lo que significa que $P_j\{ T_j = \infty \} > 0$, esto significa que existe la probabilidad de nunca regresar a $j$, es decir, que $j$ es transitorio. También podemos ver que si $f_{jj}$ <1, del teorema 2.9 es claro que la distribución de $N_j$ cuando empieza en $j$ es una geométrica con parámetro $1-f_{jj}$.

***Teorema 2.10.*** Si $f_{jj}$ <1 entonces $N_j$ iniciando en $j$ se distribuye como una geométrica con parámetro $1-f_{jj}$.

***Definición 2.17.*** Sea **R**, la matriz con elementos $r_{ij} = E_i( N_j )$ con $i, j \in E$, a la matriz **R** se le llama *matriz potencia.*

$$\begin{aligned} r_{ij} = E_i( N_j ) &= E_i\left(\sum_{n=0}^{\infty} I\{X_n = j\}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{X_n = j\} \\ &= \sum_{n=o}^{\infty} p_{ij}^n \end{aligned}$$

en forma matricial nos quedaría que

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \cdots$$

***Teorema 2.11.*** 1) $r_{jj} = \dfrac{1}{1-f_{jj}}$

2) $r_{ij} = f_{ij} r_{jj}$ con $i \neq j$.

*Demostración.*

El inciso 1 sale de que la distribución de $N_j$ iniciando en $j$ es una distribución geométrica, su valor esperado es

$$E_j( N_j ) = \frac{1}{1-f_{jj}}$$

Probemos ahora 2,

$$
\begin{aligned}
r_{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} m P_i\{N_j = m\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m f_{ij}(1-f_{jj})\left(f_{jj}\right)^{m-1} \\
&= f_{ij}\sum_{m=1}^{\infty} m(1-f_{jj})\left(f_{jj}\right)^{m-1} \\
&= f_{ij}\, E_j(N_j) \\
&= f_{ij}\, r_{jj}
\end{aligned}
$$

□

Podemos decir que $j$ es recurrente si, y sólo si $E_j(N_j) = \infty$ y $j$ es transitorio si, y sólo si $E_j(N_j) < \infty$.

***Teorema 2.12.***

1) Si $j$ es transitorio o recurrente nulo, entonces para todo $i \in E$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 0.$$

2) Si $j$ es recurrente positivo y aperiódico, entonces

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{n} = \pi(j) > 0$$

y también

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = f_{ij}\pi(j)$$

para todo $i \in E$.

*Demostración.*

Aquí probaremos el caso cuando $j$ es transitorio, para una demostración de $j$ recurrente nulo y el inciso 2 puede encontrarse en Çinlar [ 1975, p. 301].

Si $j$ es transitorio entonces $r_{jj} = E_j(N_j) < \infty$ , entonces

$$r_{ij} = f_{ij}\, r_{jj} < r_{jj} < \infty$$

$$r_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{n} < \infty$$

luego entonces $r_{ij}$ es finito solamente si $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 0$.

□

***Teorema 2.13.*** Si $j$ es recurrente y $j \to k$ entonces $k \to j$ y $f_{kj} = P_k\{T_j < \infty\} = 1$ .

*Demostración.*

$j \to k$ significa que se puede pasar de $j$ a $k$ sin visitar a $j$, a la probabilidad de este evento le asignamos $\alpha > 0$. Sean:

A = " nunca visitar a $j$ desde $j$ " y
B = "Caminar de $j$ a $k$ y nunca regresar a $j$ desde $k$ "

por ser B un caso especial de A tenemos que P{ A } ≥ P { B }, ahora bien

$$P\{A\} = 1 - f_{jj} \qquad \text{y} \qquad P\{B\} = \alpha\,(1 - f_{kj})$$

Por ser $j$ recurrente $f_{jj} = 1$, entonces

$$0 = 1 - f_{jj} = P\{A\} \geq P\{B\} = \alpha\,(1 - f_{kj}) \geq 0$$

entonces, $\alpha\,(1 - f_{kj}) = 0$
como $\alpha > 0$, entonces $1 - f_{kj} = 0$ , es decir, $f_{kj} = 1$.

Significa también que $k \to j$ .

□

***Teorema 2.14.*** Si $j$ es recurrente y $j \to k$ entonces $k$ es recurrente.

*Demostración.*

Si $j \to k$ significa que existe un $s > 0$ tal que $p_{jk}^{s} > 0$ , del teorema anterior como $j$ es recurrente y $j \to k$ entonces $k \to j$, es decir, existe un $m > 0$ tal que $p_{kj}^{m} > 0$ , es decir que $p_{jk}^{s}\, p_{kj}^{m} > 0$.

Usando Chapman – Kolmogorov

$$p_{kk}^{m+n+l} = P_k\{ X_{m+n+l} = k\} = \sum_{i\in E} p_{ki}^{m} p_{ik}^{n+l}$$

considerando un caso particular de $p_{ik}^{n+l}$

$$\sum_{i\in E} p_{ki}^{m} p_{ik}^{n+l} \geq \sum_{i\in E} p_{ki}^{m} p_{ii}^{n} p_{ik}^{l}$$

ya que $j \in E$, tomamos el elemento $j$ de la suma, nos queda que

$$\sum_{i\in E} p_{ki}^{m} p_{ii}^{n} p_{ik}^{l} \geq p_{kj}^{m} p_{jj}^{n} p_{jk}^{l}$$

es decir, que

$$p_{kk}^{m+n+l} \geq p_{kj}^{m} p_{jj}^{n} p_{jk}^{l} \tag{1}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} r_{kk} = E_k(N_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_k\{X_n = k\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{n} \\ &\geq \sum_{n=m+l}^{\infty} p_{kk}^{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{n+m+l} \end{aligned}$$

por (1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{n+m+l} &\geq \sum_{n=0}^{\infty} p_{kj}^{m} p_{jj}^{n} p_{jk}^{l} \\ &= p_{kj}^{m} p_{jk}^{l} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{n} \\ &= p_{kj}^{m} p_{jk}^{l}\, E_j(N_j) \end{aligned}$$

como $j$ es recurrente $E_j(N_j) = \infty$, luego entonces $E_k(N_k) = \infty$, luego entonces $k$ es recurrente.

□

***Teorema 2.15.*** Si $j$ es recurrente, entonces existe un conjunto $C_j$ cerrado e irreducible que contiene a $j$.

*Demostración.*

Sea $C_j := \{ j \in E,\ j \rightarrow i \}$ , como $j$ es recurrente entonces si $j \rightarrow i$ entonces por el teorema 2.13 $i \rightarrow j$ entonces $C_j := \{ i \in E,\ j \leftrightarrow i \}$.

□

Con la demostración de este teorema y el teorema 2.6. podemos enunciar el siguiente resultado.

***Teorema 2.16.*** Los estados recurrentes se dividen en una manera única en conjuntos cerrados e irreducibles.

***Teorema 2.17.*** Si $\{X_n;\ n \in T\ ,\ n \geq 0\}$ es una cadena de Markov, con $E$ irreducible entonces.

1) Todos los estados son recurrentes.
2) Todos los estados son transitorios.

*Demostración.*

1) Por el teorema anterior y el teorema 2.14 si $j$ es recurrente y $E$ es irreducible, entonces todo elemento de $E$ debe ser recurrente.

2) Por el teorema 2.14, sabemos que para $j$, $k \in E$, si $j$ es recurrente y $j \rightarrow k$ entonces $k$ es recurrente, negando ambas proposiciones, tenemos que, si $k$ es transitorio entonces $j$ es transitorio, $k \rightarrow j$ .

□

***Teorema 2.18.*** Si $\{X_n;\ n \in T\ ,\ n \geq 0\}$ es una cadena de Markov, con $E$ irreducible entonces. Todos los estados tienen la misma periodicidad.

*Demostración.*

Sea $k$ un estado con periodicidad $d(\ k\ )$, como $E$ es irreducible $k \leftrightarrow j$, entonces existe $s>0$ y $r\ > 0$, tal que $p^r_{jk}\ > 0$ y $p^s_{kj}\ > 0$ , ahora bien,

$$p^{s+r}_{kk}\ \geq\ p^s_{kj}\ p^r_{jk}\ > 0$$

para el estado $j$, sea $d(j)$ su periodicidad, sea $n$ un múltiplo de $d(j)$, supongamos que $n$ no es múltiplo de $d(k)$, luego entonces para

$$p_{kk}^{s+r+n} \geq p_{kj}^{s}\, p_{jj}^{n}\, p_{jk}^{r}$$

como $n$ no es múltiplo de $d(k)$, entonces $p_{kk}^{s+r+n} = 0$, lo que significa que $p_{kj}^{s}\, p_{jj}^{n}\, p_{jk}^{r} = 0$, pero como $p_{kj}^{s}\, p_{jk}^{r} > 0$ entonces $p_{jj}^{n} = 0$, es una contradicción ya que $n$ es un múltiplo de $d(j)$, entonces, por tanto $d(k) = d(j)$.

□

***Teorema 2.19.*** Si $\{X_n;\ n \in T,\ n \geq 0\}$ es una cadena de Markov, y sea $C < \infty$ un subcojunto de estados irreducible, entonces no tiene estados transitorios, ni recurrentes nulos.

*Demostración.*

Demostremos que $C$ no puede tener estados transitorios, el caso de recurrente nulo es totalmente análogo.
Sea $j$ un estado transitorio por el teorema anterior significa que todos los estados en $C$ son transitorios, ahora del teorema 2.12, si $j$ es transitorio, entonces para algún $i \in C$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 0$$

para cada $i \in C$ tenemos que $\sum_{j\in C} p_{ij}^{n} = 1$, entonces

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in C} p_{ij}^{n} = \sum_{j\in C} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 0$$

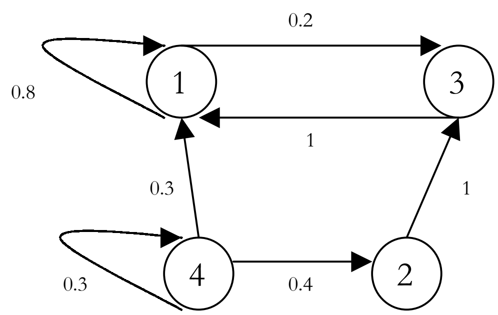
es una contradicción por lo que $j$ no puede ser transitorio.

□

*Ejemplo 2.5.* Sea $\mathbf{P}$ la siguiente matriz de transición.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Dado que $p_{13} > 0$ y $p_{31} > 0$ y $p_{12} = p_{14} = p_{32} = p_{34} = 0$, los estados $\{1, 3\}$ son cerrados e irreducibles, son recurrentes positivos por que son finitos, esto es por el teorema 2.19, los estados 2 y 4 son transitorios.




Obtengamos los elementos de la matriz **R**, sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov , con espacio de estados $E$ y matriz de transición **P**.

Si $j$ es un estado recurrente significa que:

$$f_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = \infty,$$

ahora bien, si $i$ es cualquier estado, entonces

$$i \to j \quad \Leftrightarrow \quad f_{ij} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{ij} = f_{ij} r_{jj} = \infty$$

y si

$$i \not\to j \Leftrightarrow \quad f_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{ij} = 0.$$

Si $j$ es transitorio e $i$ es recurrente, tenemos que $i \not\to j$ por que si $i \to j$ e $i$ es recurrente entonces $j$ es recurrente, caeríamos en una contradicción, así que

$$r_{ij} = 0 \quad \text{porque} \quad f_{ij} = 0.$$

Por último analicemos el caso en el que $i, j$ son transitorios, sea $D$ el conjunto de estados transitorios, sean **Q** y **S** las matrices que se obtienen a partir de **P** y **R** respectivamente, al eliminar todos los renglones y columnas correspondientes a los estados recurrentes, es decir, **Q** y **S** tienen elementos

$$q_{ij} = p_{ij} \text{ y } s_{ij} = r_{ij}, \text{ con } i, j \in D.$$

la matriz de probabilidades de transición la podemos particionar de la siguiente manera.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

de manera similar tendríamos, para $m \geq 0$ en los enteros

$$\mathbf{P}^{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{m}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{\mathrm{m}} & \mathbf{Q}^{\mathrm{m}} \end{pmatrix},$$

aquí $\mathbf{K}^{\mathrm{m}}$ es la potencia $m$ de $\mathbf{K}$ similar para $\mathbf{Q}$ pero $\mathbf{L}_{\mathbf{m}}$ es únicamente una matriz. Por definición

$$\mathbf{R} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}^{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{K}^{\mathrm{m}} & \mathbf{0} \\ \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{L}_{\mathrm{m}} & \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{Q}^{\mathrm{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}' & \mathbf{S} \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{S} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{Q}^{\mathrm{m}} = \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots$

tenemos que,

$$\mathbf{SQ} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \mathbf{Q}^3 + \cdots = \mathbf{QS}$$

$$\mathbf{SQ} = \mathbf{QS} = \mathbf{S} - \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{S} = \mathbf{I} \text{ y } \mathbf{S}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \mathbf{I}$$

Si $D$ es finita entonces $\mathbf{S}$ es la inversa de $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$ **.** Si no es finita podemos tener muchas soluciones.

***Teorema 2.20.*** $\mathbf{S}$ es la solución minimal de $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{Y} = \mathbf{I}$, $\mathbf{Y} \geq 0$.

*Demostración.*

Hay que demostrar que si hay otra solución $\mathbf{Y}$ de $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{Y} = \mathbf{I}$ entonces $\mathbf{Y} \geq \mathbf{S}$, sea $\mathbf{Y}$ una solución, $\mathbf{Y} \geq 0$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{Y} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{I} + \mathbf{QY}$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{Q}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\mathbf{Y})$$
$$= \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2\mathbf{Y}$$

y sustituyendo **Y** sucesivamente

$$\mathbf{Y} = \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n+1}\mathbf{Y},$$

tenemos que

$$\mathbf{Y} \geq \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^n$$

$$\mathbf{S} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{Q}^m \leq \mathbf{Y}.$$

□

Si **Y** es una solución y **S** es otra solución, entonces , $\mathbf{H} = \mathbf{Y} - \mathbf{S} \geq 0$, y

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \mathbf{Y} - \mathbf{S} &= \mathbf{I} + \mathbf{QY} - \mathbf{I} - \mathbf{QS} \\ &= \mathbf{Q}(\mathbf{Y} - \mathbf{S}) \\ &= \mathbf{QH} \end{aligned}$$

cada columna **h** de **H** satisface

$$\mathbf{h} = \mathbf{Qh} \geq 0$$

por otro lado, de **S**

$$s_{ij} = f_{ij} r_{jj} \leq r_{jj} < \infty$$

porque *i, j* son estados transitorios, la única solución de $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{Y} = \mathbf{I}$ es **S**, si, y sólo si, la solución de $\mathbf{h} = \mathbf{Qh}$ es $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

***Corolario 2.20.1.*** **S** es la única solución a $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{Y} = \mathbf{I}, \mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$ si, y sólo si $\mathbf{h} = \mathbf{Qh}$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{1}$ implica que $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ .

*Ejemplo 2.6.* $X$ es una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.2 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.3 \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Como podemos ver los estados 1, 2, 3 forman un conjunto irreducible, de estados recurrentes positivos, los estados 4 y 5 forman otra clase de conjunto irreducible de estados recurrentes positivos y los estados 6, 7, y 8 son estados transitorios, los cuales únicamente pueden ir a los estados 1, 2 y 3, no tienen comunicación con los estados 4 y 5.

Calculemos **R**, para $j$ recurrente e $i$ cualquier estado tenemos que $r_{ij} = \infty$, en caso de que $i \not\to j$, tenemos que $r_{ij} = 0$, únicamente nos hace falta calcular el caso en el que tanto $i$ como $j$ son estados transitorios (nos hace falta calcular la submatriz inferior del lado derecho), obtengamos **Q** que se obtienen a partir de **P**, al eliminar todos los renglones y columnas correspondientes a los estados recurrentes

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos estados transitorios finitos, luego entonces **S** ( **S** que se obtienen a partir de **R**, al eliminar todos los renglones y columnas correspondientes a los estados recurrentes) es la inversa de **I – Q**

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.6 & 0 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ -0.6 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 125 & 75 & 15 \\ 15 & 75 & 15 \\ 75 & 45 & 75 \end{pmatrix},$$

así tenemos que la matriz **R** para esta cadena de Markov es

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} 125/66 & 75/66 & 15/66 \\ 15/66 & 75/66 & 15/66 \\ 75/66 & 45/66 & 75/66 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos los valores para la matriz **F**. Si $i$, $j$ son recurrentes y pertenecen al mismo conjunto cerrado e irreducible entonces $f_{ij} = 1$.

Si $i$ es recurrente y $j$ es transitorio entonces $f_{ij} = 0$.

Si $i, j$ son recurrentes, $i \in E_1$ y $j \in E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ entonces $f_{ij} = 0$.

Si $i, j$ son transitorios, entonces $r_{ij} < \infty$, del teorema 2.11.1

$$r_{jj} = \frac{1}{1 - f_{jj}} \quad \Rightarrow \; r_{jj}(1 - f_{jj}) = 1$$

$$\Rightarrow \; r_{jj} - 1 = r_{jj} f_{jj}$$

$$\Rightarrow \; f_{jj} = 1 - \frac{1}{r_{jj}}$$

y del teorema 2.11.2

$$r_{ij} = f_{ij} r_{jj} \quad \Rightarrow \quad f_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_{jj}}$$

***Teorema 2.21.*** Si $i$ es transitorio y $C$ es un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes

$$f_{ij} = f_{ih} \text{ para todo } j, h \in C.$$

*Demostración.*

Para $j, h \in C$, $f_{jh} = f_{hj} = 1$, así si la cadena llega a un estado de $C$, éste también visita todos los otros estados, entonces $f_{ij} = f_{ih}$.

□

Sea $C_1$, $C_2$, $\ldots$ una clase de conjuntos cerrados e irreducibles y $D$ es un conjunto de estados transitorios, donde $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\ldots$ son las matrices de transición correspondientes a los conjuntos $C_1$, $C_2$, $\ldots$ y $\mathbf{Q}$ es la que está formada por los estados transitorios y $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\ldots$ son las matrices de transición de los estados transitorios a los estados de la clase de conjuntos cerrados e irreducibles $C_1$, $C_2$, $\ldots$ respectivamente, la matriz $\mathbf{P}$ nos queda de la siguiente forma

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_3 & \cdots & \mathbf{Q} \end{pmatrix}.$$

Como estamos interesados únicamente en saber cuando el conjunto $C_j$ será alcanzado, sin pérdida de generalidad podemos considerarlos como estados absorbentes es decir cambiemos a $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\ldots$ por 1, 1, $\ldots$ , así nuestra matriz de transición $\mathbf{P}$ la podemos rescribir de la siguiente forma

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \cdots & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

donde el $i$-ésimo elemento de $\mathbf{b}_j$ ( $\mathbf{b}_j$ es un vector columna ) es, la probabilidad de estando en el estado transitorio $i$, llegue al conjunto $C_j$,

$$\mathbf{b}_j(i) = \sum_{k \in C_j} p_{ik}, \text{ con } i \in D$$

o más simple

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m)$, los elementos de $\mathbf{B}$ son $b_{ij} = \sum_{k \in C_j} p_{ik}$, de aquí se sigue que

$$\tilde{\mathbf{P}}^{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B_n} & \mathbf{Q^n} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{B_n} = (\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^{n-1})\mathbf{B}$, los elementos $bn_{ij}$ de la matriz $\mathbf{B_n}$, nos indican la probabilidad de que en $n$ pasos vayamos desde el estado $i$ a $C_j$ o bien es la probabilidad que desde el estado $i$ el proceso entre al $C_j$ en un tiempo $n$ o antes es decir ( lo podemos ver como $X_0 = i$ queremos llegar a $X_n = C_j$ )

$$bn_{ij} = P_i\{ T_j < n+1\}$$

entonces la probabilidad de que alcancemos a $C_j$ a partir del estado transitorio $i$ en algún momento sería

$$\begin{aligned} P_i\{ T_j < \infty \} &= \lim_{n\to\infty} P_i\{ T_j \le n+1 \} \\ &= \lim_{n\to\infty} bn+1_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbf{B_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \mathbf{Q^k} \right) \mathbf{B} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q^k} \right) \mathbf{B} \\ &= \mathbf{SB} \end{aligned}$$

luego entonces si $i$ es transitorio, $f_{ik} = (sb)_{ij}$, para todo $k \in C_j$, por el teorema anterior podemos definir

$$g_{ij} = f_{ik} = (sb)_{ij}$$

como la probabilidad de alcanzar el conjunto $C_j$ desde el estado transitorio $i$.

De todo lo anterior podemos concluir que para cada estado transitorio $i$ y una clase recurrente $C_j$, la probabilidad de alcanzar el conjunto $C_j$ desde el estado transitorio $i$, es

$$g_{ij} = f_{ik} = (sb)_{ij} \quad \text{para todo } k \text{ en } C_j.$$

***Lema 2.1.*** Sea $i$ un estado transitorio desde el cuál únicamente un número finito de estados transitorios puede ser alcanzado. Además, supóngase que hay únicamente una clase $C$ de estados recurrentes, que puede ser alcanzado desde $i$. Entonces $f_{ij} = 1$ para todo $j \in C$.

*Demostración.*

Al existir únicamente un conjunto de estados recurrentes que son alcanzados a partir del conjunto de estados transitorios **D**, tenemos que la matriz **B** se convierte en un vector columna, por definición $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$, es decir, si **1** es el vector columna formado por puros unos, por la definición

$$\mathbf{P\,1} = \mathbf{1}$$

tenemos que, $\mathbf{B} + \mathbf{Q1} = \mathbf{1}$, o bien $\mathbf{B} = \mathbf{1} - \mathbf{Q1}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_n &= (\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^{n-1})\mathbf{B} \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^{n-1})(\mathbf{1} - \mathbf{Q1}) \\
&= \mathbf{I\,1} + \mathbf{Q1} + \mathbf{Q}^2\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{1} - \mathbf{Q1} - \mathbf{Q}^2\mathbf{1} - \cdots - \mathbf{Q}^n\mathbf{1} \\
&= \mathbf{1} - \mathbf{Q}^n\mathbf{1}
\end{aligned}$$

Así si tomamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{B_n} = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{1} - \mathbf{Q}^n\mathbf{1})$$

dado que $\sum \mathbf{Q}^n < \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}^n = 0$, entonces el límite anterior nos queda como $\lim_{n\to\infty} \mathbf{B_n} = \mathbf{1}$, obtenemos

$$g_{ij} = f_{ik} = 1, \text{ para todo } k \in C.$$

□

*Ejemplo 2.7.* Ahora calculemos la matriz **F** de la cadena del ejemplo 2.6, si $i$, $j$ son recurrentes y pertenecen a la misma clase entonces $f_{ij} = 1$, cuando pertenecen a diferentes clases $f_{ij} = 0$, si $i$ es recurrente y $j$ es transitorio $f_{ij} = 0$. Si $i$, $j$ son transitorios usamos los resultados de **R** para calcular

$$f_{jj} = 1 - \frac{1}{r_{jj}}, \quad f_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_{jj}}$$

por ejemplo sea $i = 6$, $j = 7$, del ejemplo 2.6 $r_{67} = \dfrac{75}{66}$ y $r_{77} = \dfrac{75}{66}$ luego entonces $f_{67} = 1$.
Y usando el lema 2.1 para el caso en que $i$ es transitorio y $j$ es recurrente $f_{ij} = 1$, así

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0.472 & 1 & 0.20 \\ 0.12 & 0.12 & 0.20 \\ 0.60 & 0.60 & 0.12 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

## 2.3 Distribución estacionaria.

***Definición 2.18.*** Sea $\{X_n;\ n \in T,\ n \geq 0\}$ una cadena de Markov, con matriz de transición **P**, $\pi$ es una *distribución estacionaria* con respecto a **P** o $\{X_n;\ n \in T,\ n \geq 0\}$ si, y sólo si

1) $\pi$ es una distribución.

2) $\pi = \pi\,\mathbf{P}$, es decir, $\pi(j) = \sum_{i\in E}\pi(i)p_{ij}$ para toda $j \in E$.

***Teorema 2.22.*** Si $\{X_n;\ n \in T,\ n \geq 0\}$ es una cadena de Markov irreducible, aperiódica entonces todos los estados son recurrentes positivos si, y sólo si el sistema de ecuaciones lineales

$$\pi(j) = \sum_{i\in E}\pi(i)p_{ij}\ , \text{ para toda } j \in E$$

$$\sum_{j\in E}\pi(j) = 1$$

tiene una solución $\pi$. Si existe una solución $\pi$ esta es positiva, $\pi(j) > 0$ para toda $j$, $\pi$ es única y

$$\pi(j) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} \qquad \text{para todo } i, j \in E.$$

*Demostración.*

Si $j$ es recurrente positivo y aperiódico por el teorema 2.12

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \tau(j) > 0$$

ya que para todo $i, j \in E$, $f_{ij} = 1$, y

$$\sum_{j\in E}\tau(j) = \sum_{j\in E}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in E} p_{ij}^{n} = 1$$

$\tau$ es una distribución.

Sea $p_{ij}^{n+1} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{n} p_{kj}$

$$\begin{aligned}\tau(j) &= \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in E} p_{ik}^{n} p_{kj} \\ &= \sum_{k\in E}\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{n} p_{kj} \\ &= \sum_{k\in E}\tau(k)p_{kj}\end{aligned}$$

$$\tau = \tau \mathbf{P}$$

Todavía nos hace falta revisar su unicidad, sea π otra solución

$$\begin{aligned}\pi &= \pi\, \mathbf{P} \\ &= \pi\, \mathbf{PP} \\ &= \pi\, \mathbf{PPP} \\ &= \pi\, \mathbf{P}^{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(j) &= \sum_{i\in E} \pi(i)\, p_{ij}^{n} \qquad \text{para todo } j \in E \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in E} \pi(i)\, p_{ij}^{n} \\ &= \sum_{i\in E} \pi(i) \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} \\ &= \sum_{i\in E} \pi(i) \tau(j) \\ &= \tau(j) \sum_{i\in E} \pi(i) \\ &= \tau(j)\end{aligned}$$

Ahora demostremos la otra parte del teorema, es decir, hay que probar que la existencia de una solución π al sistema de arriba implica que todos los estados son recurrentes positivos.

Sea π una distribución estacionaria

$$\pi = \pi\, \mathbf{P} = \pi\, \mathbf{P}^{n}$$

$$\pi(j) = \sum_{i\in E} \pi(i)\, p_{ij}^{n} \qquad \text{para todo } j \in E.$$

Supongamos que la cadena no es recurrente positiva por el teorema 2.12,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 0$$

entonces

$$\pi(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in E} \pi(i)\, p_{ij}^{n} = \sum_{i\in E} \pi(i) \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 0$$

esto significa que $\sum_{j\in E}\pi(j) = 0$, esto es una contradicción, por tanto los estados son recurrentes positivos.

□

*Ejemplo 2.8*. Sea $X$ una cadena de Markov, con matriz de transición

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

podemos ver que los estados {0, 1} forman una clase de conjunto de recurrencia $C_1$, los estados {2,3,4} forman otra clase de conjunto de recurrencia $C_2$, ambos conjuntos está formado por estados aperiódicos y los estados {5, 6} son transitorios. Calculemos la matriz $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n$, para calcularla usamos el teorema 2.12.2 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = f_{ij}\pi(j)$ y el resultado del teorema 2.22.

Del primer conjunto calculemos su probabilidad cuando $n\to\infty$, calculemos $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_1^n$, donde

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

para calcularla tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\pi(0) = 0.2\pi(0)+0.7\pi(1)$$

$$\pi(1) = 0.8\pi(0)+0.3\pi(1)$$

$$\pi(0) + \pi(1) = 1$$

de la primera ecuación $\pi(0) = \frac{0.7}{0.8}\pi(1)$, sustituyendo en la última ecuación

$$\frac{0.7}{0.8}\pi(1)+\pi(1) = 1$$

de aquí

$$\pi(1)=\frac{7}{15} \text{ y } \pi(0) = \frac{8}{15}$$

para el otro conjunto de estados recurrentes tenemos la siguiente matriz de transición

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \pi(2) &= 0.3\pi(2) + 0.6\pi(3) \\ \pi(3) &= 0.5\pi(2) \qquad\qquad + 0.4\pi(4) \\ \pi(4) &= 0.2\pi(2) + 0.4\pi(3) + 0.6\pi(4) \end{aligned}$$

y además

$$\pi(2) + \pi(3) + \pi(4) = 1$$

de la ecuación uno y dos

$$\pi(3) = \frac{7}{6}\pi(2) \quad \text{y} \quad \pi(4) = \frac{5}{2}\pi(3) - \frac{5}{4}\pi(2)$$

ya que los estados son recurrentes y aperiódicos, sabemos que el sistema tiene solución única, hacemos $\pi(2)=1$, obtenemos que $\pi(3)=\frac{7}{6}$ y $\pi(4)=\frac{10}{6}$, sumamos las tres cantidades $\pi(2) + \pi(3) + \pi(4) = \frac{23}{6}$ y luego las dividimos entre la suma para hacer que se cumpla la última condición, obtenemos que $\pi(2)=\frac{6}{23}$, $\pi(3) = \frac{7}{23}$ y $\pi(4)=\frac{10}{23}$, para calcular por completo la matriz $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$, nos hace falta calcular la matriz **F**, para esto calculemos primero **R**,.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

tenemos estados transitorios finitos, luego entonces **S** ( **S** que se obtienen a partir de **R**, al eliminar todos los renglones y columnas correspondientes a los estados recurrentes) es la inversa de **I – Q**

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.1 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1.75 \end{pmatrix},$$

así tenemos que la matriz **R** para esta cadena de Markov es

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1.75 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos la matriz **F,**

$$\mathbf{G} = \mathbf{SB} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1.75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

ahora si, ya podemos obtener $\mathbf{P}^{\infty}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{8}{15} \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} \\ \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} \\ \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \frac{1.4}{15} & \frac{1.6}{15} \\ \frac{2.8}{15} & \frac{3.2}{15} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \frac{4.8}{23} & \frac{5.6}{23} & \frac{8}{23} \\ \frac{3.6}{23} & \frac{4.2}{23} & \frac{6}{23} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Veamos ahora que ocurre en caso de que los estados sean periódicos.

***Teorema 2.23.*** Sea $X$ una cadena de Markov, irreducible con estados periódicos y recurrentes con periodo $\delta$, entonces los estados pueden ser divididos en $\delta$ conjuntos disjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_\delta$ tal que $p_{ij} = 0$ a no ser que $i \in B_1$ y $j \in B_2$ o $i \in B_2$ y $j \in B_3$ o … o $i \in B_\delta$ y $j \in B_1$.

*Demostración*

Sin pérdida de generalidad tomemos los estados 0 y $j$, dado que la cadena es irreducible $0 \to j$ y $j \to 0$, es decir, existen enteros $r$, $s$ tal que

$$p_{0j}^{r} > 0 \text{ y } \beta = p_{j0}^{s} > 0$$

$$p_{00}^{m+s} = p_{0j}^{m}\, p_{j0}^{s} = p_{0j}^{m}\,\beta$$

como el estado 0 tiene periodo $\delta$, $p_{00}^{m+s} > 0$ si $m + s = k\delta$, si $p_{0j}^{m} > 0$ entonces $m = k\delta - s$ se cumple que $p_{0j}^{m} > 0$, si $m = \alpha, \alpha + \delta, \alpha + 2\delta, \ldots$ .

Definimos para todo $j \in B_\alpha$ ,como el conjunto de todos los estados que se pueden alcanzar desde 0 sólo en los pasos $\alpha, \alpha + \delta, \alpha + 2\delta, \ldots$ y a $B_{\alpha+1}$ el conjunto de todos los estados que se pueden alcanzados desde 0 en los pasos $\alpha + 1$, $\alpha + \delta + 1$, $\alpha + 2\delta + 1, \ldots$. Entonces $p_{ij} = 0$ excepto si, $i \in B_\alpha$ y $j \in B_{\alpha+1}$ para $\alpha = 1, 2, \ldots, \delta$.

□

***Teorema 2.24.*** Sea **P** la matriz de transición de una cadena de Markov irreducible con estados periódicos, con periodo $\delta$ y $B_1, B_2, \ldots, B_\delta$ definidos como el teorema anterior.

Entonces en la cadena de Markov con matriz de transición $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{\delta}$, las clases $B_1$, $B_2$, … , $B_\delta$ son conjuntos cerrados e irreducibles de estados aperiódicos.

*Demostración.*

En $\delta$ pasos la cadena se mueve de $B_1$ a $B_1$, de $B_2$ a $B_2$ , …, de $B_\delta$ a $B_\delta$, veamos esto paso por paso, en un paso sólo podemos llegar al conjunto inmediato a él, esto es, $p_{ij}$ =0 a no ser que $i \in B_1$ y $j \in B_2$ o $i \in B_2$ y $j \in B_3$ o … o $i \in B_\delta$ y $j \in B_1$, en dos paso ocurriría lo siguiente, $p_{ij}^{2}=0$ a no ser que $i \in B_1$ y $j \in B_3$ o $i \in B_2$ y $j \in B_4$ o … o $i \in B_\delta$ y $j \in B_2$, en $\delta$–1 pasos, ocurriría lo siguiente, $p_{ij}^{\delta-1}=0$ a no ser que $i \in B_1$ y $j \in B_\delta$ o $i \in B_2$ y $j \in B_1$ o … o $i \in B_\delta$ y $j \in B_{\delta-1}$, entonces como podemos ver en $\delta$ pasos, $p_{ij}^{\delta}=0$ a no ser que $i \in B_1$ y $j \in B_1$ o $i \in B_2$ y $j \in B_2$ o … o $i \in B_\delta$ y $j \in B_\delta$, como se asevero al inicio, la matriz de transición en $\delta$ pasos la podemos poner de la siguiente forma,

$$\mathbf{P}^{\delta} = \overline{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{P}_{\delta} \end{pmatrix}$$

analicemos que ocurre con los estados de esta matriz de transición, podemos ver que cada una de las clases de conjuntos forman un conjunto cerrado e irreducible, además son aperiódicos, $p_{\alpha\, ij} > 0$ para $i, j \in B_\alpha$, recordemos que ya no trabajamos con la matriz $\mathbf{P}$, ahora estamos trabajando sobre la matriz $\overline{\mathbf{P}}$.

□

A partir de la matriz $\overline{\mathbf{P}}$ podemos calcular $n \to \infty$, usando el teorema 2.22, podemos ver también que $\sum_{j\in E} \pi(j) = \delta$. Hay que ver que $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}$ no tiene límite cuando $n \to \infty$, excepto, cuando para todos los estados $p_{ij} = 0$, sin embargo los límites de $\mathbf{P}^{\mathrm{n}\delta+\mathrm{m}}$ existen cuando $n \to \infty$, pero dependen del estado inicial $i$. Con el siguiente teorema terminaremos con el estudio de los estados periódicos, sólo se demuestra la primera parte del teorema, la otra parte de la demostración se puede consultar en Çinlar [ 1975, p. 163].

***Teorema 2.25.*** Sea $\mathbf{P}$ y $B_\alpha$, definidos como en el teorema anterior y supóngase que la cadena es positiva. Entonces para $m \in \{0, 1, \dots , \delta–1\}$ ,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n\delta+m} = \begin{cases} \pi(j) & \text{si } i \in B_\alpha, j \in B_\beta, \beta = \alpha + m (\text{mod } \delta) \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

$\pi(j), j \in E$, son la única solución de

$$\pi(j) = \sum_{i\in E} \pi(i) p_{ij}, \quad \sum_{j\in E} \pi(j) = \delta, \qquad j \in E.$$

*Demostración.*

Del teorema 2.24 la cadena correspondiente a $\mathbf{P}^\delta = \overline{\mathbf{P}}$, tiene $\delta$ clases de conjuntos, de estados recurrentes positivos y aperiódicos. Sea $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\delta$, la distribución límite correspondiente de $B_1, B_2, \ldots B_\delta$ y $\pi(j) = \pi_\alpha(j)$ si $j \in B_\alpha$.

Sea $m \in \{0, 1, \ldots, \delta-1\}$ un valor fijo, supóngase que $i \in B_\alpha$, y sea $\beta = \alpha + m(\text{mod}\delta)$. Tenemos,

$$p_{ij}^{n\delta+m} = \sum_k p_{ik}^m p_{kj}^{np}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k\in B_\beta} p_{ik}^m p_{kj}^{n\delta} & \text{si } j \in B_\beta \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

dado que $p_{ik}^m = 0$ excepto si $k \in B_\beta$, y para $k \in B_\beta$, $p_{kj}^{n\delta} = 0$ a no ser que $j \in B_\beta$ también. Para $k, j \in B_\beta$, $\lim_{n\to\infty} p_{kj}^{n\delta} = \pi(j)$, independiente de $k$, tomando el límite en ambos lados hemos demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n\delta+m} = \begin{cases} \pi(j) & \text{si } i \in B_\alpha, j \in B_\beta, \beta = \alpha + m (\text{mod } \delta) \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

□

Con este último teorema y junto con el teorema 2.22 podemos enunciar el siguiente resultado.

***Corolario 2.25.1.*** Sea $X$ una cadena de Markov, y consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\pi(j) = \sum_{i\in E}\pi(i)p_{ij}, j \in E$$

Entonces todos los estados son recurrentes no nulos o positivos, si, y sólo si, existe una solución $\pi$ con

$$\sum_{j\in E}\pi(j) = 1$$

y $\pi(j) > 0$, para cada $j \in E$, y no hay otra solución.

Hace falta completar nuestro estudio acerca de la relación de los tipos de estados y el límite de $\mathbf{P}^n$ cuando $n \to \infty$. Si la cadena de Markov es finita, y ésta contiene estados transitorios, hay un momento en el que la cadena de Markov sale de los estados transitorios, pero si no es finita puede ocurrir que nunca salga de ellos.

Sea $X$ una cadena de Markov, con matriz de transición $\mathbf{P}$, $A$ es el conjunto de estados transitorios de la cadena, tal que $A \subset E$, y sea $\mathbf{Q}$ la matriz que se obtienen a partir de $\mathbf{P}$, al eliminar todos los renglones y columnas correspondientes a los estados recurrentes, es decir, $\mathbf{Q}$ tienen elementos

$$q_{ij} = p_{ij} \text{ con } i, j \in A.$$

$\mathbf{Q}^2$ la obtenemos de la siguiente forma,

$$q_{ij}^2 = \sum_{i_1\in A} q_{ii_1}q_{ij}$$

y en general $\mathbf{Q}^\mathbf{n}$ sería,

$$q_{ij}^n = \sum_{i_1\in A}\sum_{i_2\in A}\cdots\sum_{i_n\in A} q_{ii_1}q_{i_1i_2}\cdots q_{i_nj}$$

$$= P_i\{X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n = j\}$$

$$\sum_{j\in A} q_{ij}^n = P_i\{X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n \in A\}$$

Si $n$ crece, decrece $\sum_{j\in A} q_{ij}^n$ porque

$$\{X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A\} \supseteq \{X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n \in A\}$$

Sea

$$\mathrm{f}(\,i\,) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in A} q_{ij}^{n} = \lim_{n\to\infty} P_i\,\{\, X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n \in A \,\}$$

la probabilidad de que la cadena de Markov nunca salga de $A$, dado que empezó en $i$.

***Teorema 2.26.*** **f** es la solución máxima de

$$\mathbf{h} = \mathbf{Qh} \qquad \mathbf{0} \le \mathbf{h} \le \mathbf{1},$$

además $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ o $\sup_{i\in A} \mathrm{f}(\,i\,)=1$.

*Demostración.*

$$\text{Sea } \ \mathrm{f}_n(\,i\,) = \sum_{j\in A} q_{ij}^{n} \ = \ P_i\,\{X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n \in A \,\}$$

$$\mathrm{f}_1 \ge \mathrm{f}_2 \ge \mathrm{f}_3 \ge \cdots$$

y

$$\mathbf{f} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n$$

tenemos que

$$\mathrm{f}_{n+1}(\,i\,) = \sum_{k\in A} q_{ik}\mathrm{f}_n(k)$$

tomando el límite

$$\mathrm{f}(\,i\,) = \sum_{k\in A} q_{ik}\mathrm{f}(k)$$

luego entonces **f** es una solución a $\mathbf{h} = \mathbf{Qh}$, ahora probemos que es una solución máxima. Sea **h** otra solución, $\mathbf{h} \le 1$

$$\mathbf{h} = \mathbf{Qh} \ \text{ entonces } \ \mathbf{h} = \mathbf{Q}^{n}\,\mathbf{h} \le \mathbf{Q}^{n}\,\mathbf{1} = \mathbf{f}_n$$

haciendo $n \to \infty$, $\mathbf{h} \le \mathbf{f}$, por tanto **f** es una solución máxima.

Sólo hace falta probar la última parte, para $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ es trivial, sea $c = \sup_{i \in A} f(i)$

$$\mathbf{f} = \mathbf{Q}^n \mathbf{f} \leq c\, \mathbf{Q}^n \mathbf{1} \leq c\mathbf{f}_n \text{ para toda } n,$$

tomando límite por ambos lados $\mathbf{f} \leq c\mathbf{f}$ entonces $1 \leq c$, por lo tanto $\sup_{i \in A} f(i) = 1$.

□

***Teorema 2.27***. Sea $X$ una cadena de Markov irreducible con matriz de transición $\mathbf{P}$, y $\mathbf{Q}$ es la matriz que obtenemos a partir de $\mathbf{P}$ al eliminar la fila y columna $k$, $k \in E$. Todos los estados son recurrentes, si, y sólo si, la única solución de $\mathbf{h} = \mathbf{Qh}$ es $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

*Demostración.*

Sea $A = E - \{ k \}$, como la cadena es irreducible de $k$ podemos ir a $A$, y sea

$$f(i) = \lim_{n \to \infty} P_i \{ X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n \in A \}$$

Si $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ es la única solución a $\mathbf{h} = \mathbf{Qh}$, $f(i) = 0$ para todo $i$, esto significa que salimos del conjunto $A$ y regresamos a $k$, entonces $k$ es recurrente y como la cadena es irreducible todos los estados son recurrentes.

Ahora, si los estados son recurrentes significa que la probabilidad de quedarnos en $A$ es cero ya que tenemos que regresar a $k$, por lo tanto $f(i) = 0$ para todo $i$, lo que es lo mismo $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

□

A continuación veremos como clasificar los estados en base a calcular $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n$.

*Ejemplo 2.9*. Sea $X$ una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{0, 1, \ldots\}$ y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & . & . & . & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \end{pmatrix}$$

donde $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Está cadena es llamada caminata aleatoria, si está en la posición $i$ en el $n$-ésimo paso, el siguiente paso es a la posición $i-1$ o a $i+1$, con probabilidad $q$ y $p$ respectivamente, excepto cuando está en $i$ =0 es seguro que va a 1. Todos los estado pueden ser alcanzados uno del otro, lo que significa que la cadena es irreducible, si empezamos en el estado cero podemos regresar a él, en al menos 2 pasos, es decir el estado 0 es periódico con periodo $\delta = 2$, lo que significa que la cadena es periódica con periodo $\delta = 2$, lo que no podemos ver es si los estados son recurrentes positivo o bien transitorios. Para saber como son los estados vamos a emplear la teoría vista en esta sección.

Resolvamos primero el sistema de ecuaciones que se obtienen a partir de $\pi = \pi\mathbf{P}$, el sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi(0) &= q\pi(1) \\
\pi(1) &= \pi(0) + q\pi(2) \\
\pi(2) &= p\pi(1) + q\pi(3) \\
\pi(3) &= p\pi(2) + q\pi(4) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

y así sucesivamente, poniendo a $\pi(1)$ en términos de $\pi(0)$ y luego a $\pi(2)$ en términos de $\pi(0)$ y así sucesivamente tenemos que

$$\begin{aligned}
\pi(1) &= \frac{1}{q}\pi(0) \\
\pi(2) &= \frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}\pi(0) - \pi(0)\right) = \frac{p}{q^2}\,\pi(0) \\
\pi(3) &= \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q^2}\pi(0) - \frac{p}{q}\pi(0)\right) = \frac{p^2}{q^3}\,\pi(0) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

en general tendríamos que

$$\pi(j) = \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}\pi(0) = \frac{p^{j-1}}{q^j}\,\pi(0) \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \ldots$$

Si $p < q$, entonces $\frac{p}{q} < 1$ y

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi(j)=\left(1+\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}\right)\pi(0)=\left(1+\frac{1}{q}\left(\frac{1}{1-p/q}\right)\right)\pi(0)=\frac{2q}{q-p}\ \pi(0)$$

haciendo $\sum_{j=0}^{\infty}\pi(j)=1$, tenemos que

$$\pi(0)=\frac{q-p}{2q}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{p}{q}\right) \tag{2.1}$$

Luego entonces para $p < q$,

$$\pi(j)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{p}{q}\right) & \text{si } j=0\\[2ex] \dfrac{1}{2q}\left(1-\dfrac{p}{q}\right)\left(\dfrac{p}{q}\right)^{j-1} & \text{si } j\geq 1\end{cases} \tag{2.2}$$

por el teorema 2.22. podemos decir que para $p < q$ los estados son recurrentes no nulos o positivos.

Si $p \geq q$ la serie converge únicamente si $\pi(0) = 0$, sabemos que para $p \geq q$ los estados no son recurrentes positivos, entonces los estados deben ser, recurrentes nulos o transitorios, para distinguir entre estos dos casos usaremos el teorema 2.27, excluyendo de **P** la fila y la columna del estado cero, obtenemos la siguiente matriz

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & . & . & . & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & .\end{pmatrix}$$

el sistema de ecuaciones que se obtiene de $\mathbf{h} = \mathbf{hQ}$ es:

$$\begin{aligned} h(1) &= ph(2)\\ h(2) &= qh(1) + ph(3)\\ h(3) &= qh(2) + ph(4)\\ &\vdots \end{aligned}$$

en general tenemos $h(i) = qh(i-1) + ph(i+1)$, de $h(i) = qh(i) + ph(i)$, sustituimos en la anterior ecuación

$$p(h(i+1) - h(i)) = q\,(h(i) - h(i-1)),\quad i = 2, 3, \ldots$$

y de la primera ecuación

$$p(h(2)-h(1)) = qh(1)$$

sustituimos para obtener $i = 2$,

$$h(3) - h(2) = \frac{q}{p}\,(h(2) - h(1)) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 h(1)$$

ahora lo hacemos para $i = 3$

$$h(4) - h(3) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 (h(2) - h(1)) = \left(\frac{q}{p}\right)^3 h(1)$$

y así sucesivamente iteramos sobre $i$, obtenemos que

$$h(i+1) - h(i) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} (h(2) - h(1)) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i} h(1)\,,\quad i = 2, 3, \ldots$$

luego entonces,

$$\begin{aligned} h(i+1) &= (h(i+1) - h(i)) + (h(i) - h(i-1)) + \cdots + (h(2) - h(1)) + h(1) \\ &= \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{i} + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} + \cdots + \frac{q}{p} + 1\right) h(1) \end{aligned}$$

la solución a **h=hQ** es de la siguiente forma

$$h(i) = \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} + \cdots + \frac{q}{p} + 1\right) c\,,\qquad i = 1,\ 2, 3, \ldots$$

donde $c$ es una constante.

Si $p = q$, entonces tenemos que $h(i) = ic$, para toda $i \geq 1$, la única forma de que para toda $i$ se cumpla, $0 \leq h(i) \leq 1$ es que $c = 0$. Por tanto si $p = q$, la única solución de **h = hQ** es **h = 0**, por el teorema 2.27 significa que los estados son recurrentes y como vimos ya anteriormente no son recurrentes no nulos, lo que significa los estados son recurrentes nulos cuando $p = q$.

Si $p > q$, entonces $0 < \dfrac{q}{p} < 1$, la suma de lo que está dentro de los paréntesis sería

$$S = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} + \cdots + \frac{q}{p} + 1 = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{i}}{1 - \frac{q}{p}}$$

tomando a $c = 1 - \dfrac{q}{p}$, se cumple que $0 \leq h(i) \leq 1$, para toda $i = 1, 2, 3, \ldots$ . Tenemos que

$$h(i) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{i}, \quad \text{para toda } i = 1, 2, 3, \ldots$$

entonces en este caso por el teorema 2.27 los estados son transitorios.

En este ejemplo ya vimos como clasificar los estados, ahora calculemos la distribución límite para la cadena. Para $p < q$, ya vimos que los estados son recurrentes no nulos y periódicos con periodo $\delta = 2$, tenemos dos clases de conjuntos $B_1 = \{0, 2, 4, \ldots\}$ y $B_2 = \{1, 3, 5, \ldots\}$, ya resolvimos el sistema $\pi = \pi\mathbf{P}$, la única variante que habría que hacer, es que según el teorema 2.25 $\sum_{j=0}^{\infty} \pi(j) = 2$ y no $\sum_{j=0}^{\infty} \pi(j) = 1$ como lo habíamos considerado, así de lugar de tener (2.1) tendríamos

$$\pi(0) = \frac{q - p}{q} = 1 - \frac{p}{q}$$

y de lugar de tener (2.2) tendríamos

$$\pi(j) = \begin{cases} 1-\dfrac{p}{q} & \text{si } j=0 \\ \dfrac{1}{q}\left(1-\dfrac{p}{q}\right)\left(\dfrac{p}{q}\right)^{j-1} & \text{si } j\geq 1 \end{cases}$$

luego entonces la distribución invariante para $B_1$ y $B_2$ es:

$$(\,\pi(0), \pi(2), \pi(4), \ldots) = \left(1-\frac{p}{q}\right)\left(1, \frac{p}{q^2}, \frac{p^3}{q^4}, \ldots\right)$$

y

$$(\,\pi(1), \pi(3), \pi(5), \ldots) = \left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{1}{q}, \frac{p^2}{q^3}, \frac{p^4}{q^5}, \ldots\right)$$

por tanto tendríamos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P^{2n}} = \left(1-\frac{p}{q}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \end{pmatrix}$$

y usando el teorema 2.25, obtenemos también

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P^{2n+1}} = \left(1-\frac{p}{q}\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \end{pmatrix}$$

## 2.4 Ejercicios.

*Ejemplo 2.10.* Un artículo se almacena en una bodega de tal manera que se pueda satisfacer la demanda del artículo, la bodega puede almacenar hasta $S$ artículos, si hay $s_m$ artículos entonces se llena la bodega hasta $S$, si la cantidad de artículos está entre $[s_m+1,S]$ no se hace nada, la demanda de artículos en la semana $n$ es de $D_n$, y suponemos que $\{D_n\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas e independientes de la cantidad inicial $X_0$ de artículos, la demanda de $k$ unidades en la semana sucede con una probabilidad $p_k$ y consideremos a $X_n$ como el nivel de la bodega al principio de la semana, cada semana se realiza la inspección en la bodega y en caso de que se requiera llenar la bodega, esta se llenará inmediatamente para iniciar la semana $n$ con la bodega llena si es necesario. Tenemos el siguiente conjunto de estados $E = \{S, S\text{-}1, \ldots, s_m+1\}$, es decir, los valores que puede asumir el proceso en la semana $n + 1$, es;

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - D_n & X_n - D_n > s_m \\ S & X_n - D_n \leq s_m \end{cases}$$

Es claro que $X_{n+1}$ únicamente depende de $X_n$ y $D_n$ es independiente de los niveles de la bodega.

La probabilidad de pasar de tener $X_n = i$ artículos en la semana $n$ en la bodega a tener $X_{n+1} = j$ artículos la calculamos de la siguiente manera:

Para $i \neq S$:

Si $s_m + 1 \leq j \leq i$ entonces tenemos que $D_n = X_n - X_{n+1} = i - j$, por tanto $p_{ij} = p_{i-j}$ y para $X_{n+1} = j = S$ tenemos que, $X_n - D_n \leq s_m$ o bien $X_n - s_m \leq D_n$ , esta ocurra con la siguiente probabilidad

$$P\{\, i - s_m \leq D_n \,\} = \sum_{k \geq i - s_m} p_k$$

Para $i = S$ :

Si $s_m + 1 \leq j \leq S - 1$ entonces tenemos que $D_n = X_n - X_{n+1} = S - j$, por tanto $p_{ij} = p_{S-j}$ y para $X_{n+1} = j = S$ pueden pasar dos cosas si hay demanda, tenemos que, $X_n - D_n \leq s_m$ o bien $X_n - s_m \leq D_n$, esto ocurre con la siguiente probabilidad

$$P\{\, S - s_m \leq D_n \,\} = \sum_{k \geq S - s_m} p_k$$

y la otra es que no tengamos demanda en toda la semana y esto ocurre con probabilidad $p_0$ ambos eventos son disjuntos, entonces la probabilidad de que $X_{n+1} = S$ dado que $X_n = S$ es :

$$p_0 + \sum_{k \geq S - s_m} p_k$$

Las probabilidades de transición del estado $i$ al estado $j$ lo podemos poner de la siguiente forma:

Si $i \neq S$:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{i-j} & \text{para } s_m \leq j \leq i \\ \sum_{k \geq i - s_m} p_k & \text{para } j = S \end{cases}$$

Si $i = S$:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{S-j} & \text{para } s_m \leq j \leq S-1 \\ p_0 + \sum_{k \geq S - s_m} p_k & \text{para } j = S \end{cases}$$

Por construcción todos los estados se intercomunican, todos son accesibles uno del otro, tenemos que $E < \infty$, cerrado e irreducible y los estados son por tanto recurrentes positivos, esto es por el teorema 2.19.

*Ejemplo 2.11.* A Mark Goldman, vicepresidente de NBS TV, se le encargó determinar una política de programación para la cadena. La NBS compite para captar televidentes con las cadena ABS y CBC. Al principio de cada temporada cada una de las cadenas intenta captar una mayor cantidad de televidentes, incluyendo nuevos programas y volviendo a programar otros.

Goldman se encontraba en problemas por que la NBS había tenido un mal desempeño en las últimas dos temporadas con el formato de sus programas. También habían surgido críticas porque la cadena tendía a cancelar sus programas con mucha rapidez si el número de televidentes era inicialmente bajo. Como resultado de las críticas se había decidido no cancelar ningún programa hasta que fuera evidente que seguiría teniendo un número reducido de televidentes.

Dado que los televidentes normales con bastante frecuencia tenderían a cambiar de cadena al principio de cada temporada con el objeto de ver programas nuevos o de volver a ver programas antiguos, Goldman ha decidido esperar a que se estabilice la proporción de televidentes que ven un programa determinado, para esto decidió estudiar el periodo en el que cada cadena estará ofreciendo un programa nuevo para que determine cuáles serán las proporciones de televidentes finales. Si se pueden predecir estos valores estará en posibilidades de tomar una decisión con respecto a un nuevo programa "X" de la NBS, sin tener que esperar hasta que las preferencias de los televidentes se vuelvan obvias a través de los datos de los "ratings" o recuentos de tasa de audiencia.

Goldman considera que la selección de un televidente se ve influenciada más que nada por el programa más reciente que ha observado en ese periodo y que las proporciones finales de la realidad son valores de estados estacionarios, con base en esto, decide utilizar un enfoque de cadena de Markov para abordar el problema. Considera que el problema de selección de los televidentes se ajusta a las consideraciones de este modelo con suficiente cercanía como para permitir aplicar el modelo al problema.

El grupo de trabajo de Goldman ha elaborado la siguiente matriz de transición utilizando datos recopilados en años anteriores y referentes a la forma en que los televidentes tienden a cambiar de una cadena a otra, semana a semana, para el tipo de programas que se considera:

| | NBS | CBC | ABS |
|---|---|---|---|
| NBS | 0.2 | 0.4 | 0.4 |
| CBC | 0.3 | 0.3 | 0.4 |
| ABS | 0.2 | 0.2 | 0.6 |

En esta matriz, los valores que se muestran son la fracción de televidentes que verán el programa de cada cadena durante esta semana, dada la cadena que vieron la semana pasada. También se supone que todos los televidentes que vieron la televisión la semana pasada la verán esta semana.

Calculemos $\pi = \pi\mathbf{P}$, por definición $\pi(j) = \sum_{i\in E}\pi(i)p_{ij}$ , obtenemos

$$\pi(1) = 0.2\,\pi(1) + 0.3\,\pi(2) + 0.2\,\pi(3)$$

$$\pi(2) = 0.4\,\pi(1) + 0.3\,\pi(2) + 0.2\,\pi(3)$$

$$\pi(3) = 0.4\,\pi(1) + 0.4\,\pi(2) + 0.6\,\pi(3)$$

y además

$$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1$$

donde $\pi(1)$ es la proporción de televidentes que se mantendrán viendo la cadena NBS, $\pi(2)$ es la proporción de televidentes que se mantendrán viendo la cadena CBC y $\pi(3)$ es la proporción de televidentes que se mantendrán viendo la cadena ABS.

Al resolver el anterior sistema de ecuaciones encontramos que

$$\pi(1) = 0.227$$

$$\pi(2) = 0.273$$

$$\pi(3) = 0.5$$

lo que significa que una vez que los televidentes se han decidido con respecto a los programas que les gusta ver, 22.7 % observará lo que la NBS le ofrece.

*Ejemplo 2.12.* Consideremos nuevamente el ejemplo 2.1 , en el cual se consideraba que la posibilidad de que el día de mañana llueva sólo depende de la situación climatológica de hoy y no de días previos, además supusimos que si llueve hoy la probabilidad de que mañana llueva es $\alpha$ y si hoy no llueve la probabilidad de que llueva mañana es $\beta$, esto quiere decir que si hoy llueve entonces mañana no lloverá con probabilidad $1-\alpha$ y si hoy no llueve la probabilidad de que mañana tampoco sería $1-\beta$, consideramos que el estado 0 es que llueva y al estado 1 que no llueva, luego entonces por la definición 2.18 $\pi(0)$ y $\pi(1)$ están dadas por

$$\pi(0) = \alpha\,\pi(0) + \beta\pi(1)$$

$$\pi(1) = (1-\alpha)\,\pi(0) + (1-\beta)\pi(1)$$

$$\text{con} \quad \pi(0) + \pi(1) = 1$$

$$\pi(0)(1-\alpha) = \beta\,\pi(1)$$

Haciendo $\pi(0) = 1$, tenemos que $\pi(1) = \dfrac{1-\alpha}{\beta}$, ambas deben sumar uno, sumamos las dos y nos da $\dfrac{\beta+1-\alpha}{\beta}$, luego para que nos sumen uno las dividimos entre su suma, nos queda,

$$\pi(0) = \frac{\beta}{1+\beta-\alpha}$$

y

$$\pi\,(1) = \frac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}$$

que es la solución a las tres ecuaciones que tenemos arriba.

Si consideramos que $\alpha = 0.7$ y $\beta = 0.4$ (como en el ejemplo 2.4), tenemos que la probabilidad estacionaria de que llueva, es $\pi\,(0) = \dfrac{4}{7} = 0.571$ .

*Ejemplo 2.13*. Un apostador tiene $\$u$ , en cada juego que apuesta tiene la probabilidad $p$ de ganar \$1 o perder \$1 con probabilidad $1-p$ , el jugador se retirará cuando se quede sin dinero ó bien cuando haya alcanzado a obtener en total $\$N$.

Si consideramos $X_n$ como el dinero que tienen el apostador después de la $n$-ésima vez que apuesta, $X_n$ claramente es una cadena de Markov, ya que lo que va apostar únicamente dependerá del dinero que tenga actualmente y no de lo que haya jugado antes, $X_n$ tienen espacio de estados $E = \{\, 0, 1\ , 2, \ldots , N \,\}$ , sus probabilidades de transición son

$$p_{ij} = p \quad \text{con } j = i+1\ , i = 1, 2, \ldots , N-1$$

$$p_{ij} = 1-p \text{ con } j = i-1, i = 1, 2, \ldots , N-1 \quad \text{y}$$

$$p_{00} = p_{NN} = 1$$

Esta cadena de Markov la podemos separar en tres clases $\{0\}$, $\{\ 1,\ 2, \ldots, N-1\}$, y $\{N\}$, la primera y la última (el estado 0 y $N$ ) son recurrentes y la otra es una clase de estados transitorios, esto significa que en algún momento dado el apostador o bien se queda arruinado o bien llega a ganar $\$N$ y se retira del juego.

Sea $\theta_i$ la probabilidad de empezar en $i$ y que se alcance en algún momento el estado $N$, es decir, $\theta_i = P_i\{T_N < \infty\} = f_{iN}$ , es claro que una vez que entremos al estado 0 no podremos llegar nunca a $N$, por tanto $\theta_0 = 0$, para obtener $\theta$ para el resto de los estados usaremos el teorema 2.8 que nos dice que

$$f_{iN} = p_{iN} + \sum_{k\in\{E-N\}} p_{ik} f_{kN}$$

si estamos en el estado $i$, únicamente podemos ir al estado $i+1$ ó al estado $i-1$ y la única forma de que $p_{iN} \neq 0$ es que $i = N-1$ pero por ser $N$ absorbente tenemos que $f_{NN} = 1$ , luego entonces tenemos que:

$$\theta_i = f_{iN} = p_{i,i+1} f_{i+1,N} + p_{i,i-1} f_{i-1,N} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots , N-1$$

o bien

$$\theta_i = p_{i,i+1}\theta_{i+1} + p_{i,i-1}\,\theta_{i-1}$$

$$\theta_i = p\theta_{i+1} + q\,\theta_{i-1}$$

dado que $p + q = 1$ podemos ponerlo como sigue

$$p\theta_i + q\theta_i = p\theta_{i+1} + q\,\theta_{i-1}$$

entonces

$$\theta_{i+1} - \theta_i = \frac{q}{p}(\theta_i - \theta_{i-1})$$

dado que $\theta_0 = 0$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{q}{p}(\theta_1 - \theta_0) = \frac{q}{p}\theta_1$$

$$\theta_3 - \theta_2 = \frac{q}{p}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{q}{p}\frac{q}{p}\theta_1 = \left(\frac{q}{p}\right)^2\theta_1$$

$$\vdots$$

$$\theta_{i+1} - \theta_i = \frac{q}{p}(\theta_i - \theta_{i-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\theta_1$$

$$\vdots$$

$$\theta_N - \theta_{N-1} = \frac{q}{p}(\theta_{N-1} - \theta_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\theta_1$$

Ahora sumando las primeras $i-1$ ecuaciones, nos da

$$\theta_i - \theta_1 = \theta_1\left[\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

nos da que

$$\theta_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(q/p\right)^i}{1-\left(q/p\right)} P_1 & \text{si } \dfrac{q}{p} \neq 1, \text{ o bien } p \neq \dfrac{1}{2} \\ iP_1 & \text{si } \dfrac{q}{p} = 1, \text{ o bien } p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ahora usando el hecho de que $\theta_N = 1$, obtenemos

$$\theta_1 = \begin{cases} \dfrac{1-\left(q/p\right)}{1-\left(q/p\right)^N} & \text{si } \dfrac{q}{p} \neq 1, \text{ o bien } p \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{N} & \text{si } \dfrac{q}{p} = 1, \text{ o bien } p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

sustituyendo $\theta_1$ en $\theta_i$ nos queda como,

$$\theta_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(q/p\right)^i}{1-\left(q/p\right)^N} & \text{si } \dfrac{q}{p} \neq 1, \text{ o bien } p \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{i}{N} & \text{si } \dfrac{q}{p} = 1, \text{ o bien } p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

si hacemos que $N \to \infty$ tendríamos que $\theta_i$ tendería a

$$\theta_i = \begin{cases} 1-\left(q/p\right)^i & \text{si } p > \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si } p \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Así si $p > ½$, existe la probabilidad de que el apostador llegue a incrementar su fortuna infinitamente, pero si $p \leq ½$, esté quedará quebrado.