

GUIA I.

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS CODIGO: MAT. 319

PROFESOR: Mauricio Herrera

Algunas definiciones y notaciones:

Definición 1: La parte derecha F del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se denomina campo vectorial.

$$\vec{X} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n); \vec{F} \equiv (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$
$$\dot{\vec{X}} = F(\vec{X});$$

El sistema de ecuaciones así representado se denomina sistema dinámico autónomo, las soluciones de este sistema de ecuaciones representadas en el espacio de fases se denominan trayectorias de fases o flujos. Geométricamente el campo vectorial indica la dirección tangente en cada punto de las trayectorias de fases.

Definición 2: Los puntos estacionarios del sistema dinámico son aquellos puntos donde el campo vectorial se anula $F(X_0) = F(x_0, \dots, x_0) = 0$. Son los puntos donde las derivadas temporales $dX/dt = 0$ y por tanto no evolucionan permanecen estacionarios.

Definición 3: El punto estacionario se denomina fuente si todas las trayectorias de fases salen de este punto y desagüe cuando todas las trayectorias convergen a él.

Para clasificar los puntos estacionarios se utiliza el Jacobiano $DF(X_0)$ del campo vectorial evaluado en dicho punto:

$$\left. \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{X}} \right|_{\vec{X}_0} \equiv DF(\vec{X}_0)$$

Definición 4: Un punto estacionario X_0 se denomina hiperbólico si $DF(X_0)$ no posee valores propios nulos o imaginarios puros.

Definición 5: Dado el sistema dinámico lineal no autónomo (dependiente del tiempo) de la forma

$$\dot{\vec{X}} = A(t)\vec{X} \quad (1)$$

Donde $A(t)$ es una matriz $n \times n$ y $\vec{X}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se define la matriz fundamental de soluciones $\Phi(t)$ como la matriz cuyas columnas son n soluciones linealmente independientes del sistema anterior:

$$\Phi(t) = (X^{(1)} X^{(2)} \dots X^{(n)})$$

Esta matriz satisface la ecuación:

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi \quad (2)$$

Todas las soluciones del sistema dinámico se pueden expresar como combinación lineal de las n soluciones que forman la matriz fundamental de soluciones:

$$\bar{X} = \Phi(t)\bar{X}_0$$

El determinante de la matriz fundamental de soluciones es el Wronskiano:

$$W(t) = W(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}) \equiv \det(\Phi(t))$$

El Wronskiano evoluciona temporalmente según la fórmula de Ostrogradski- Liouville:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}A(s)ds} \quad (3)$$

Geoméricamente el Wronskiano representa el volumen de fase de un paralelepípedo n dimensional subtendido por los vectores solución del sistema dinámico.

En general para sistemas dinámicos más generales de la forma:

$$\dot{\bar{X}} = F(\bar{X});$$

El volumen de fase evoluciona temporalmente en la vecindad de un punto estacionario X_0 en la forma:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{D_0} \text{div}(\bar{F})d\bar{X} \quad (4)$$

Donde $D(0) = D_0$ es cierta región del espacio de fases localizada en la vecindad del punto estacionario y $V(t) = \text{Volumen}(D(t))$

Definición 6: Los sistemas dinámicos se denominan conservativos si el volumen de fase se conserva, y dispersivos o no conservativos si el volumen de fase se contrae con el tiempo.

Supongamos ahora que tenemos el sistema:

$$\dot{\bar{X}} = A(t)\bar{X}$$

Con la condición de periodicidad: $A(t+T) = A(t)$, donde T es el periodo.

Los valores propios λ de la matriz $\Phi(T)$ se denominan multiplicadores de Floquet; estos se pueden escribir de la forma: $\lambda = \exp(\sigma T)$ donde σ se denomina índice de Floquet.

Supongamos que el sistema dinámico:

$$\dot{\bar{X}} = F(\bar{X});$$

Posee una órbita periódica $U(x,t)$ como solución es decir:

$$\dot{U} = F(U);$$

Con $U(t+T) = U(t)$. Podemos estudiar el comportamiento del sistema en la vecindad de la órbita periódica, usando para ello el sistema lineal periódico

$$\dot{\bar{v}} = DF(U(x,t))\bar{v} \equiv A(t)\bar{v} \quad (5)$$

Donde ν es una perturbación de la órbita periódica. El estudio del comportamiento de esta perturbación se realiza usando la matriz $\Phi(T)$. La perturbación en cada periodo se comporta según la relación:

$$\bar{\nu}(mT) = \Phi(nT)\bar{\nu}_0$$

Sí algunos de los multiplicadores de Floquet son mayores que 1 (algún índice de Floquet positivo) entonces la perturbación crece y la órbita es inestable.

Uno de los multiplicadores de Floquet siempre es 1, e indica una perturbación a lo largo de la órbita. En dos dimensiones ya que 1 siempre es valor propio de $\Phi(T)$ el otro multiplicador coincide con el wronskiano, por tanto se puede determinar usando la relación:

$$\lambda = W(t) = e^{\int_0^t \text{div}F(U(s))ds} \quad (6)$$

Donde hemos usado:
$$\text{div}F = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_U + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_U = \text{Tr}A(t)$$

El índice de Poincaré es un “invariante” que caracteriza las curvas cerradas (no necesariamente trajectorias) en el plano de fases. Puede usarse para determinar la existencia posible de órbitas periódicas. Consideramos el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$$

El campo vectorial $F = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ define un ángulo mediante la relación:

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} \right)$$

Definición 7: Sea Γ una curva simple cerrada en el plano, moviéndonos a lo largo de esta curva cerrada ψ cambia continuamente, así cuando regresamos al punto de partida el valor de ψ ha cambiado en un múltiplo de 2π . Este múltiplo que puede ser negativo o positivo se denomina índice de Poincaré:

$$I_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma d\psi = \int_\Gamma d \left(\tan^{-1} \left(\frac{f_2}{f_1} \right) \right) = \int_\Gamma \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}$$

Donde: $df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} dx + \frac{\partial f_i}{\partial y} dy$

Lema 1:

- Si Γ' es una curva cerrada obtenida de Γ mediante una deformación continua entonces $I_{\Gamma'} = I_\Gamma$.
- El índice de una órbita periódica es +1.
- El índice de un nodo, foco, o centro es +1.
- El índice de un punto de ensilladura es -1.

- El índice es aditivo, si $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$ entonces: $I_{\Gamma_3} = I_{\Gamma_1} + I_{\Gamma_2}$.
- El índice de una curva cerrada es la suma de los índices de los puntos estacionarios contenidos dentro de ella.
- El índice de una curva cerrada que no contiene puntos estacionarios es cero.
- El índice de una curva no cambia si reemplazamos $(f_1(x,y), f_2(x,y))$ por $(-f_1(x,y), -f_2(x,y))$

El corolario de la pregunta (7), permite establecer un instrumento útil para detectar posibles órbitas periódicas en sistemas dinámicos. Otro criterio importante es el llamado “Criterio de Dulac”. Este criterio se basa en el teorema de la divergencia: Si Γ es una curva cerrada con vector normal \mathbf{n} que apunta hacia fuera y que encierra una región R , $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable entonces:

El criterio de Dulac es:

Lema 2: Si existe una función continuamente diferenciable $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla(g\mathbf{F})$ es continua y no nula en una región simplemente conexa D , entonces no hay órbitas periódicas que estén enteramente contenidas en D .

Definición 8: Una función $E: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina constante de movimiento si:

$$\frac{dE(x_1, \dots, x_n, t)}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_i} f_i = 0$$

En pocas palabras E es constante de movimiento si su derivada total con respecto al tiempo es nula. Es decir mantiene un valor constante a lo largo de las trayectorias de fase o flujo.

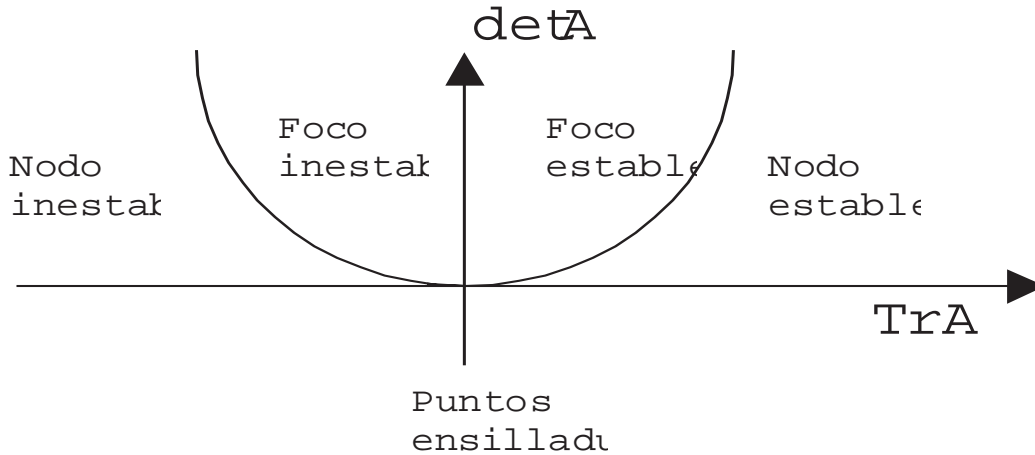
Preguntas:

1) Dado el sistema dinámico definido por:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \Rightarrow \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- a) Encuentre todas las posibles matrices A que den como resultados comportamientos cualitativamente diferentes en el plano de fase.
- b) Clasifique los comportamientos de acuerdo con: puntos de ensilladura, nodos, centros, focos etc. Y relaciónelos con los valores propios de la matriz A .
- c) Calcule la traza en cada caso y determine usando la formula de Ostrogradski-Liouville como se comporta el Wronskiano.

2) Verifique la veracidad del siguiente gráfico:



3) Muestre que la matriz fundamental de soluciones $\Phi(t)$ del sistema (1) con la condición periódica $A(t+T) = A(t)$ satisface las siguientes relaciones:

$$a) \Phi(t+T) = \Phi(T)\Phi(t)$$

$$b) \Phi(mT) = \Phi^m(T)$$

4) Muestre usando las relaciones (1) y (2) que el Wronskiano satisface la ecuación:

$$\frac{dW}{dt} = \text{Tr}A \cdot W$$

Nota: Esta relación se cumple para toda dimensión, sin embargo es suficiente probarla en dos dimensiones.

a) Usando la relación anterior obtenga la fórmula de Ostrogradski-Liouville.

5) Dada una órbita periódica $U(x,t)$ muestre que:

$$\dot{U}(0) = \Phi(T)\dot{U}(0)$$

Lo que implica que uno de los valores propios de la matriz $\Phi(T)$ es $\lambda = 1$.

a) Calcule usando (6) que la órbita periódica del siguiente sistema es estable:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

6) En mecánica cuántica es fundamental el estudio de la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

Donde m es la masa de la partícula, E es la energía total, \hbar es la constante de Planck y $V(x)$ es el potencial. Introduciendo las magnitudes:

$$\lambda = k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad u(x) = \frac{2mV(x)}{\hbar^2}, \quad y = -\psi.$$

Esta ecuación toma la forma:

$$y'' = [\lambda + u(x)]y$$

a) Demuestre que el Wronskiano de esta ecuación es constante.
Demuestre que la solución general cuando $u(x) = 0$ es.

$$y = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

a) Para obtener una solución particular $y_1 = \cosh(x)$ tome $\lambda = 1, A = B = 1/2$. Muestre que:

$$z = y' - y \left(\frac{y_1'}{y_1} \right)$$

es solución general de la ecuación:

$$z'' = [\lambda - 2\operatorname{sech}^2 x]z$$

d) Demuestre que $y = \cosh^{(n+1)}(x)$ es una solución particular de la ecuación:

$$y'' = [\lambda + n(n+1)\operatorname{sech}^2 x]y$$

para $\lambda = (n + 1)^2$

7) Usando el lema 1 demuestre el siguiente corolario:

Sí Γ es una órbita periódica entonces debe encerrar al menos un punto estacionario. Sí los puntos estacionarios son hiperbólicos, entonces Γ encierra $2n + 1$ puntos estacionarios (para algún n mayor o igual a cero), n de los cuales son ensilladuras y el resto son fuentes o desagües.

8) Demuestre el lema 2.

Consideremos el siguiente modelo de Lotka – Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - a_1x + b_1y) \\ \dot{y} = y(B - a_2y + b_2x) \end{cases}$$

Donde $a_i > 0$. Demuestre usando el criterio de Dulac que no existen órbitas periódicas en el primer cuadrante. (Sugerencia: Tome la función $g = (xy)^{-1}$)

9) Consideremos ahora el sistema anterior con $a_i = 0$ y $b_i > 0$.

- a) Encuentre los puntos singulares y clasifíquelos.
- b) Resuelva el sistema de ecuaciones dividiendo una ecuación por otra, obteniendo una sola ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(B - b_2x)}{x(-A + b_1y)}$$

Separe las variables e integre. Demuestre que:

$$E(x, y) = -A \log y + b_1 y - B \log x + b_2 x$$

es una constante de movimiento

10) Use coordenadas polares para hacer un bosquejo de las trayectorias de fase del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x^2 y + y^3 \\ \dot{y} = y^2 + x^3 - xy^2 \end{cases}$$

11) Localiza los puntos estacionarios del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - y - x) \\ \dot{y} = y(4x - x^2 - 3) \end{cases} \quad x, y \geq 0$$

Usando $g = (xy)^{-1}$ en el criterio de Dulac muestre que este sistema no posee órbitas periódicas