Capítulo 3.

3.- Procesos de Markov.

3.1. Procesos de Markov.

En el capítulo anterior vimos procesos estocásticos, tales que, la información de algún futuro estado X_{n+1}, únicamente depende del estado presente X_n, aquí analizaremos aquellos que tienen un espacio parametral de tiempo continuo T con $T \in \mathbb{R}^+ = [\,0, \infty\,)$ y un espacio de estados E, finito o contable infinito.

Definición 3.1. Un proceso estocástico $Y = \{Y_t \,,\, t \in \mathbb{R}^+\}$, con espacio parametral de tiempo continuo T y un espacio de estados E finito o contable infinito es un *proceso de Markov* si

$$P\{\, Y_{t+s} = j \mid Y_u : \; u \leq t \,\} = P\{\, Y_{t+s} = j \mid Y_t \,\}$$

para t, $s \in \mathbb{R}^+$.

Definición 3.2. Si la probabilidad condicional enunciada en la definición anterior es independiente de t, es decir,

$$P\{\, Y_{t+s} = j \mid Y_u : \; u \leq t \,\} = P\{\, Y_{t+s} = j \mid Y_t = i\} = P_{ij}(s)$$

se dice que es un proceso de Markov con *tiempo homogéneo*.

Nosotros consideraremos procesos de Markov con tiempo homogéneo.

Para valores fijos de $i, j \in E$ y $t \geq 0$, a la función $t \rightarrow P_{ij}(t)$ la llamaremos *función de transición*.

Definición 3.3. A la familia de matrices $\mathbf{P}_t$ de la función de transición $P_{ij}(t)$ se le denomina *función de transición del proceso de Markov.*

Es claro que la función de transición $P_{ij}(t)$ cumple con $P_{ij}(t) \geq 0$ y $\sum_{k\in E} P_{ik}(t) = 1$, a continuación tenemos las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov considerando el tiempo continuo.

Teorema 3.1. Si $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ es un proceso de Markov con tiempo homogéneo se cumple que

$$\sum_{k\in E} P_{ik}(t) P_{kj}(s) = P_{ij}(t+s)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in E} P_{ik}(t) P_{kj}(s) &= \sum_{k\in E} P\{Y_t = k \mid Y_0 = i\} P\{Y_{t+s} = j \mid Y_t = k\} \\
&= \sum_{k\in E} P\{Y_t = k \mid Y_0 = i\} P\{Y_{t+s} = j \mid Y_t = k, Y_0 = i\} \\
&= \sum_{k\in E} P\{Y_{t+s} = j, Y_t = k \mid Y_0 = i\} \\
&= P\{Y_{t+s} = j \mid Y_0 = i\} \\
&= P_{ij}(t+s)
\end{aligned}$$

□

De forma análoga podemos probar el siguiente resultado que corresponde al teorema 2.1 de cadenas de Markov

Teorema 3.2. Para $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ en $\mathbb{R}^+$ y estados $i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$, se cumple

$$P\{Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_n} = i_n \mid Y_{t_0} = i_0\} = P_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

Entonces la distribución conjunta de $Y_{t_0}, \ldots, Y_{t_n}$ es especificada por la distribución inicial π de Y_0 y la función de transición , esto es;

$$P\{Y_{t_0} = i_0, Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_n} = i_n\} = \sum_{i\in E} \pi(i) P_{ii_0}(t_0) P_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

esto significa que la distribución inicial $\boldsymbol{\pi}$ y $\mathbf{P}_t$ caracterizan al proceso $\{Y_t\,,\, t \in \mathbb{R}^+\}$ por completo.

Ejemplo 3.1. Sea $N = \{N_t\,;\, t \geq 0\}$ un proceso Possion, entonces por el corolario 1.10.2.

$$P\{\, N_{t+s} - N_t = k \,\} = \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}\,,\ k = 0, 1, \ldots .$$

Ahora bien, si sabemos que $N_t = i$,

$$P\{N_{t+s} = j \mid N_u;\, u \leq t\} = \frac{P\left[N_{t+s} = j, N_u; u \leq t\right]}{P\left[N_u; u \leq t\right]}$$

El evento $\{N_{t+s} = j\,,\, N_u\,;\, u \leq t\}$ es igual a $\{N_{t+s} - N_t = j - i\,,\, N_u\,;\, u \leq t\}$ pero por la definición de proceso Poisson (definición 1.6) $\{N_{t+s} - N_t = j - i\}$ es independiente de $\{N_u\,;\, u \leq t\}$, con lo que

$$P\{N_{t+s} = j \mid N_u;\, u \leq t\} = P\{\, N_{t+s} - N_t = j - i\,\} = \frac{(\lambda s)^{j-i} e^{-\lambda s}}{(j-i)!}\,,\ j - i = 0, 1, \ldots .$$

podemos decir que

$$P\{N_{t+s} = j \mid N_u;\, u \leq t\} = P\{N_{t+s} = j \mid N_t = i\} = \frac{(\lambda s)^{j-i} e^{-\lambda s}}{(j-i)!}\,,\ j - i = 0, 1, \ldots .$$

lo que significa que N es un proceso de Markov.

Si hacemos $k = j - i$, tenemos que la función de transición de este proceso de Markov es:

$$\mathbf{P}_s = \begin{pmatrix} p_s(0) & p_s(1) & p_s(2) & \cdots \\ 0 & p_s(0) & p_s(1) & \cdots \\ 0 & 0 & p_s(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $p_s(k) = \dfrac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots .$

Ejemplo 3.2. Sea $X = \{X_n\ ,\ n \in T\ \}$, una cadena de Markov, donde T es un espacio parametral discreto, con espacio de estados E y matriz de transición **Q**, y sea $N = \{N_t\ ;\ t \geq 0\}$ un proceso Poisson con tasa λ el cual es independiente de X. Consideremos un sistema tal que, un movimiento de un estado E a otro forman una cadena de Markov y el tiempo que el sistema tarda en cambiar de estado sigue un proceso Poisson. Entonces N_t es el número de transiciones (o cambios que tiene la cadena) durante el tiempo $(0, t\,]$, el sistema se encuentra en el estado $Y_t = X_{N_t}$ en el tiempo t . En otras palabras, si T_1, $T_2, \ldots$ son los tiempos de llegada de N y $T_0 = 0$, entonces $Y_t = X_n$ para toda t en $[T_n, T_{n+1})$.

Ahora supongamos que estamos interesados en predecir Y_{t+s}, dado que conocemos el proceso hasta el tiempo t, si $Y_t = i$ y si suponemos que ocurren $N_{t+s} - N_t = n$ transiciones durante el intervalo de tiempo $(\ t,\ t+s\ ]$, entonces la probabilidad de que $Y_{t+s} = j$, es la probabilidad de que la cadena de Markov X se mueva del estado $Y_t = i$, al estado j en exactamente n pasos esta probabilidad es q_{ij}^{n}. El número de transiciones que ocurren durante el tiempo $(\ t,\ t+s\,]$ son independientes de lo que ocurrió hasta t por ser N un proceso Poisson. Dado que, sabemos que ocurrió hasta t, la probabilidad de que ocurran n transiciones durante el tiempo $(\ t,\ t+s\,]$ es $\dfrac{(\lambda s)^n e^{-\lambda s}}{n!}$. Tenemos que si $Y_t = i$, entonces

$$P\ \{\ Y_{t+s} = j \mid Y_u:\ u \leq t\ \} = P\ \{\ Y_{t+s} = j \mid Y_t = i\} = P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^n e^{-\lambda s}}{n!} q_{ij}^{n}$$

Lo que significa que $\{Y_t\ ,\ t \in \mathbb{R}^{+}\}$ es un proceso de Markov.

Ejemplo 3.3. (Sistema de colas M/M/1). Supongamos que la llegada de clientes a un servicio sigue un proceso Poisson. Si un cliente llega y encuentra el servicio vacío la atención al cliente empieza inmediatamente, en caso contrario, si está ocupado, él espera hasta que le toque su turno. El tiempo de atención a un cliente es independiente del tiempo de atención de cualquier otro cliente e independiente de cualquier nueva llegada al servicio. Supondremos que el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial.

Sea $\{Y_t\ ;\ t \geq 0\}$ el proceso donde Y_t representa el número de clientes en el sistema en el tiempo t. Supongamos que hemos observado el proceso hasta el tiempo t, para predecir el número de cliente en el servicio al tiempo $t + s$ tenemos que encontrar Y_{t+s}, Y_{t+s} es igual al número de clientes en el servicio al tiempo t, más el número de llegadas en el tiempo $(\ t,\ t+s\,]$ menos el número de clientes atendidos durante el tiempo $(\ t,\ t+s\,]$.

El número de llegadas durante el tiempo $(t, t+s]$ es independiente del número de clientes que había antes de t. Los clientes atendidos durante el tiempo $(t, t+s]$ es independiente de los clientes atendidos hasta antes del tiempo t. Luego entonces el número de clientes atendidos durante el tiempo $(t, t+s]$, depende únicamente de Y_t y de las llegadas que ocurren durante el tiempo$(t, t+s]$, con el análisis que acabamos de hacer podemos decir que $\{Y_t;\, t \geq 0\}$ es un proceso de Markov, después de que veamos la sección 3.4, esto quedará mucho más claro.

Definamos a $W_t :=$ el tiempo en el que Y se queda en el estado donde esta al tiempo t,

$$W_t := \inf \{s > 0 \mid Y_{t+s} \neq Y_t\}$$

Teorema 3.3. Para todo $i \in E$, $t \geq 0$, existe $\lambda(i) \in [0, \infty)$, tal que

$$P\{W_t > u \mid Y_t = i\} = \exp^{-\lambda(i)u}$$

Demostración.

Y es homogéneo en el tiempo, entonces $P\{W_t > u \mid Y_t = i\}$ no depende de t, sea

$$f(u) = P\{W_t > u \mid Y_t = i\}$$

Dado que el evento $\{W_t > u + v\}$ es igual al evento $\{W_t > u\,,\, W_{t+u} > v\}$ tenemos

$$\begin{aligned} f(u+v) &= P\{W_t > u + v \mid Y_t = i\} \\ &= P\{W_t > u\,,\, W_{t+u} > v \mid Y_t = i\} \\ &= P\{W_{t+u} > v \mid Y_t = i\,,\, W_t > u\}\, P\{W_t > u \mid Y_t = i\} \\ &= P\{W_{t+u} > v \mid Y_{t+u} = i\}\, P\{W_t > u \mid Y_t = i\} \\ &= f(v) f(u) \end{aligned}$$

luego, entonces, f tiene que ser de la forma

$$f(u) = \exp^{-cu} \quad \text{para} \quad c \geq 0$$

□

Del teorema también podemos ver que

$$P\{W_t \leq u \mid Y_t = i\} = 1 - \exp^{-\lambda(i)u}$$

es la probabilidad de que el proceso se quede en el estado i hasta un tiempo menor o igual a u .

Definición 3.4.

1) Un estado $i \in E$ con $\lambda(i) = 0$, se llama estado *absorbente*.
2) Un estado $i \in E$ con $0 < \lambda(i) < \infty$, se llama *estable*.
3) Un estado $i \in E$ con $\lambda(i) = \infty$, se llama *instantáneo*.

3.2. Estructura de un proceso de Markov.

Vamos a suponer que los estados son estables, $T_0, T_1, \dots, T_n$ son los tiempos de transición del proceso de Markov $Y = \{Y_t , t \in \mathbb{R}^+\}$ y $X_0, X_1, \dots, X_n$ son los estados visitados en Y, en términos de W_t, definimos

$$T_0 = 0;\ T_{n+1} = T_n + W_{T_n},\quad n \in \mathbb{N}$$

y

$$X_n = Y_{T_n} \qquad ,\ n \in \mathbb{N}$$

Enunciaremos el siguiente resultado sin demostración, para ver una demostración del siguiente teorema se puede consultar Çinlar [1975].

Teorema 3.4. Para alguna $n \in \mathbb{N}, j \in E$, y $u \in \mathbb{R}^+$, tenemos que

$$P\{X_{n+1} = j , T_{n+1} - T_n > u \mid X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n = i , T_0, T_1, \dots , T_n\} = q_{ij} \exp^{-\lambda(i)u}$$

con $q_{ij} \geq 0$, $q_{ii} = 0$ y $\sum_j q_{ij} = 1$.

□

Como se puede ver un proceso de Markov esta formado por una cadena de Markov y el tiempo en que permanece en el estado. La cadena de Markov, nos va indicar la probabilidad de pasar de un estado i a un estado j y cada vez que entra a un estado i , permanece en i por un periodo de tiempo exponencialmente distribuido con tasa $\lambda(i)$, es decir,

$$P\{W_t \leq u \mid Y_t = i\} = 1 - \exp^{-\lambda(i)u}$$

A continuación vamos a enunciar una serie de resultados que pueden ayudar a ver con mejor claridad esto.

Del teorema anterior también podemos obtener

$$P\{X_{n+1} = j\,,\, T_{n+1} - T_n \le u \mid X_0, \ldots, X_{n-1}, X_n = i\,,\, T_0, T_1, \ldots, T_n\} = q_{ij}\,(1 - \exp^{-\lambda(i)u})$$

es la probabilidad de, dado que conocemos lo sucedido en el proceso hasta la n-ésima transición, la siguiente transición ocurra en un tiempo menor a u.

Si del teorema anterior hacemos $u = 0$, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.4.1. La sucesión de variables aleatorias $X_0, X_1, \ldots, X_n$ es una cadena de Markov con matriz de transición $\mathbf{Q}$, con elementos q_{ij} , $i, j \in E$.

Demostración.

Haciendo $u = 0$ del teorema anterior, tenemos

$$P\{X_{n+1} = j\,,\, T_{n+1} - T_n > 0 \mid X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n = i\,,\, T_0, T_1, \ldots, T_n\} = q_{ij} \exp^{-\lambda(i)0}$$

Si conocemos el proceso hasta Y_{T_n}, conocemos $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, $X_n = i$, $T_0, T_1, \ldots$, T_n, podemos poner la probabilidad anterior como

$$P\{X_{n+1} = j \mid Y_t = i : t = T_n\} = q_{ij}$$

pero por definición $X_n = Y_{T_n} = i$, es decir,

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = q_{ij}$$

□

Corolario 3.4.2. El tiempo de cambio entre el estado i a otro estado $j \in E$, no depende de j.

Demostración.

$$P\{X_{n+1} = j\,,\, T_{n+1} - T_n > u \mid X_n = i\} = P\{T_{n+1} - T_n > u \mid X_n = i\,,\, X_{n+1} = j\} P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

$$= P\{T_{n+1} - T_n > u \mid X_n = i\,,\, X_{n+1} = j\} q_{ij}$$

del teorema anterior

$$P\{X_{n+1} = j\,,\, T_{n+1} - T_n > u \mid X_n = i\ \} = q_{ij}\exp^{-\lambda(i)u}$$

esto nos da,

$$P\{T_{n+1} - T_n > u \mid X_n = i\,,\, X_{n+1} = j\} = \exp^{-\lambda(i)u}$$

□

Corolario 3.4.3. Para alguna $n \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^+$ y estados $i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$, tenemos

$$P\{T_1 - T_0 > u_1\,,\, T_2 - T_1 > u_2\,,\ldots,\, T_{n+1} - T_n > u_n \mid X_0 = i_0\,,\ldots,\, X_n = i_n\} = \exp^{-\lambda(i_0)u_1}\cdots\exp^{-\lambda(i_{n-1})u_n}$$

Demostración.

Demostremos, usando inducción.

Por el corolario anterior para $n = 1$, ya está demostrado, vamos a probar para $n = k+1$

$$P\{T_1 - T_0 > u_1\,,\ldots,\, T_{k+1} - T_k > u_k\,,\, T_{k+2} - T_{k+1} > u_{k+1} \mid X_0 = i_0\,,\ldots,\, X_k = i_k,\, X_{k+1} = i_{k+1}\}$$

$$= P\{T_1 - T_0 > u_1 \mid X_0 = i_0\,,\ldots,\, X_{k+1} = i_{k+1}, T_2 - T_1 > u_2\,,\ldots,\, T_{k+2} - T_{k+1} > u_{k+1}\}$$
$$P\{T_2 - T_1 > u_2,\ldots, T_{k+2} - T_{k+1} > u_{k+1} \mid X_0 = i_0\,,\ldots, X_{k+1} = i_{k+1}\}$$

$$= P\{T_1 - T_0 > u_1 \mid X_0 = i_0\,,\, X_1 = i_1\}P\{T_2 - T_1 > u_2\,,\ldots,\, T_{k+2} - T_{k+1} > u_{k+1} \mid X_0 = i_0\,,\ldots,\, X_{k+1} = i_{k+1}\}$$

por hipótesis de inducción se vale para k entre llegadas, luego entonces

$$P\{T_1 - T_0 > u_1\,,\ldots, T_{k+1} - T_k > u_k,\, T_{k+2} - T_{k+1} > u_{k+1} \mid X_0 = i_0\,,\ldots,\, X_k = i_k,\, X_{k+1} = i_{k+1}\} = \exp^{-\lambda(i_0)u_1}\cdots\exp^{-\lambda(i_k)u_{k+1}}$$

□

Del resultado anterior podemos decir que los tiempos entre las transiciones son condicionalmente independiente una de la otra dado los sucesivos estados visitados. Y cada tiempo de cambio entre los estados tiene una distribución exponencial con parámetro que depende del estado en el que esté, esto junto con el hecho de que los estados visitados sucesivamente forman una cadena de Markov, nos hacen ver como es la estructura de un proceso de Markov.

Supondremos siempre que $q_{ii} = 0$ cuando $\lambda(i) > 0$ para todo i.

Ejemplo 3.4. Consideremos el proceso mencionado en el ejemplo 3.3, los tiempos de transición ocurren cuando ocurre un cambio en el tamaño de la cola, si el cambio es originado por una llegada entonces la cola se incremente en uno y si el cambio es debido a una salida entonces decrece en uno.

Si $X_n = 0$ entonces el próximo cambio debe ser debido a la llegada de un cliente, lo que significa que $X_{n+1} = 1$, lo cual ocurre con probabilidad 1, $T_{n+1} - T_n$ tiene una distribución exponencial con parámetro a (los tiempos de las entre llegadas de un proceso Poisson tienen una distribución exponencial), así

$$\lambda(0) = a \,;\, q_{01} = 1,\, q_{00} = q_{02} = \cdots = 0$$

El tiempo de servicio sigue una distribución exponencial con parámetro b. Si $X_n = i$, sea A el tiempo desde T_n hasta la próxima llegada y B el tiempo desde T_n hasta que sale el próximo cliente, A y B son variables aleatorias exponenciales con parámetros a y b y además son independientes entre ellas. Por tanto

$$T_{n+1} - T_n = \min(A, B),$$

lo que significa que

$$P(T_{n+1} - T_n > t \mid X_n = i) = P(A > t, B > t) = \exp^{-at}\exp^{-bt}$$

es decir $\lambda(i) = a + b$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$

Si $X_{n+1} = i+1$ significa que $B > A$ y si $X_{n+1} = i-1$ entonces $B < A$, luego entonces tenemos que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) &= P(B > A) \\ &= \mathrm{E}(P\{B > A \mid A\}) \\ &= \mathrm{E}(\exp^{-bA}) \\ &= \int_0^\infty a \exp^{-ax} \exp^{-bx}\, dx \\ &= \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

de manera totalmente análoga podemos obtener $P(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i)$, así obtenemos para $i \geq 1$

$$q_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a}{a+b} & \text{si } j = i+1 \\ \dfrac{b}{a+b} & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

Definición 3.5. La *tasa de transición* de i a j, indicada por $\lambda(i,j)$ es definida por:

$$\lambda(i,j) = q_{ij}\lambda(i)$$

Definición 3.6. Para $i,j \in E$, a la matriz **Λ,** asociada con un proceso de Markov, con elementos

$$\lambda(i,j) = q_{ij}\lambda(i)$$
$$\lambda(i,i) = -\lambda(i)$$

es, la *matriz de intensidad.*

Observemos que la suma por renglón de la matriz de intensidad suma cero

Vamos a suponer que la función de transición $P_{ij}(t)$ es continua y diferenciable para $t \geq 0$.

Teorema 3.5. Sea $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ un proceso de Markov con función de transición $P_{ij}(t)$, entonces

$$\text{a)}\ \lim_{h\to 0} \frac{1-P_{ii}(h)}{h} = \lambda(i)$$

$$\text{b)}\ \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij}\lambda(i)$$

Demostración.

a) La probabilidad de que ocurran dos o más transiciones en un tiempo h, para $h \to 0$ es $o(h)$.

La probabilidad de estar en el estado i y que ocurra la siguiente transición al estado j en un tiempo menor a h es

$$P\{X_{n+1} = j,\ T_{n+1} - T_n \le h \mid X_0, \ldots, X_{n-1}, X_n = i,\ T_0, T_1, \ldots, T_n\} = q_{ij}\,(1 - \exp^{-\lambda(i)h})$$

la probabilidad de estar en el estado i en el tiempo 0 y salir de i antes de un tiempo h es

$$\sum_{j\neq i} P\{X_1 = j, T_1 \le h \mid X_0 = i\} = \sum_{j\neq i} q_{ij}\,(1 - \exp^{-\lambda(i)h}) = 1 - \exp^{-\lambda(i)h}$$

sabemos que

$$\exp^{-\lambda(i)h} = 1 - \lambda(i)h + \frac{1}{2!}\lambda(i)h^2 - \frac{1}{3!}\lambda(i)h^3 + \cdots$$

para una h suficientemente pequeña, $P_{ii}(h)$ es la probabilidad de permanecer en i hasta un tiempo h, luego entonces, tenemos que

$$1 - P_{ii}(h) = 1 - \left\{1 - \lambda(i)h + \frac{1}{2!}\lambda(i)h^2 - \frac{1}{3!}\lambda(i)h^3 + \cdots\right\} + o(h)$$

$$= \lambda(i)h - \frac{1}{2!}\lambda(i)h^2 + \frac{1}{3!}\lambda(i)h^3 - \cdots\cdots + o(h)$$

dividiendo entre h, y haciendo $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-P_{ii}(h)}{h} = \lambda(i)$$

Para el inciso b) tendríamos que

$$P_{ij}(h) = q_{ij}\,(1 - \exp^{-\lambda(i)h}) = q_{ij}\left[\lambda(i)h - \frac{1}{2!}\lambda(i)h^2 + \frac{1}{3!}\lambda(i)h^3 - \cdots\right]$$

dividiendo entre h, y haciendo $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij}\lambda(i)$$

□

Teorema 3.6. (Ecuación atrasada de Kolmogorov) Para todos los estados i, j y tiempo $t \ge 0$,

$$P'_{ij}(t) = \lambda(i)\left\{\sum_{k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t)\right\} - \lambda(i)P_{ij}(t)$$

Demostración.

Usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov , podemos ver que

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \left\{ \sum_{k\in E} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \right\} - P_{ij}(t)$$

$$= \left\{ \sum_{k\neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \right\} + P_{ii}(h) P_{ij}(t) - P_{ij}(t)$$

$$= \left\{ \sum_{k\neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \right\} - [1 - P_{ii}(h)]\ P_{ij}(t)$$

dividiendo entre h, y haciendo $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\left\{ \sum_{k\neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) \right\} - \left(\frac{1 - P_{ii}(h)}{h} \right) P_{ij}(t) \right]$$

$$= \left\{ \sum_{k\neq i} \lambda(i) q_{ik} P_{kj}(t) \right\} - \lambda(i) P_{ij}(t)$$

obtenemos

$$P'_{ij}(t) = \lambda(i) \left\{ \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) \right\} - \lambda(i) P_{ij}(t)$$

□

Teorema 3.7. (Ecuación adelantada de Kolmogorov) Para todos los estados i, j y tiempo $t \geq 0$,

$$P'_{ij}(t) = \left\{ \sum_{k\neq j} \lambda(k) q_{kj} P_{ik}(t) \right\} - \lambda(j) P_{ij}(t)$$

Demostración.

Usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov, podemos ver que

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \left\{ \sum_{k\in E} P_{ik}(t) P_{kj}(h) \right\} - P_{ij}(t)$$

$$= \left\{ \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) P_{kj}(h) \right\} + P_{jj}(h) P_{ij}(t) - P_{ij}(t)$$

$$= \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) P_{kj}(h) - [1 - P_{jj}(h)]\ P_{ij}(t)$$

dividiendo entre h, y haciendo $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\left\{ \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) \frac{P_{kj}(t)}{h} \right\} - \left(\frac{1 - P_{jj}(h)}{h} \right) P_{ij}(t) \right]$$

$$= \left\{ \sum_{k \neq j} \lambda(k) q_{kj} P_{ik}(t) \right\} - \lambda(j) P_{ij}(t)$$

obtenemos

$$P'_{ij}(t) = \left\{ \sum_{k \neq j} \lambda(k) q_{kj} P_{ik}(t) \right\} - \lambda(j) P_{ij}(t)$$

□

El resultado de los dos teoremas anteriores lo podemos poner en forma matricial, de la siguiente forma

$$\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{P}_t$$

Ejemplo 3.5. Consideremos un proceso de Markov con dos estados $E=\{0,1\}$, permanece en 0 con tasa exponencial α y después cambia a 1, permanece en 1 con tasa exponencial β y después cambia a 0.

Tenemos que $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\lambda(0) = \alpha$ y $\lambda(1) = \beta$, obtengamos $\mathbf{P}_t$ a partir de las ecuaciones de Kolmogorov , usemos la ecuación adelantada para obtener

$$P'_{00}(t) = \left\{ \sum_{k \neq 0} \lambda(k) q_{k0} P_{0k}(t) \right\} - \lambda(0) P_{00}(t),$$

como sólo hay dos estados

$$P'_{00}(t) = \lambda(1) q_{10} P_{01}(t) - \lambda(0) P_{00}(t)$$

$$= \beta P_{01}(t) - \alpha P_{00}(t)$$

$$= \beta[\,1 - P_{00}(t)\,] - \alpha P_{00}(t)$$

$$= -(\alpha+\beta)P_{00}(t) + \beta$$

$$P'_{00}(t) + (\alpha+\beta)P_{00}(t) = \beta$$

Multiplicando ambos lados por $e^{(\alpha+\beta)t}$, tenemos

$$e^{(\alpha+\beta)t}[\,P'_{00}(t) + (\alpha+\beta)P_{00}(t)\,] = \beta\, e^{(\alpha+\beta)t}$$

que es igual a

$$\frac{d}{dt}[\,e^{(\alpha+\beta)t} P_{00}(t)\,] = \beta\, e^{(\alpha+\beta)t}$$

integrando de ambos lados

$$e^{(\alpha+\beta)t} P_{00}(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} e^{(\alpha+\beta)t} + c$$

dado que $P_{00}(0) = 1$, tenemos que,

$$c = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Por lo tanto tenemos que

$$P_{00}(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t}$$

y

$$P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t)$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[1 + e^{-(\alpha+\beta)t}\right]$$

de manera semejante podemos obtener

$$P_{11}(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t}$$

y

$$P_{10}(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t}$$

3.3. Teoremas límites.

En analogía con las cadenas de Markov, con respecto a la distribución estacionaria que vimos en el teorema 2.21 para cierto tipo de cadenas de Markov, teníamos que

$$\pi(j) = \sum_{i \in E} \pi(i) p_{ij} \ , \text{ para toda } j \in E$$

$$\sum_{j \in E} \pi(j) = 1$$

y π es la distribución estacionaria y además π era igual a

$$\pi(j) = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{n} \qquad \text{para todo } i, j \in E.$$

Tenemos un resultado similar para procesos de Markov, a continuación se enuncia sin demostración.

Teorema 3.8. Sea Y un proceso de Markov, recurrente positiva e irreducible, entonces para algún $j \in E$,

$$\pi(j) = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$$

existe y es independiente del estado inicial *i*,

$$\pi(j) = \frac{\upsilon(j) / \lambda(j)}{\sum_{i \in E} \upsilon(i) / \lambda(i)}$$

υ es la solución a

$$\upsilon = \upsilon \mathbf{Q}$$

y **Q** es la matriz de transición de la cadena de Markov asociada al proceso.

□

De este resultado podemos obtener

Corolario 3.8.1. Sea Y un proceso de Markov, recurrente e irreducible. Entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Lambda} = 0$$

tiene una solución única $\boldsymbol{\mu}$ que es estrictamente positiva. La probabilidades límites $\pi(j)$ están dadas por

$$\pi(j) = \frac{\mu(j)}{\sum_{i \in E} \mu(i)}, \qquad j \in E.$$

Demostración.

Dado que $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}\mathbf{Q}$, tenemos

$$\upsilon(j) \ = \sum_{i \neq j} \upsilon(i) q_{ij} \ , j \in E$$

de la definición 3.6 y de $\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Lambda} = 0$

$$\sum_{i \neq j} \mu(i)\lambda(i) q_{ij} - \lambda(j)\mu(j) = 0$$

$$\sum_{i \neq j} \mu(i)\lambda(i) q_{ij} = \lambda(j)\mu(j) \ , \ j \in E$$

podemos ver que para que ambas igualdades se cumplan,

$$\upsilon(j) \ = \lambda(j)\mu(j), \ j \in E,$$

por las propiedades de $\boldsymbol{\upsilon}$ tenemos que $\boldsymbol{\mu}$ es positiva, despejando de la igualdad anterior y del teorema anterior, tenemos que

$$\pi(j) = \frac{\mu(j)}{\sum_{i \in E} \mu(i)}$$

□

Del corolario anterior podemos ver que se cumple que

$$\boldsymbol{\mu}\mathbf{P}_t = \boldsymbol{\mu}$$

para todo $t \geq 0$, tenemos que $\mu(j) = \pi(j) \sum_{i \in E} \mu(i)$, por tanto para probar la igualdad anterior es equivalente a

$$\pi \mathbf{P}_t = \pi \tag{3.1}$$

$$\pi \mathbf{P}_t = \sum_{k \in E} \pi(k) P_{kj}(t)$$

del teorema 3.8 tenemos

$$\pi(j) = \lim_{s \to \infty} P_{ij}(s)$$

$$= \sum_{k \in E} \left(\lim_{s \to \infty} P_{ik}(s) \right) P_{kj}(t)$$

$$= \lim_{s \to \infty} \sum_{k \in E} P_{ik}(s) P_{kj}(t)$$

usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$= \lim_{s \to \infty} P_{ij}(t+s)$$

$$= \pi$$

es decir, $\pi \mathbf{P}_t = \pi$, lo que significa que también se cumple $\mu \mathbf{P}_t = \mu$.

De las ecuaciones de Kolmogorov $\mathbf{P}_t' = \mathbf{P}_t \Lambda = \Lambda \mathbf{P}_t$ podemos ve que cuando $t \to \infty$ la derivada se hace cero es decir tenemos que

$$\mathbf{P}_\infty \Lambda = \Lambda \mathbf{P}_\infty = 0$$

a partir de aquí podemos también probar el corolario 3.8.1.

Definición 3.7. Un vector μ que satisfaga $\mu \mathbf{P}_t = \mu$ es llamada *medida invariante*.

Si Y_0 tiene distribución π, entonces de la ecuación (3.1) tenemos que

$$P\{Y_t = j\} = \pi(j), \; j \in E$$

para todo *t*. De ahí que a veces se use el término de distribución invariante para hablar de $\boldsymbol{\pi}$.

Ejemplo 3.6. Sea *Y* un proceso de Markov con

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

las ecuaciones de $\boldsymbol{\mu\Lambda} = 0$, son

$$-5\mu(1)+2\mu(2)+3\mu(3) = 0$$

$$2\mu(1) - 3\mu(2)+4\mu(3) = 0$$

$$3\mu(1)+\mu(2) - 6\mu(3) = 0$$

Una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras dos, quitamos del sistema la tercera ecuación,

$$-5\mu(1)+2\mu(2)+3\mu(3) = 0$$

$$2\mu(1) - 3\mu(2)+4\mu(3) = 0$$

el sistema va a depender de alguno da las $\mu(\,i\,)$, haciendo $\mu(1) = 42$, tenemos

$$2\mu(2)+3\mu(3) = 210$$

$$-3\mu(2)+4\mu(3) = -84$$

al resolver el sistema obtenemos $\mu(2) = 72$ y $\mu(3) = 33$. Entonces una solución de $\boldsymbol{\mu\Lambda}=0$ y $\boldsymbol{\mu}\mathbf{P}_t = \boldsymbol{\mu}$ es $\boldsymbol{\mu} = (42, 72, 33)$, y alguna otra solución es una constante múltiplo de está, dividiendo a $\boldsymbol{\mu}$ entre $\sum_{i=1}^{3}\mu(i)$, obtenemos

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{14}{49}, \frac{24}{49}, \frac{11}{49}\right)$$

3.4. Procesos de nacimiento y muerte.

Los procesos de nacimiento y de muerte son una clase muy importante de procesos de Markov. En estos procesos Y_t, describe el tamaño de una población al tiempo t, con $E = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$. Un nacimiento incrementa en uno el tamaño de la población y una muerte la hace decrecer en uno. Es decir un proceso de nacimiento y muerte es un proceso de Markov con cambios sólo a través de transiciones desde un estado a sus vecinos inmediatos.

Definición 3.8. Un proceso de Markov $\{Y_t , t \in \mathbb{R}^+\}$, con espacio de estados $E = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$ y probabilidades de transición homogéneas se denomina *proceso de nacimiento y de muerte* si sus intensidades de transición satisfacen las condiciones siguientes: si i y j son estados tales que $|i - j| \geq 2$, entonces:

$$\lambda(i, j) = 0$$

y

$$\begin{aligned} \beta_i &= \lambda(i, i + 1) \quad \text{para } i \geq 0 \\ \delta_i &= \lambda(i, i - 1) \quad \text{para } i \geq 1 \\ \beta_i + \delta_i &= \lambda(i) \quad \text{para } i \geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

con $\delta_0 = 0$.

De la definición β_i es la *intensidad de nacimiento* del proceso y δ_i es la *intensidad de muerte*.

Podemos poner las igualdades de 3.2 más explícitamente de la siguiente forma usando la definición 3.6 y el teorema 3.5

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ii+1}(h)}{h} = \beta_i$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ii-1}(h)}{h} = \delta_i$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = \beta_i + \delta_i$$

Luego entonces podemos decir que un proceso de nacimiento y de muerte es un proceso de Markov $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$, donde Y_t es el tamaño de la población al tiempo t. En un intervalo de tiempo $(t, t+h)$ pequeño, Y_t se incrementa en uno con probabilidad $\beta_i h + o(h)$ y decrece en uno con probabilidad $\delta_i h + o(h)$, o no cambia con probabilidad $1 - (\beta_i + \delta_i) + o(h)$, esto lo podemos poner de la siguiente forma, para $h \to 0$

$$P\{Y_{t+h} = j \mid Y_t = i\} = \begin{cases} \beta_i h + o(h) & j = i+1 \\ 1 - (\delta_i + \beta_i)h + o(h) & j = i \\ \delta_i h + o(h) & j = i-1 \\ o(h) & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

A partir de la definición de un proceso de nacimiento y de muerte podemos ver que la matriz de intensidad asociada con un proceso de nacimiento y de muerte es

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & -\delta_1 - \beta_1 & \beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & -\delta_2 - \beta_2 & \beta_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Usando el teorema 3.5, obtenemos la matriz de transición asociada al proceso de nacimiento y de muerte

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \dfrac{\delta_1}{\delta_1 + \beta_1} & 0 & \dfrac{\beta_1}{\delta_1 + \beta_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \dfrac{\delta_2}{\delta_2 + \beta_2} & 0 & \dfrac{\beta_2}{\delta_2 + \beta_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

hacemos

$$p_i = \frac{\beta_i}{\beta_i + \delta_i}$$

$$q_i = \frac{\delta_i}{\beta_i + \delta_i}$$

Ejemplo 3.7. Un modelo para el cual

$$\beta_i = i\beta + \theta, \quad i \geq 0$$

$$\delta_i = i\delta\,,\ \ i \geq 1$$

es llamado un *proceso de crecimiento lineal con inmigración*. Cada individuo se asume que nace a una tasa β , además hay una tasa exponencial θ de crecimiento de la población , debido a una situación externa, por eso la tasa total de nacimientos cuando hay i personas es $i\beta + \theta$. Las muertes ocurren con una tasa exponencial δ para cada miembro de la población y entonces $\delta_i = i\delta$.

Un proceso de nacimiento y de muerte se dice que es, un *proceso de nacimiento puro* si, $\delta_i = 0$, para todo i. Un ejemplo de un proceso de nacimiento puro es el proceso Poisson.

Teorema 3.9. La cadena de Markov $\{X_t\}$, asociada al proceso de nacimiento y de muerte, es recurrente si, y sólo si, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_1\cdots\delta_n}{\beta_1\cdots\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n} = \infty.$

Demostración.

Aplicamos el teorema 2.25 quitamos la fila y la columna asociados al estado 0 de la matriz $\mathbf{Q}$.

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & q_3 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

resolvamos el siguiente sistema $\mathbf{h} = \widetilde{\mathbf{Q}}\,\mathbf{h}$, si $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ son recurrentes los estados pero si $\mathbf{h}\neq\mathbf{0}$ serán transitorios, resolvamos el sistema, para cada $i \neq 0$.

$$h_i = \sum_{j\neq 0} q_{ij} h_j$$

$$\begin{aligned} h_1 &= p_1 h_2 \\ h_2 &= q_2 h_1 + p_2 h_3 \\ h_3 &= q_3 h_2 + p_3 h_4 \\ &\vdots \\ h_n &= q_n h_{n-1} + p_n h_{n+1} \end{aligned}$$

como $h_n = (q_n + p_n)h_n$ aplicando lo anterior a la primera ecuación

$$(q_1 + p_1)h_1 = p_1 h_2$$
$$q_1 h_1 = p_1 (h_2 - h_1)$$
$$\frac{q_1}{p_1} h_1 = h_2 - h_1$$

en general

$$(q_n + p_n)h_n = q_n h_{n-1} + p_n h_{n+1}$$
$$q_n (h_n - h_{n-1}) = p_n (h_{n+1} - h_n)$$
$$\frac{q_n}{p_n} (h_n - h_{n-1}) = h_{n+1} - h_n$$

tenemos una fórmula de recurrencia, así que

$$\begin{aligned} h_{n+1} - h_n &= \frac{q_n}{p_n} (h_n - h_{n-1}) \\ &= \frac{q_n}{p_n} \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} (h_{n-1} - h_{n-2}) \\ &= \frac{q_n q_{n-1} \cdots q_2}{p_n p_{n-1} \cdots p_2} (h_2 - h_1) \\ &= \frac{q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1}{p_n p_{n-1} \cdots p_2 p_1} h_1 \end{aligned}$$

Entonces hay una solución acotada, no cero si, y sólo si, $\sup_n h_n < \infty$, como se puede observar h_n es una sucesión creciente, por lo que $\sup_n h_n = \lim_{n\to\infty} h_n$, luego

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} h_n &= h_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_{n+1} - h_n \right) \\ &= h_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1}{p_n p_{n-1} \cdots p_2 p_1} h_1 \\ &= h_1 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1}{p_n p_{n-1} \cdots p_2 p_1} \right) \end{aligned}$$

como $\sup_n h_n < \infty$ esto se cumple sólo si $\dfrac{q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1}{p_n p_{n-1} \cdots p_2 p_1} < \infty$, lo que significa que esto sucede si, y sólo si, los estados son transitorios, lo que significa que los estados son recurrentes si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty$, por último de

$$p_i = \frac{\beta_i}{\beta_i + \delta_i} \quad \text{y} \quad q_i = \frac{\delta_i}{\beta_i + \delta_i}$$

tenemos que

$$\frac{q_i}{p_i} = \frac{\delta_i}{\beta_i}$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty$$

□

Teorema 3.10. Para un proceso de nacimiento y de muerte hay una solución $\boldsymbol{\mu}$ o proporcional a ella para,

$$\boldsymbol{\mu\Lambda} = 0$$

y

$$\mu(n) = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \mu(0) \quad n = 1, 2, \ldots$$

Demostración.

Haciendo el producto de $\boldsymbol{\mu\Lambda}$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mu(0)\beta_0 = \mu(1)\delta_1$$

$$(\delta_n + \beta_n)\mu(n) = \beta_{n-1}\mu(n-1) + \delta_{n+1}\mu(n+1) \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

luego

$$\mu(1) = \frac{\beta_0}{\delta_1} \mu(0)$$

$$\delta_{n+1}\mu(n+1) - \delta_n\mu(n) = \beta_n\mu(n) - \beta_{n-1}\mu(n-1)$$

como se puede ver tenemos un sistema recursivo, cuya solución depende de $\mu(0)$, dado $\mu(0)$ el sistema tiene una y solamente una solución.

Probemos por inducción que $\mu(n) = \dfrac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}\mu(0) \quad n = 1, 2, \ldots$,

Para $n = 1$, $\mu(1) = \dfrac{\beta_0}{\delta_1}\mu(0)$, se cumple, ahora verifiquemos si se cumple para $n = k+1$

$$\delta_{k+1}\mu(k+1) - \delta_k\mu(k) = \beta_k\mu(k) - \beta_{k-1}\mu(k-1)$$

por hipótesis de inducción

$$\delta_{k+1}\mu(k+1) - \delta_k\frac{\beta_0 \cdots \beta_{k-1}}{\delta_1 \cdots \delta_k}\mu(0) = \beta_k\frac{\beta_0 \cdots \beta_{k-1}}{\delta_1 \cdots \delta_k}\mu(0) - \beta_{k-1}\frac{\beta_0 \cdots \beta_{k-2}}{\delta_1 \cdots \delta_{k-1}}\mu(0)$$

se eliminan entre si los dos términos con signo negativo

$$\delta_{k+1}\mu(k+1) = \beta_k\frac{\beta_0 \cdots \beta_{k-1}}{\delta_1 \cdots \delta_k}\mu(0)$$

luego entonces

$$\mu(k+1) = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{k-1}\beta_k}{\delta_1 \cdots \delta_k\delta_{k+1}}\mu(0)$$

es la única ya que para cualquier $\mu(0)$ seguirá siendo proporcional.

□

Corolario 3.10.1. Sea $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ un proceso de nacimiento y de muerte, si la cadena de Markov $\{X_n\}_{n\geq 1}$ asociada al proceso es recurrente, la medida estacionaria de $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es

$$\upsilon(n) = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n}\upsilon(0)\ ,\ n = 1, 2, \ldots$$

Demostración.

Del corolario 3.8.1

$$\upsilon(n) = \lambda(n)\mu(n),\ \ n \in E,$$

y del teorema anterior

$$\mu(n) = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \mu(0)$$

luego entonces

$$\upsilon(n) = \lambda(n) \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \mu(0)$$

y como $\lambda(n) = \beta_n + \delta_n$

$$= (\beta_n + \delta_n) \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \mu(0)$$

$$= (\beta_n + \delta_n) \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \frac{\upsilon(0)}{\lambda(0)}$$

$$= (\beta_n + \delta_n) \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \frac{\upsilon(0)}{\beta_0}$$

como $p_i = \dfrac{\beta_i}{\beta_i + \delta_i}$ y $q_i = \dfrac{\delta_i}{\beta_i + \delta_i}$

$$= (\beta_n + \delta_n) \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_{n-1}} \frac{\upsilon(0)}{\delta_n}$$

$$= \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_{n-1}} \frac{1}{\dfrac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n}} \upsilon(0)$$

por lo tanto $\upsilon(n) = \dfrac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \upsilon(0)$, $n = 1, 2, \ldots$

□

Sea $S = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}$

Corolario 3.10.2. Sea $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ un proceso de nacimiento y de muerte, $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ tiene una distribución estacionaria si, y sólo si, $S < \infty$, y en este caso

$$\pi(0) = \frac{1}{S}$$

$$\pi(n) = \frac{1}{S}\frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}$$

Demostración.

Para poder obtener una distribución estacionaria del corolario 3.8.1, $\sum_{n\in E} \mu(n) < \infty$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) &= \mu(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\\ &= \mu(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}\mu(0)\\ &= \mu(0)S\end{aligned}$$

entonces $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ tiene una distribución estacionaria si, y sólo si, $S < \infty$.

Del corolario 3.8.1 $\pi(j) = \dfrac{\mu(j)}{\sum_{i\in E}\mu(i)}$, $j \in E$ y del teorema 3.10 $\mu(n) = \dfrac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}\mu(0)$ $n \in E$, tenemos que

$$\pi(0) = \frac{1}{S}$$

$$\pi(n) = \frac{1}{S}\frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}$$

□

3.5. Ejercicios.

Ejemplo 3.8. (M/M/1/∞) Del ejemplo 3.3 y 3.4, la llegada de los clientes se comporta como un proceso Poisson con parámetro a y el tiempo de los servicios sigue una distribución exponencial con parámetro b, consideramos que sólo hay un servicio y no hay ninguna restricción con respecto al número de clientes permitidos en la espera del servicio (en la cola). El proceso $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ nos indica el número de clientes en la cola al tiempo t, como podemos ver es el proceso Y es un proceso de nacimiento y de muerte con

$$\beta_0 = \beta_1 = \cdots = a \quad \text{y} \quad \delta_1 = \delta_2 = \cdots = b$$

y

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{b}{a+b} & 0 & \frac{a}{a+b} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{b}{a+b} & 0 & \frac{a}{a+b} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \end{pmatrix}$$

haciendo $r = \frac{a}{b}$, teneos que S (del corolario 3.10.2) es:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } a \geq b \\ \frac{1}{1-r} & \text{si } a < b \end{cases}$$

Entonces si $r < 1$, tiene el proceso una distribución límite, usando el resultado del corolario 3.10.2

$$\pi(j) = (1-r)r^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Si $r \geq 1$, entonces $P[\, Y_t = j\,] \to 0$ cuando $t \to \infty$. La razón r es llamada la *intensidad de tráfico* del sistema.

Ejemplo 3.9. (M/M/1/m) Vamos a considerar el sistema de colas del ejemplo anterior pero con una variante, que tiene una capacidad finita de únicamente m clientes (incluyendo el que esta siendo atendido), lo que quiere decir esto es que si en el sistema hay m clientes, entonces al llegar el próximo cliente no se quedará a esperar, el cliente se va y no regresa. Los elementos de la matriz de intensidad son:

$$\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{m-1} = a,\ \beta_m = 0 \quad \text{y} \quad \delta_1 = \cdots = \delta_m = b$$

la intensidad de tráfico es $r = \frac{a}{b}$,

$$S = \sum_{n=0}^{m} r^n = \frac{1-r^{m+1}}{1-r} \text{ si } r < 1$$

Entonces si $r < 1$, tiene el proceso una distribución límite, usando el resultado del corolario 3.10.2.

$$\pi(j) = \frac{1}{\frac{1-r^{m+1}}{1-r}} r^j$$

$$= \frac{1-r}{1-r^{m+1}} r^j \quad , \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

si $r = 1$

$$\pi(j) = \frac{1}{m+1} \quad , \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo 3.10. (M/M/m/∞) Consideremos un proceso igual al del ejemplo 3.8, pero ahora consideremos que de lugar de un servidor se tienen m, es decir, las llegadas al servicio son un proceso Poisson con parámetro a y los tiempos de los servicios se distribuyen como una exponencial con parámetro b, hay m servidores, el tiempo que tarda cada uno en atender a un cliente son independientes uno de los otros.

Si hay $i < m$ clientes en el sistema entonces i servidores están trabajando independientemente uno del otro, entonces

$$\lambda(i) = a + ib$$

si $i \geq m$ entonces m servidores están ocupados y

$$\lambda(i) = a + mb$$

y

$$\beta_0 = \beta_1 = \cdots = a \quad \text{y} \quad \delta_1 = b,\ \delta_2 = 2b,\ \ldots,\ \delta_m = mb,\ \delta_{m+1} = mb,\ \ldots$$

o bien, para la intensidad de salida

$$\delta_i = \begin{cases} ib & \text{si } i < m \\ mb & \text{si } i \geq m \end{cases}$$

la intensidad de tráfico $r = \dfrac{\beta_i}{\delta_i}$ seria

$$r = \begin{cases} \dfrac{a}{ib} & \text{si } i < m \\ \dfrac{a}{mb} & \text{si } i \geq m \end{cases}$$

usando el teorema 3.9, el proceso es recurrente, si, y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} = \infty$$

$$\iff r \leq 1$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \text{S} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} &= 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{m-1}}{\delta_1 \cdots \delta_m} \frac{\beta_m \cdots \beta_{n-1}}{\delta_{m+1} \cdots \delta_n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a^n}{n!b^n} + \frac{a^m}{m!b^m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\beta_m \cdots \beta_{n-1}}{\delta_{m+1} \cdots \delta_n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a^n}{n!b^n} + \frac{a^m}{m!b^m} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \end{aligned}$$

$\text{S} < \infty \iff r < 1$, r en este caso es $r = \dfrac{a}{mb}$

$$\text{S} = 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a^n}{n!b^n} + \frac{a^m}{m!b^m} \frac{1}{1-r}$$

El proceso tiene una distribución estacionaria si $r < 1$, y del corolario 3.10.2, $\pi(n)$ es

$$\pi(n) = \frac{1}{\text{S}} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}$$

$$\pi(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}\dfrac{a^n}{n!b^n} & 0\le n\le m\\[2ex] \dfrac{1}{S}\dfrac{a^m}{m!b^m}\dfrac{a^{n-m}}{(mb)^{n-m}} & m\le n<\infty\end{cases}$$

$$\pi(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}\dfrac{a^n}{n!b^n} & 0\le n\le m\\[2ex] \dfrac{1}{S}\dfrac{a^n}{m!m^{n-m}b^n} & m\le n<\infty\end{cases}$$

Ejemplo 3.11. En una central telefónica, con m líneas, las llamadas llegan a la central telefónica como un proceso Poisson con parámetro a, el tiempo que dura cada llamada tiene una distribución exponencial con media $1/b$, las llamadas que llegan cuando las m líneas están ocupadas se pierden, consideramos el proceso $Y = \{Y_t\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\}$, donde Y_t representa el número de líneas que están ocupadas al tiempo t, el espacio de estados de este procesos es $E = \{\ 0\ ,\ 1,\ \ldots,\ m\}$, bajo las hipótesis que se han hecho, es claro que el proceso Y, es un proceso de nacimiento y de muerte, con

$$\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{m-1} = a\ ,\ \beta_m = 0 \ \text{ y } \ \delta_1 = b,\ \delta_2 = 2b\ ,\ \ldots\ ,\ \delta_m = mb$$

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{k}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} = \sum_{n=0}^{k}\frac{a^n}{n!b^n}$$

Luego entonces su distribución estacionaria es;

$$\pi(n) = \frac{1}{S}\frac{a^n}{n!b^n}$$

la igualdad anterior se denomina fórmula de pérdida de Erlang.

Así conociendo π podemos saber cual es la probabilidad estacionara de que el sistema se encuentre lleno

$$\pi(m) = \frac{a^m/m!b^m}{1+a/b+a^2/2!b^2+\cdots+a^m/m!b^m}$$

Ejemplo 3.12. Una fábrica consta de m máquinas y una sola persona para repararlas, el tiempo que tarda una máquina antes de descomponerse sigue una distribución exponencial con media $1/a$, cada máquina funciona sin fallas independientemente una de la otra, cuando esta falla se manda a reparar el tiempo de reparación se comporta como una distribución exponencial con media $1/b$. El proceso $Y = \{Y_t\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\}$, donde Y_t representa el número de máquinas que se encuentran descompuestas al tiempo t, el espacio de estados de este procesos es $E = \{\ 0\ ,\ 1,\ \ldots,\ m\}$, si $Y_t = i$, significa entonces que hay $m - i$ máquinas funcionando, el tiempo de la próxima falla será una exponencial con parámetro $(m - i\,)a$. Es claro que el proceso Y, es un proceso de nacimiento y de muerte, con

$$\beta_0 = ma,\ \beta_1 = (m-1)a\ ,\ \ldots,\ \beta_{m-1} = a\ ,\ \beta_m = 0 \quad \text{y} \quad \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_m = b$$

El proceso Y es finito y por tanto recurrente,

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \\ &= 1 + \frac{ma}{b} + \frac{m(m-1)a^2}{b^2} + \cdots + \frac{\big(m(m-1)\cdots(2)(1)\big)a^m}{b^m} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{m!}{(m-n)!}\left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned}$$

Entonces Y tiene la siguiente distribución límite

$$\pi(j) = \left(\frac{1}{S}\right)\left(\frac{m!}{(m-j)!}\left(\frac{a}{b}\right)^j\right) \qquad j = 0\ ,\ 1,\ \ldots,\ m$$

De aquí podemos calcular el número promedio de máquinas que estarán descompuestas

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m} j\pi(j) &= \sum_{j=0}^{m} j\left(\frac{1}{S}\right)\left(\frac{m!}{(m-j)!}\left(\frac{a}{b}\right)^j\right) \\ &= \left(\frac{1}{S}\right)\sum_{j=0}^{m} j\left(\frac{m!}{(m-j)!}\left(\frac{a}{b}\right)^j\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.13. Sea $Y = \{Y_t\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\}$, un proceso de nacimiento y de muerte tal que,

$$\beta_i = ia\ ,\ i \geq 0$$

y

$$\delta_i = 0 \text{ para toda } i.$$

como se puede observar es un proceso de nacimiento puro, aquí cada uno de los miembros de la población actúa independientemente y los nacimientos ocurren con una tasa exponencial a. Este proceso de nacimiento puro se le denomina *proceso de Yule*.

Supongamos que el proceso de Yule empieza con un individuo al tiempo cero es decir $Y_0 = 1$ y sea T_i , $i \geq 1$ el tiempo entre el (i–1)-ésimo nacimiento y el i-ésimo nacimiento, por como hemos planteado nuestro proceso, tenemos que, los T_i son independientes con distribución exponencial con parámetro ia. Luego entonces

$$P\{T_1 \leq t\} = 1 - \exp^{-at}$$

$$\begin{aligned}
P\{T_1 + T_2 \leq t\} &= \int_0^t P\{T_1 + T_2 \leq t \mid T_1 = x\} a \exp^{-ax}\, dx \\
&= \int_0^t \left(1 - \exp^{-2a(t-x)}\right) a \exp^{-ax}\, dx \\
&= a \int_0^t \left(\exp^{-ax} - \exp^{-2at} \exp^{ax}\right) dx \\
&= \left(1 - \exp^{-at}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\{T_1 + T_2 + T_3 \leq t\} &= \int_0^t P\{T_1 + T_2 + T_3 \leq t \mid T_1 + T_2 = x\} 2a \exp^{-ax} (1 - \exp^{-ax}) dx \\
&= \int_0^t \left(1 - \exp^{3a(t-x)}\right) 2a \exp^{-ax} (1 - \exp^{-ax}) dx \\
&= \left(1 - \exp^{-at}\right)^3
\end{aligned}$$

y en general se puede demostrar por inducción

$$P\{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_j \le t\} = \left(1 - \exp^{-at}\right)^j$$

El evento $\{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_j \le t\}$ es igual que el evento $\{Y_t \ge j+1 \mid Y_0 = 1\}$, es decir, $P\{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_j \le t\} = P\{Y_t \ge j+1 \mid Y_0 = 1\}$, de aquí obtenemos

$$\begin{aligned} P_{1j}(t) &= \left(1 - \exp^{-at}\right)^{j-1} - \left(1 - \exp^{-at}\right)^j \\ &= \exp^{-at}\left(1 - \exp^{-at}\right)^{j-1} \end{aligned}$$

Así hemos encontrado que, cuando la población comienza con un individuo, el tamaño de la población al tiempo t tiene una distribución geométrica con media $\exp^{at}$. Entonces si la población comienza con i individuos el tamaño de la población a tiempo t es la suma de i variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas geométricamente, lo que nos da una binomial negativa,

$$P_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1} \exp^{-ati}\left(1 - \exp^{-at}\right)^{j-i} \qquad j \ge i \ge 1$$

Si usamos las ecuaciones adelantadas de Kolmogorov (teorema 3.7)

$$P'_{ij}(t) = \left\{\sum_{k \ne j} \lambda(k) q_{kj} P_{ik}(t)\right\} - \lambda(j) P_{ij}(t)$$

para el proceso de Yule obtendríamos que

$$P'_{ii}(t) = -ia\, P_{ii}(t)$$

$$P'_{ij}(t) = (j-1)a\, P_{ij-1}(t) - ja\, P_{ij}(t)$$

para la primera ecuación, multiplicando ambos lados por $\exp^{iat}$, tenemos

$$\exp^{iat}\left[\, P'_{ii}(t) + ia\, P_{ii}(t)\,\right] = 0$$

que es igual a

$$\frac{d}{dt}\left[\exp^{iat} P_{ii}(t)\right] = 0$$

integrando de ambos lados

$$\exp^{iat} P_{ii}(t) = c$$

como $P_{ii}(0) = 0$ entonces $c = 1$,

$$P_{ii}(t) = \exp^{-iat}$$

Para la siguiente ecuación, multiplicando ambos lados por $\exp^{jat}$, tenemos

$$\exp^{jat} \left[P'_{ij}(t) + ja\, P_{ij}(t) \right] = \exp^{jat} (j-1) a\, P_{ij-1}(t)$$

que es igual a

$$\frac{d}{dt}\left[\exp^{jat} P_{ii}(t)\right] = \exp^{jat} (j-1) a\, P_{ij-1}(t)$$

integrando de ambos lados

$$\exp^{jat} P_{ii}(t) = \int_0^t \exp^{jas} (j-1) a P_{ij-1}(s) ds$$

$$P_{ii}(t) = (j-1)a \exp^{-jat} \int_0^t \exp^{jas} P_{ij-1}(s) ds$$

Podemos obtener $P_{ii}(t)$ recursivamente, y podemos verificar que este resultado coincidirá con

$$P_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1} \exp^{-ati} \left(1 - \exp^{-at}\right)^{j-i} \qquad j \geq i \geq 1$$

obtenido anteriormente.