

## Guía I de Cálculo IV

### I- Elementos de Teoría de Campos:

1) Halle la magnitud y la dirección del gradiente del campo:

$$U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

en el punto  $A(2,1,1)$ .

Determine en qué puntos el gradiente del campo es perpendicular al eje  $OZ$  y en cuales es cero.

2) Determine las superficies de nivel del campo escalar:

$$u = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

3) Calcule el rotacional del campo de velocidades lineales de los puntos de un cuerpo que rota con velocidad angular  $\omega$  constante, alrededor del eje  $OZ$  en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj.

4) Calcule el rotacional del campo de velocidades lineales definido por:

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r}$$

donde  $\vec{\omega}$  es la velocidad angular constante.

5) Calcule la divergencia y el flujo de la fuerza de atracción:

$$\vec{F} = -\frac{m\vec{r}}{r^3}$$

de un punto de masa  $m$ , situado en el origen de coordenadas a través de una superficie arbitraria que lo rodea.

6) Con ayuda del teorema de Stokes, calcule la circulación del vector:

$$\vec{a} = x^2 y^3 \hat{i} + \hat{j} + z \hat{k}$$

a lo largo de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0.$$

tomando en calidad de superficie el hemisferio superior de la esfera, definido por:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

7) Demuestre, que si  $F$  es una fuerza central, es decir, que está dirigida a un punto fijo  $O$  y depende únicamente de la distancia a este punto,  $r$ :

$$\vec{F} = f(r)\vec{r}$$

donde  $f(r)$  es una función continua, el campo es potencial. Halle el potencial.

8) Halle el potencial del campo gravitatorio, que engendra un punto material de masa  $m$ , situado en el origen de coordenadas. Demuestre que este potencial satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta\varphi = 0$$

9) Comprobar si los campos vectoriales que se dan a continuación tienen potencial y si lo tienen hallarlo:

1.  $\vec{a} = (5x^2y - 4xy)\hat{i} + (3x^2 - 2y)\hat{j}$

2.  $\vec{a} = yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k}$

3.  $\vec{a} = (y + z)\hat{i} + (x + z)\hat{j} + (x + y)\hat{k}$

10) Demuestre, que el campo central:

$$\vec{F} = f(r)\vec{r}$$

será solenoidal sólo cuando:

$$f(r) = \frac{k}{r^3}$$

11) Determine el flujo del vector:

$$\vec{v} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$$

a través de la superficie definida por la parte del cono:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

para el cual  $1 \leq z \leq 2$ ,  $\hat{n} \cdot \hat{k} > 0$

12) En los siguientes casos se definen el vector, la superficie, o el volumen. Compruebe el teorema de la divergencia mediante el cálculo de las integrales triples y de superficies en cada caso:

a)  $\vec{v} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$  y la superficie S definida por los planos coordenados y el plano  $x + y + z = 1$ .

b)  $\vec{v} = 2x\hat{i} + 3y\hat{j} - 4z\hat{k}$  y el volumen V definido por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

c)  $\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  y la región definida por el exterior de  $x^2 + y^2 = 1$ , y el interior de  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

d)  $\vec{v} = r^{-3}(z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k})$  la región está definida por el exterior de  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y el interior de  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

e)  $\vec{v} = 2x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  la región definida por  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2x$ .

13) Calcula el flujo de los siguientes vectores usando el teorema de la divergencia:

a)  $\vec{v} = ye^z\hat{i} + (y - ze^x)\hat{j} + (xe^y - z)\hat{k}$  el dominio está definido por el interior del toro:

$$(r - b)^2 + z^2 \leq a^2, \quad 0 < a < b;$$

donde  $r$  y  $z$  son coordenadas cilíndricas.

b)  $\vec{v} = x^3\hat{i} + y^3\hat{j} + z\hat{k}$  la región está definida por  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$  y  $z = x + 2$ .

### Respuestas:

1)  $\text{grad } U(A) = (9, -3, -3)$ ;  $|\text{grad } U(A)| = 3(11)^{1/2}$ ;  $z^2 = xy$ ;  $x = y = z$ .

2) Conos

3)  $\text{rot } v = 2\omega$

4)  $2\omega$

5)

6)  $-\pi R^6/8$

7)  $u = \int_{r_0}^r rf(r)dr$

8)  $m/r$

9) a) No tiene, b)  $u = xyz + C$ , c)  $u = xy + xz + yz + C$ .

11)  $15\pi/2$ .

12) a)  $1/8$ , b)  $32\pi/3$ , c)  $12\pi^*(3)^{1/2}$ , d) 0, e)  $2\pi$ .

13) a) 0, b)  $5\pi$