

# Capítulo 1.

## 1.- Nociones de los Procesos Estocásticos.

### 1.1. Procesos Estocásticos.

La palabra estocástico es sinónimo de aleatorio, los procesos estocásticos son modelos matemáticos que estudian los fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo, se puede describir estos fenómenos por medio de una colección de variables aleatorias  $\{X_t\}$  donde  $t$  es un punto en un espacio  $T$  llamado espacio parametral. Algunos ejemplos de estos tipos de fenómenos se dan a continuación.

*Ejemplo 1.1.*  $X_t$  podría ser el número de alumnos formados en la fila de inscripción de alguna carrera, en cualquier instante  $t$ ,  $X_t$  puede tomar los valores de  $0, 1, 2, \dots$ ;  $t$  puede tomar valores de  $[0, \infty)$ , considerando la hora de la apertura de la ventanilla como el instante cero.

*Ejemplo 1.2.*  $X_t$  lo podemos considerar como el  $t$ -ésimo lanzamiento de una moneda, aquí  $X_t$  le podemos asignar los valores de 1 si cae cara y 0 si no,  $t$  toma sus valores en los  $\mathbb{N}$ , este es un proceso Bernoulli que veremos con más detalle en el siguiente punto de este capítulo.

*Ejemplo 1.3.* Supongamos que  $X_1, X_2, \dots$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, sea  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , con espacio de estados en los  $\mathbb{N}$ ,  $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$  es un proceso estocástico, que recibe el nombre de *caminata aleatoria*.

**Definición 1.1.** Un *proceso estocástico* es una familia de variables aleatorias  $\{X_t, t \in T\}$  (o  $X(t), t \in T$ ),  $T$  es llamado espacio parametral y donde para cada  $t \in T$ ,  $X_t$  es un punto en un espacio  $E$ , llamado espacio de estados.

De la definición anterior si  $T$  es contable, se dice que es un proceso estocástico de parámetros discretos, si  $T$  no es contable se dice que, el proceso tiene parámetros continuos, el parámetro  $t$  es interpretado comúnmente como tiempo, uno puede considerar a  $X_t$  como el estado del proceso en el tiempo  $t$ , un ejemplo de que  $t$  no

siempre representa unidades de tiempo lo es el ejemplo 1.2. Así como el espacio parametral puede ser discreto o continuo, el espacio de estados también lo es.

*Ejemplo 1.4.* Sea  $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ , donde  $X(t)$  representa la temperatura máxima y mínima de algún lugar en el intervalo de tiempo de  $(0, t)$ .

De este ejemplo podemos ver que el proceso  $X_t$  puede ser el resultado de un experimento ó un vector, es decir, el proceso puede ser multidimensional. También podríamos tener un espacio parametral multidimensional, veamos el siguiente ejemplo.

*Ejemplo 1.5.* Para un proceso estocástico que es la profundidad del mar en la posición  $x$  en el instante  $t$ ,  $X_t$  es tal que,  $t = (t, x)$  con  $t \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{X}$ , donde  $\mathbb{X}$  representa el conjunto de las referencias geográficas para todo el mar. Aquí  $t$  no es solamente el tiempo, sino una combinación de las coordenadas de tiempo y espacio, aquí el espacio de estados es  $\mathcal{S} = [0, \infty)$ , donde la profundidad es 0 cuando quede expuesto el lecho del océano y no existe límite para la altura que puedan alcanzar las olas, por supuesto, no se formarán olas de altura infinita.

Aquí únicamente analizaremos procesos de tipo unidimensional, en los cuales podemos tener cuatro tipos de procesos:

- a) Tiempo discreto y espacio de estado discreto.
- b) Tiempo discreto y espacio de estados continuo.
- c) Tiempo continuo y espacio de estados discreto.
- d) Tiempo continuo y espacio de estados continuo.

## 1.2. Procesos Bernoulli.

**Definición 1.2.** El proceso estocástico  $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$  es un *proceso Bernoulli* si satisface

- a)  $X_1, X_2, \dots$  son independientes y
- b)  $P\{X_n = 1\} = p, P\{X_n = 0\} = 1 - p = q$  para todo  $n$ .

Al evento  $X_n = 1$ , lo llamaremos éxito y al evento  $X_n = 0$ , fracaso.

**Definición 1.3.** Sea  $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$  un proceso Bernoulli, con probabilidad de éxito  $p$ , el número de éxitos en el  $n$ -ésimo ensayo se define como

$$N_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ X_1 + X_2 + \cdots + X_n & \text{si } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Entonces  $N_n$  es el número de éxitos en los primeros  $n$  ensayos, y  $N_{n+m} - N_n$  es el número de éxitos en los ensayos  $n+1, n+2, \dots, n+m$ . Como podemos ver  $\{N_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  define un proceso estocástico, con espacio de estados y tiempo discreto  $\{0, 1, 2, \dots\}$ .

De la definición de proceso Bernoulli, tenemos que las  $X_n$  se distribuyen como una Bernoulli con parámetro  $p$  (Bernoulli( $p$ )) y las  $X_n$  son independientes y la suma de variables aleatorias independientes Bernoulli se distribuye como una binomial con parámetro  $n$  y  $p$  ( $b(n, p)$ ), entonces  $N_n$  es una suma de variables aleatorias independientes Bernoulli, con lo que podemos enunciar el siguiente resultado.

**Teorema 1.1.** Para  $n = 0, 1, 2, \dots$

- a)  $P\{N_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$
- b)  $E[N_n] = np$
- c)  $V[N_n] = npq$ .

El uso de probabilidad condicional en la prueba del siguiente resultado ilustra una de las principales técnicas usadas en el estudio de los procesos estocásticos.

**Teorema 1.2.** Para  $n, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$P\{N_{n+1} = k\} = p P\{N_n = k-1\} + q P\{N_n = k\}$$

*Demostración.*

Usando el teorema de la probabilidad total.

$$P\{N_{n+1} = k\} = \sum_j P\{N_{n+1} = k | N_n = j\} P\{N_n = j\}$$

Dado que  $\{X_1, \dots, X_n\}$  es independiente de  $X_{n+1}$ , tenemos que  $N_n$  es independiente de  $X_{n+1}$  y como  $N_{n+1} = N_n + X_{n+1}$ , es decir,

$$\begin{aligned}
P\{N_{n+1} = k, N_n = j\} &= P\{N_n + X_{n+1} = k, N_n = j\} \\
&= P\{X_{n+1} = k - j, N_n = j\} \\
&= P\{X_{n+1} = k - j\}P\{N_n = j\}
\end{aligned}$$

con lo que

$$P\{N_{n+1} = k \mid N_n = j\} = P\{X_{n+1} = k - j\} = \begin{cases} p & \text{si } j = k - 1 \\ q & \text{si } j = k \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

de aquí, tenemos

$$P\{N_{n+1} = k\} = pP\{N_n = k - 1\} + qP\{N_n = k\}.$$

□

**Teorema 1.3.** Para algún  $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$P\{N_{m+n} - N_m = k \mid N_0, \dots, N_m\} = P\{N_{m+n} - N_m = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

*Demostración.*

Las variables aleatorias  $N_0, N_1, \dots, N_m$  están completamente determinadas por las variables  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , por definición de  $N_n$  e inversamente las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_m$  están completamente determinadas por  $N_0, \dots, N_m$ , por ejemplo  $X_m = N_m - N_{m-1}$ . Luego entonces

$$P\{N_{m+n} - N_m = k \mid N_0, \dots, N_m\} = P\{N_{m+n} - N_m = k \mid X_1, \dots, X_m\}$$

tenemos que  $N_{m+n} - N_m = X_{m+1} + X_{m+2} + \dots + X_{m+n}$  y  $\{X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_{m+n}\}$  es independiente de  $\{X_1, \dots, X_m\}$ , lo que significa que  $N_{m+n} - N_m$  es independiente de  $\{X_1, \dots, X_m\}$  así llegamos al resultado.

$$\begin{aligned}
P\{N_{m+n} - N_m = k \mid N_0, \dots, N_m\} &= P\{N_{m+n} - N_m = k \mid X_1, \dots, X_m\} \\
&= P\{N_{m+n} - N_m = k\}
\end{aligned}$$

ahora bien  $N_{m+n} - N_m = X_{m+1} + X_{m+2} + \dots + X_{m+n}$  es la suma de  $n$  variables aleatorias Bernoulli( $p$ ) independientes e idénticamente distribuidas, lo que significa que es una variable aleatoria binomial con parámetro  $n$  y  $p$ , es decir,

$$P\{N_{m+n} - N_m = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

□

De este teorema podemos ver que la variable aleatoria  $N_{n_k} - N_{n_{k-1}}$  para cualquier  $k \in \{1, 2, \dots, j\}$  tal que  $n_k$  cumpla con  $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \dots < n_j$ ,  $N_{n_k} - N_{n_{k-1}}$  es independiente de  $\{N_{n_0}, \dots, N_{n_{k-2}}\}$ , a continuación enunciamos este resultado.

**Corolario 1.3.1** Sea  $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \dots < n_j$  son enteros, entonces las variables aleatorias  $N_{n_1} - N_{n_0}, N_{n_2} - N_{n_1}, \dots, N_{n_j} - N_{n_{j-1}}$  son independientes.

En el teorema 1.3 se probó que  $N_{m+n} - N_m$  es independiente de  $N_0, \dots, N_m$ , en la demostración no se hizo ninguna referencia a la distribución de las  $X_n$  únicamente se considero su independencia. De esta forma podemos decir que el corolario 1.3.1 se cumple para algún proceso estocástico  $\{M_n; n = 0, 1, \dots\}$  definido por

$$M_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n & \text{si } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

con  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , variables aleatorias independientes

Un proceso estocástico que cumple con

$$P\{N_{m+n} - N_m = k \mid N_0, \dots, N_m\} = P\{N_{m+n} - N_m = k\}$$

o con el corolario 1.3.1, es un *proceso estocástico con incrementos independientes*.

Si para el proceso  $\{M_n; n = 0, 1, \dots\}$  definido anteriormente, las variables aleatorias  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  a parte de la independencia entre ellas son idénticamente distribuidas, entonces la distribución de los incrementos  $M_{n+s} - M_s$  no depende de  $s$ , se dice entonces,  $\{M_n\}$  es *estacionario con incrementos independientes*.

Regresando al proceso Bernoulli, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.4.** Sea  $Z$  una variable aleatoria que depende de un número finito de variables aleatorias  $N_m, N_{m+1}, \dots$ ; es decir,

$$Z = g(N_m, N_{m+1}, \dots, N_{m+n})$$

para alguna  $n$  y alguna función  $g$ . Entonces

$$E[Z | N_0, N_1, \dots, N_m] = E[Z | N_m]$$

*Demostración.*

Dado que  $N_{m+1} = N_m + X_{m+1}$ ,  $\dots$ ,  $N_{m+n} = N_m + X_{m+1} + \dots + X_{m+n}$ , hay una función  $h$  tal que

$$Z = g(N_m, N_{m+1}, \dots, N_{m+n}) = h(N_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+n})$$

Así

$$E[Z | N_0, N_1, \dots, N_m] = \sum_k \sum_{\mathbf{i}} h(k, i_1, \dots, i_n) P\{N_m = k, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+n} = i_n | N_0, \dots, N_m\}$$

la segunda suma es sobre toda las  $n$ -uples  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$  de ceros y unos. Dado que  $\{X_{m+1}, \dots, X_{m+n}\}$  es independiente de  $\{X_1, \dots, X_m\}$ , también  $\{X_{m+1}, \dots, X_{m+n}\}$  es independiente de  $N_0, N_1, \dots, N_m$  que son determinadas por  $\{X_1, \dots, X_m\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} P\{N_m = k, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+n} = i_n | N_0, \dots, N_m\} \\ &= P\{X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+n} = i_n\} P\{N_m = k | N_0, \dots, N_m\} \\ &= \pi(i_1) \cdots \pi(i_n) P\{N_m = k | N_0, \dots, N_m\}, \end{aligned}$$

donde  $\pi(i) = P\{X_n = i\} = p$  o  $q$  si  $i = 1$  o  $i = 0$  respectivamente. Por otro lado

$$\begin{aligned} P\{N_m = k | N_0, \dots, N_m\} &= E[I_{\{k\}}(N_m) | N_0, \dots, N_m] \\ &= I_{\{k\}}(N_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = N_m \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} E[Z | N_0, N_1, \dots, N_m] &= \sum_k \sum_{\mathbf{i}} h(k, i_1, \dots, i_n) \pi(i_1) \cdots \pi(i_n) I_{\{k\}}(N_m) \\ E[Z | N_0, N_1, \dots, N_m] &= \sum_{\mathbf{i}} h(N_m, i_1, \dots, i_n) \pi(i_1) \cdots \pi(i_n) = f(N_m) \end{aligned}$$

independiente de  $N_0, \dots, N_{m-1}$ , esto significa

$$E[Z | N_0, N_1, \dots, N_m] = f(N_m) = E[Z | N_m]$$

□

El teorema anterior lo satisfacen varios procesos con una estructura menos compleja, tales procesos son llamados cadenas de Markov, del estudio de estos procesos nos ocuparemos en el siguiente capítulo.

**Definición 1.4.** Sea  $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$  un proceso Bernoulli con probabilidad de éxito  $p$ , consideremos una realización del proceso  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , esta es una secuencia de unos y ceros, denotemos por  $T_1, T_2, \dots$ , los índices correspondientes a los sucesivos éxitos, a los  $T_k$  se les llama los *tiempos de éxitos*.

*Ejemplo 1.6.* Si

$$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1, X_5 = 1, \dots$$

Es una realización del proceso, entonces  $T_1 = 1, T_2 = 4, T_3 = 5, \dots$ , es decir,  $T_k$  es el número del evento en el que ocurrió el  $k$ -ésimo éxito.

Supongamos que para una realización del proceso el  $k$ -ésimo éxito ha ocurrido antes de  $n$ -ésimo evento, esto es  $T_k \leq n$ , entonces el número de éxitos en los primeros  $n$  eventos debería ser al menos  $k$ , esto significa que  $N_n \geq k$ , e inversamente si  $N_n \geq k$  entonces  $T_k \leq n$ .

Otra relación entre los tiempos de éxitos y el número de éxitos es; si  $T_k = n$  significa que en esta realización hay exactamente  $k - 1$  éxitos en los primeros  $n - 1$  eventos y un éxito ocurre exactamente en el  $n$ -ésimo evento, es decir,  $N_{n-1} = k - 1$  y  $X_n = 1$  e inversamente si  $N_{n-1} = k - 1$  y  $X_n = 1$  entonces  $T_k = n$ . A continuación enunciamos estas dos relaciones.

**Lema 1.1.** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una realización del proceso  $k = 1, 2, \dots$  y  $n \geq k$ , tenemos que

- a)  $T_k \leq n$  si, y sólo si  $N_n \geq k$
- b)  $T_k = n$  si, y sólo si  $N_{n-1} = k - 1$  y  $X_n = 1$ .

**Teorema 1.5.** Para alguna  $k \in \mathbb{N}$

$$a) P\{T_k \leq n\} = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \quad n = k, k+1, \dots$$

$$b) P\{T_k = n\} = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}, \quad n = k, k+1, \dots$$

*Demostración.*

a) Para  $k \in \mathbb{N}$  y  $n \geq k$ , por el lema 1.1 el evento  $\{T_k \leq n\}$  es igual al evento  $\{N_n \geq k\}$ , entonces

$$P\{T_k \leq n\} = P\{N_n \geq k\} = \sum_{j=k}^n P\{N_n = j\}$$

por el teorema 1.1

$$P\{N_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

es decir,

$$P\{T_k \leq n\} = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \quad n = k, k+1, \dots$$

b) Por el lema 1.1 el evento  $\{T_k = n\}$  es igual al evento  $\{N_{n-1} = k-1, X_n = 1\}$ , por definición, el proceso  $N_{n-1}$  es independiente de  $X_n = 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} P\{T_k = n\} &= P\{N_{n-1} = k-1, X_n = 1\} \\ &= P\{N_{n-1} = k-1\} P\{X_n = 1\} \\ &= \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} p = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

□

El teorema anterior nos da información muy importante sobre la estructura del proceso  $\{T_k, k = 1, 2, \dots\}$  pero veamos otros resultados concernientes a la estructura de este proceso.

**Teorema 1.6.** Sea  $T_0 = 0$  y  $T_1, T_2, \dots$  los tiempos del primer éxito, segundo éxito, ... de un proceso Bernoulli  $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$  con probabilidad de éxito  $p$ , para alguna  $k \in \{0, 1, \dots\}$ ,

$$P\{T_{k+1} = n \mid T_0, \dots, T_k\} = P\{T_{k+1} = n \mid T_k\}.$$

*Demostración.*

Para algún  $k, n$  y enteros  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = a$ , sea

$$f(a_0, a_1, \dots, a_k) = P\{ T_{k+1} = n \mid T_0 = a_0, T_1 = a_1, \dots, T_k = a_k \}$$

si  $n \leq a_k = a$ , entonces la probabilidad condicional es cero, si  $n > a_k = a$ ,  $T_k = a$  y  $T_{k+1} = n$ , lo que significa que  $X_{a+1} = 0, \dots, X_{n-1} = 0, X_n = 1$ . Entonces

$$f(a_0, a_1, \dots, a_k) = P\{ X_{a+1} = 0, \dots, X_{n-1} = 0, X_n = 1 \} = pq^{n-1-a}$$

hemos llegado a que

$$P\{ T_{k+1} = n \mid T_0 = a_0, T_1 = a_1, \dots, T_k = a_k \} = \begin{cases} 0 & \text{si } \{T_k \geq n\}, \\ pq^{n-1-T_k} & \text{si } \{T_k < n\}, \end{cases} \quad (1.1)$$

y como podemos ver, el lado derecho de la igualdad es independiente en ambos casos, de  $T_0, T_1, \dots, T_{k-1}$ .

□

El teorema anterior nos dice que dado el tiempo  $T_k$  del  $k$ -ésimo éxito, el tiempo del  $k+1$ -ésimo éxito es condicionalmente independiente de  $T_0, T_1, \dots, T_{k-1}$ . De la ecuación 1.1 tenemos que

$$P\{ T_{k+1} = m + T_k \mid T_0, \dots, T_k \} = pq^{T_k+m-1-T_k} = pq^{m-1}$$

lo que nos da el siguiente resultado.

**Corolario 1.6.1.** Para alguna  $k \in \{0, 1, \dots\}$

$$P\{ T_{k+1} - T_k = m \mid T_0, \dots, T_k \} = P\{ T_{k+1} - T_k = m \} = pq^{m-1}$$

para toda  $m \in \{1, 2, \dots\}$ .

El resultado anterior nos dice, que el tiempo entre dos éxitos es independiente de los tiempos de los previos éxitos y se distribuye como una geométrica.

**Corolario 1.6.2.**  $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución geométrica.

**Corolario 1.6.3.**  $T_{k+1} - T_k$  para  $k \in \mathbb{N}$

$$a) \quad E[T_{k+1} - T_k] = \frac{1}{p}$$

$$\text{b) } V[T_{k+1} - T_k] = \frac{q}{p^2}.$$

### 1.3 Procesos Poisson.

**Definición 1.5.** Un proceso estocástico  $\{N_t; t \geq 0\}$ , de tiempo continuo y valores enteros, es un *proceso de conteo* si  $N_t$  representa el número total de “eventos” que han ocurrido hasta el tiempo  $t$ .

A partir de la definición anterior podemos ver que un proceso de conteo debe de cumplir con:

- a)  $N_t \geq 0$
- b)  $N_t$  es un valor entero
- c) si  $s \leq t$ , entonces  $N_s \leq N_t$
- d) para  $s < t$ ,  $N_t - N_s$  es igual al número de eventos que han ocurrido en el intervalo  $(s, t]$ .

Un proceso de conteo se dice que tiene *incrementos independientes*, si el número de eventos que ocurren en intervalos disjuntos son independientes. Por ejemplo esto significa que  $N_{t+b} - N_t$  con  $b > 0$  es independiente de  $\{N_u; u \leq t\}$  para toda  $t$ .

Un proceso de conteo se dice que tiene *incrementos estacionarios* si el número de eventos en el intervalo  $(t+b, s+b]$  tiene la misma distribución que el número de eventos en el intervalo  $(t, s]$  para todo  $t < s$ , y  $b > 0$ , o bien, se puede decir que un proceso de conteo cuya distribución del número de eventos que ocurren en un intervalo, depende únicamente de la longitud del intervalo, se le dice que posee *incrementos estacionarios*.

A continuación vamos a definir al proceso Poisson, hay varias definiciones pero todas son equivalentes, daremos una que nos da una buena información sobre la estructura probabilística del proceso.

**Definición 1.6.** Sea  $\{N_t; t \geq 0\}$  un proceso de conteo, donde  $N(t, t+b)$  (o  $N_{t+b} - N_t$ ) es el número de eventos o llegadas que ocurren en el intervalo  $(t, t+b]$  y  $N_t = N[0, t]$ . Entonces  $\{N_t; t \geq 0\}$  es un *proceso Poisson* con parámetro  $\lambda$  si

$$1) P\{N(t, t+b) = 0\} = 1 - \lambda b + o(b)$$

- 2)  $P\{N(t, t+b) = 1\} = \lambda b + o(b)$
- 3)  $P\{N(t, t+b) \geq 2\} = o(b)$
- 4) Para toda  $t$  y  $b > 0$ ,  $N(t, t+b)$  es independiente de  $\{N_u; u \leq t\}$
- 5) Tiene incrementos estacionarios

Aquí  $o(b)$  es una función tal que

$$\frac{o(b)}{b} \rightarrow 0 \text{ cuando } b \rightarrow 0.$$

En la definición anterior también hay que considerar que  $N_0 = 0$ .

Sea  $t_0 \in \mathbb{R}^+ \cup 0$  y  $Z$  el tiempo de espera hasta la próxima llegada después del tiempo  $t_0$ ,

$$P\{x\} = P\{Z > x\},$$

entonces

$$P\{x+b\} = P\{Z > x+b\} = P\{Z > x, N(t_0+x, t_0+x+b) = 0\}$$

de la definición de probabilidad condicional

$$= P\{N(t_0+x, t_0+x+b) = 0 \mid Z > x\}P\{Z > x\} \quad (1.2)$$

Ahora bien  $Z > x$  si, y sólo si,  $N(t_0, t_0+x) = 0$ , pero  $N(t_0+x, t_0+x+b)$  es independiente de  $N(t_0, t_0+x)$  por la propiedad 4 de la definición 1.6, entonces la ecuación 1.2 es equivalente a

$$\begin{aligned} P\{x+b\} &= P\{N(t_0+x, t_0+x+b) = 0\}P\{x\} \\ &= (1 - \lambda b + o(b))P\{x\} \end{aligned}$$

entonces

$$P\{x+b\} - P\{x\} = -(\lambda b)P\{x\} + o(b)P\{x\}$$

lo dividimos entre  $b$  y tomamos  $b \rightarrow 0$ , obtenemos

$$P'\{x\} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{P\{x+b\} - P\{x\}}{b} = -\lambda P\{x\}$$

Esta ecuación diferencial tiene la solución

$$P\{x\} = P\{0\} e^{-\lambda x}.$$

Pero  $P\{0\} = P\{Z > 0\} = 1$  ya que la probabilidad de dos llegadas al mismo tiempo es

$$P\{N(t, t+b) \geq 2\} = o(b)$$

y dado que  $b \rightarrow 0$ ,

$$P\{N(t, t+b) \geq 2\} = 0$$

es decir,

$$P\{Z = 0\} = 0$$

y si obtenemos su complemento  $P\{Z > 0\} = 1 - P\{Z = 0\}$ . Entonces

$$P\{x\} = e^{-\lambda x}$$

con esto hemos demostrado el siguiente resultado.

**Teorema 1.7.**  $Z$  se distribuye como una  $\exp(\lambda)$  (exponencial con parámetro  $\lambda$ ), independiente de  $t_0$ .

Así como para un proceso Bernoulli, tenemos los tiempos de éxito, para un proceso Poisson, tenemos el siguiente concepto totalmente equivalente, si  $\{N_t; t \geq 0\}$  es un proceso Poisson con parámetro  $\lambda$  denotaremos por  $T_1, T_2, \dots$ , los *tiempos de llegada*, correspondientes a los sucesivos arribos.

Como vimos anteriormente para  $t_0 \in \mathbb{R}^+ \cup 0$  y  $Z$  el tiempo de espera hasta la próxima llegada después del tiempo  $t_0$ ,

$$P\{x\} = P\{Z > x\} = e^{-\lambda x},$$

la probabilidad de que el tiempo de llegada del primer suceso sea mayor a  $x$  sería;

$$P\{T_1 > x\} = e^{-\lambda x}$$

si tomamos ahora a  $T_{i-1}$  como  $t_0$  el próximo arribo sería en el tiempo  $T_i$ , el tiempo de espera entre las llegadas  $i-1$  e  $i$ , es  $T_i - T_{i-1}$  es decir,  $Z = T_i - T_{i-1}$ , luego entonces la probabilidad de que la llegada entre  $i-1$  e  $i$  sea mayor a  $x$  sería

$$P \{ T_i - T_{i-1} > x \} = e^{-\lambda x},$$

que como podemos ver no depende de  $i$ , es decir,  $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_i - T_{i-1}$  son independientes y todas se distribuyen como una  $\exp(\lambda)$ , así podemos enunciar el siguiente resultado.

**Teorema 1.8.** Los tiempos entre llegadas se distribuyen como una  $\exp(\lambda)$  y son independientes.

Al distribuirse  $T_i - T_{i-1}$  como una  $\exp(\lambda)$ . Obtenemos también:

**Corolario 1.8.1.**

- a)  $E[ T_i - T_{i-1} ] = \frac{1}{\lambda}$
- b)  $V[ T_i - T_{i-1} ] = \frac{1}{\lambda^2}$

**Teorema 1.9.** El tiempo de llegada  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tiene una distribución gamma con parámetros  $n$  y  $\lambda$ .

*Demostración.*

Podemos expresar a  $T_n$  como sigue

$$T_n = T_1 + T_2 - T_1 + \dots + T_n - T_{n-1}$$

es decir,  $T_n$  la podemos expresar como la suma de  $n$  variables aleatorias  $\exp(\lambda)$  y como los tiempo entre las llegadas son independientes, tenemos una suma de  $n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una  $\exp(\lambda)$ , lo que significa que  $T_n$  se distribuye como una gamma con parámetro  $n$  y  $\lambda$ .

□

Hasta el momento no hemos dicho nada sobre la distribución de  $N_t$ , definamos

$$P_m\{t\} = P\{ N_t = m \}.$$

Entonces

$$P_0\{t\} = P\{N_t = 0\} = P\{Z > t\} = P\{t\}$$

y por eso

$$P_0\{t\} = e^{-\lambda t}$$

Ahora bien por los incisos 4 y 5 de la definición 1.6

$$P_m\{t+b\} = P_m\{t\} P_0\{b\} + P_{m-1}\{t\} P_1\{b\} + \sum_{i=2}^m P_{m-i}\{t\} P_i\{b\}$$

a partir de  $i = 2$ , tenemos

$$P_{m-2}\{t\} P_2\{b\} = P\{N_t = m-2\} P\{N_b = 2\}$$

por la propiedad 3 de la definición 1.6

$$= P\{N_t = m-2\} o(b),$$

es decir, podemos hacer

$$\sum_{i=2}^m P_{m-i}\{t\} P_i\{b\} = o(b)$$

quedándonos

$$P_m\{t+b\} = P_m\{t\} P_0\{b\} + P_{m-1}\{t\} P_1\{b\} + o(b)$$

Usando la propiedad uno y dos de la definición 1.6

$$\begin{aligned} P_m\{t+b\} &= P_m\{t\} (1 - \lambda b + o(b)) + P_{m-1}\{t\} (\lambda b + o(b)) + o(b) \\ P_m\{t+b\} - P_m\{t\} &= -\lambda b P_m\{t\} + \lambda b P_{m-1}\{t\} + o(b) \end{aligned}$$

Entonces si dividimos todo entre  $b$  y tomamos el límite cuando  $b \rightarrow 0$

$$P'_m\{t\} = -\lambda P_m\{t\} + \lambda P_{m-1}\{t\}$$

también sabemos que

$$P_m\{0\} = P\{N_0 = m\} = 0 \quad \text{para } m = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Ahora definamos

$$Q_m\{t\} = P_m\{t\} e^{\lambda t}. \quad (1.5)$$

Entonces la ecuación

$$P'_m\{t\} = -\lambda P_m\{t\} + \lambda P_{m-1}\{t\}$$

usando la ecuación 1.5 nos queda como

$$-\lambda e^{-\lambda t} Q_m\{t\} + e^{-\lambda t} Q'_m\{t\} = -\lambda e^{-\lambda t} Q_m\{t\} + \lambda Q_{m-1}\{t\} e^{-\lambda t}$$

dividiendo todo entre  $e^{-\lambda t}$  nos queda

$$-\lambda Q_m\{t\} + Q'_m\{t\} = -\lambda Q_m\{t\} + \lambda Q_{m-1}\{t\}$$

llegamos a

$$Q'_m\{t\} = \lambda Q_{m-1}\{t\}.$$

Resolviendo recursivamente:

$$Q_0\{t\} = P_0\{t\} e^{\lambda t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1$$

$$Q'_1\{t\} = \lambda Q_0\{t\} = \lambda \text{ de aquí } Q_1\{t\} = \lambda t + c.$$

haciendo  $t = 0$ , en la ecuación 1.5

$$Q_1\{0\} = P_1\{0\} e^{\lambda 0} = c$$

por la ecuación 1.4  $P_1\{0\} = 0$ , tenemos que  $Q_1\{0\} = 0$  lo que significa que  $c = 0$  así que

$$Q_1\{t\} = \lambda t$$

ahora

$$Q'_2\{t\} = \lambda Q_1\{t\} = \lambda^2 t$$

$$Q_2\{t\} = \frac{\lambda^2 t^2}{2} + c$$

Por otro lado tenemos que  $Q_2\{0\} = P_2\{0\} e^{\lambda 0} = 0$ , luego entonces  $c = 0$  y nos queda que

$$Q_2\{t\} = \frac{\lambda^2 t^2}{2}$$

y así podemos seguir sucesivamente hasta llegar a

$$Q_m\{t\} = \frac{\lambda^m t^m}{m!}.$$

De la ecuación 1.5

$$P_m\{t\} = \frac{\lambda^m t^m}{m!} e^{-\lambda t}$$

Es decir, que  $N_t$  se distribuye como una Poisson con parámetro  $\lambda t$  ( $Po(\lambda t)$ ).

**Teorema 1.10.**  $N_t$  se distribuye como una  $Po(\lambda t)$ .

**Corolario 1.10.1.**

- a)  $E[N_t] = \lambda t$
- b)  $V[N_t] = \lambda t$

**Definición 1.7.**  $\frac{N_t}{t}$  es el *tiempo de intensidad*.

Del corolario 1.10.1 tenemos que el valor esperado del tiempo de intensidad es

$$E\left[\frac{N_t}{t}\right] = \lambda,$$

$\lambda$  se le llama intensidad.

Por otro lado tenemos por definición que los incrementos de las llegadas son independientes, es decir, para  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_k = t$ ,  $N_{t_k+s} - N_{t_k}$  es independiente de  $N_u$ ;  $u \leq t_k$ , para  $s, u \geq 0$  esto significa que  $N_{t_k+s} - N_{t_k}$  es independiente de  $N_u - N_{t_i}$ . Ya que  $N_t$  se distribuye como una  $Po(\lambda t)$  tenemos que

$N_{t_k+s} - N_{t_k}$  se distribuye  $Po(\lambda s)$  esto significa que a cualquier tiempo empieza otro proceso Poisson.

**Corolario 1.10.2.** Sea  $\{N_t; t \geq 0\}$  un proceso Poisson con intensidad  $\lambda$ . Entonces para alguna  $s, t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P\{N_{t+s} - N_t = k \mid N_u; u \leq t\} &= P\{N_{t+s} - N_t = k\} \\ &= \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

**Teorema 1.11.** Sea  $L_t$  un proceso Poisson con intensidad  $\lambda$  y  $M_t$  es un proceso Poisson con intensidad  $\mu$ , ambos procesos son independientes. Si definimos a  $N_t = L_t + M_t$ , entonces  $N_t$  es un proceso Poisson con intensidad  $\lambda + \mu$ .

*Demostración.*

Tenemos que probar que  $N_t$  cumple con la definición de un proceso Poisson, probaremos únicamente la propiedad dos y la propiedad cuatro, la uno y la tres son inmediatas a partir de probar la propiedad dos y la cinco es semejante a la cuatro.

$$\begin{aligned} P\{N(t, t+h) = 1\} &= P\{L(t, t+h) + M(t, t+h) = 1\} \\ &= P\{\{L(t, t+h) = 1 \text{ y } M(t, t+h) = 0\} \cup \{L(t, t+h) = 0 \text{ y } M(t, t+h) = 1\}\} \end{aligned}$$

como ambos eventos son excluyentes y además,  $L_t$  y  $M_t$ , son independientes, tenemos que

$$\begin{aligned} P\{N(t, t+h) = 1\} &= P\{L(t, t+h) = 1\}P\{M(t, t+h) = 0\} + P\{L(t, t+h) = 0\}P\{M(t, t+h) = 1\} \\ &= (\lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h)) + (1 - \lambda h + o(h))(\mu h + o(h)) \\ &= \lambda h - \lambda \mu h^2 + \lambda h o(h) + o(h) - o(h) \mu h + o(h) o(h) + \\ &\quad \mu h - \lambda \mu h^2 + \mu h o(h) + o(h) - o(h) \lambda h + o(h) o(h) \end{aligned}$$

como podemos ver todo depende de  $o(h)$  excepto  $\lambda h$  y  $\mu h$ , es claro ver que para  $\lambda \mu h^2$  si tomamos a  $o(h) = h^2$  tenemos una función del tipo de  $o(h)$  luego entonces

$$P\{N(t, t+b) = 1\} = (\lambda + \mu) b + o(b)$$

con esto hemos probado que  $N_t$  cumple la propiedad cuatro de un proceso Poisson.

Ahora hay que probar que  $N(t, t+b)$  es independiente de  $\{N_u; u \leq t\}$ .

Como  $L_t$  y  $M_t$ , ambos son proceso Poisson cumplen que

$$\begin{aligned} L(t, t+b) &\text{ es independiente de } \{L_u; u \leq t\} \text{ y} \\ M(t, t+b) &\text{ es independiente de } \{M_u; u \leq t\} \end{aligned}$$

Por definición  $L_t$  y  $M_t$  son independientes, lo que significa que

$$\begin{aligned} M(t, t+b) &\text{ es independiente de } \{L_u; u \leq t\} \text{ y} \\ L(t, t+b) &\text{ es independiente de } \{M_u; u \leq t\} \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$L(t, t+b) + M(t, t+b) \text{ es independiente de } \{L_u; u \leq t\} \text{ y } \{M_u; u \leq t\}$$

y por tanto  $L(t, t+b) + M(t, t+b)$  es independiente de  $\{L_u + M_u; u \leq t\}$ , como se quería probar.

□

## 1.4 Ejercicios.

*Ejemplo 1.7.* Un cierto componente en un sistema, tiene un tiempo de vida cuya distribución puede considerarse como  $\pi(m) = pq^{m-1}$ ,  $m \geq 1$ . Cuando el componente falla es remplazado por uno idéntico. Sea  $T_1, T_2, \dots$  denota el tiempo de falla;

$$U_k = T_k - T_{k-1}$$

es el tiempo de vida del  $k$ -ésimo componente remplazado. Dado que los componentes son idénticos,

$$P\{U_k = m\} = pq^{m-1}, m \geq 1$$

y los componentes tienen tiempos de vida independientes, así tenemos que  $\{T_k\}$  lo podemos considerar los tiempos de éxito de un proceso Bernoulli. Si sabemos que los

tiempos de las tres primeras fallas ocurren en los tiempos 3, 12 y 14, ¿Cuál es el tiempo esperado de la quinta falla?

Por el teorema 1.6,

$$E [ T_5 | T_1, T_2, T_3 ] = E [ T_5 | T_3 ].$$

Si hacemos  $T_5 = T_3 + ( T_5 - T_3 )$ , nos queda

$$\begin{aligned} E [ T_5 | T_3 ] &= E [ T_3 | T_3 ] + E [ T_5 - T_3 | T_3 ] \\ &= E [ T_3 | T_3 ] + E [ T_5 - T_3 ] \end{aligned}$$

Por el corolario 1.6.3, y haciendo  $T_5 - T_3 = T_4 - T_3 + T_5 - T_4$

$$E [ T_5 | T_3 ] = T_3 + \frac{2}{p}.$$

Lo que se quería calcular es:

$$E [ T_5 | T_1 = 3, T_2 = 12, T_3 = 14 ] = 14 + \frac{2}{p}.$$

*Ejemplo 1.8.* Considérese el proceso estocástico como la trayectoria de una partícula, la cual se mueve a lo largo de un eje con pasos de una unidad a intervalos de tiempo también de una unidad. Supóngase que la probabilidad de cualquier paso que se tome a la derecha es  $p$  y el que se tome a la izquierda es  $q = 1 - p$ . Suponemos también que cualquier paso se da de manera independiente a cualquier otro. Este tipo de proceso es una *caminata aleatoria*. Si la partícula está en la posición cero en el instante cero, determínese la probabilidad de que se encuentre en la posición  $k$  después de  $n$  pasos.

Definimos  $\{X_n ; n \in \mathbb{N}\}$  como las variables aleatorias independientes, donde  $X_n = 1$  si la partícula da el paso a la derecha y  $X_n = -1$  si el paso fue a la izquierda, cada una con probabilidad

$$P\{X_n = 1\} = p \text{ y } P\{X_n = -1\} = q.$$

Sea  $\{Z_n\}$  un proceso estocástico, donde  $Z_n$  es la posición de la partícula en el tiempo  $n$ , este proceso estocástico tiene un espacio de estados discreto con valores en  $\{-\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty\}$ , el tiempo  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Para  $n = 0$  tenemos que inicialmente  $Z_0 = 0$ . Después de  $n$  pasos

$$Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

se desea determinar el valor de

$$P\{Z_n = k \mid Z_0 = 0\}$$

sea la variable aleatoria

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i = 1 \\ 0 & \text{si } X_i = -1 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Es decir, la  $Y_i = \frac{1}{2}(X_i + 1)$ , al ser las  $X_i$  independientes tenemos que también los son las  $Y_i$ , es decir,  $\{Y_n; n \in \mathbb{N}\}$  define un proceso Bernoulli (ver la definición 1.2), si  $N_n$  es el número de éxitos tenemos de la definición 1.3, que

$$N_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n & \text{si } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

en términos de las  $X_i$  tenemos que

$$N_n = \frac{1}{2}(X_1 + 1) + \frac{1}{2}(X_2 + 1) + \dots + \frac{1}{2}(X_n + 1) = \frac{1}{2}(Z_n + n)$$

Luego entonces

$$\begin{aligned} P\{Z_n = k \mid Z_0 = 0\} &= P\{Z_n = 2N_n - n = k \mid Z_0 = N_0 = 0\} \\ &= P\{N_n = \frac{1}{2}(k + n) \mid N_0 = 0\} \end{aligned}$$

por el teorema 1.3

$$P\{Z_n = k \mid Z_0 = 0\} = P\{N_n = \frac{1}{2}(k + n)\}$$

$$= \binom{n}{\frac{1}{2}(k+n)} p^{\frac{1}{2}(k+n)} q^{\frac{1}{2}(n-k)}, \quad \text{siempre que } \frac{1}{2}(k+n) = \{0, 1, \dots, n\}.$$

También podemos calcular

$$\begin{aligned} E[Z_n] &= E[2N_n - n] \\ &= 2E[N_n] - n \\ &= 2np - n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2np - n(p+q) \\
 &= n(p - q) \qquad // \ p+q = 1 //
 \end{aligned}$$

análogamente

$$V[Z_n] = V[2N_n - n] = 4npq$$

*Ejemplo 1.9.* Hay un restaurante por el cual, los vehículos solo pueden llegar a el por medio de la carretera, supóngase que la llegada de vehículos al restaurante por el lado derecho sigue una proceso Poisson con parámetro  $\lambda$  y las llegadas por el lado izquierdo siguen un proceso Poisson con parámetro  $\mu$ , luego del teorema 1.11 sabemos que el número de llegada al restaurante en vehículo sigue un proceso Poisson con parámetro  $\lambda + \mu$ .

*Ejemplo 1.10.* Un componente de un sistema, su tiempo de vida sigue una distribución  $\exp(\lambda)$ . Cuando éste falla es inmediatamente reemplazado por uno idéntico; y cuando éste falla es reemplazado inmediatamente por otro idéntico, etc. Esto significa que los tiempos de vida  $X_1, X_2, \dots$  de los sucesivos componentes son independientes e idénticamente distribuidos con distribución

$$P\{X_n \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Supongamos que el costo de reemplazamiento del componente que falla es de  $\beta$  pesos y supongamos una tasa de interés de  $\alpha > 0$ , así que un peso gastado en un tiempo  $t$  traído a valor presente es  $e^{-\alpha t}$ . Si  $T_1, T_2, \dots$ , son los tiempos de las sucesivas fallas, entonces  $T_1 = X_1, T_2 = X_1 + X_2, \dots$ ; el tiempo de la  $n$ -ésima falla es  $T_n$ , y el valor presente del costo del reemplazamiento es  $\beta e^{-\alpha T_n}$ . Sumando sobre todas las  $n$ , obtenemos el valor presente del costo de todos los futuros reemplazamientos; esto es

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \beta e^{-\alpha T_n}$$

A nosotros nos interesa calcular el valor esperado de  $C$ , que es,

$$E[C] = \beta \sum_{n=1}^{\infty} E[e^{-\alpha T_n}]$$

calculemos la esperanza, por el teorema 1.8. sabemos que los tiempos entre llegadas, son independientes e idénticamente distribuidas.

$$\begin{aligned}
E\left[e^{-\alpha T_n}\right] &= E\left[e^{-\alpha T_1} e^{-\alpha(T_2-T_1)} \dots e^{-\alpha(T_n-T_{n-1})}\right] \\
&= E\left[e^{-\alpha T_1}\right] E\left[e^{-\alpha(T_2-T_1)}\right] \dots E\left[e^{-\alpha(T_n-T_{n-1})}\right] \\
&= E\left[e^{-\alpha T_1}\right]^n \\
&= \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \lambda e^{-\lambda t} dt\right]^n \\
&= \left[\int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\alpha)t} dt\right]^n
\end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\lambda}{\lambda+\alpha} \int_0^{\infty} e^{-u} du\right]^n \\
&= \left[\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right]^n
\end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned}
E[C] &= \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^n \\
&= \beta \frac{\lambda}{\lambda+\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^n \\
&= \beta \frac{\lambda}{\lambda+\alpha} \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}}\right) \\
&= \beta \frac{\lambda}{\lambda+\alpha} \left(\frac{1}{\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

$$= \beta \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \left( \frac{\lambda + \alpha}{\alpha} \right)$$

$$= \beta \frac{\lambda}{\alpha}$$