

UNIVERSIDADE CATÓLICA DO SALVADOR
CURSO: INFORMÁTICA **DISCIPLINA: CÁLCULO II**
PROFESSOR: ATAUALPA MAGNO FERRAZ DE NOVAES
PRIMEIRO SEMESTRE DE 2006

Prezados Alunos, sejam bem-vindos ao nosso curso de Cálculo II

Um agradecimento muito especial à Professora Sirlane Barreto e ao Professor Eron, pelo incentivo e constante auxílio que eles me prestaram. Muito do que se encontra aqui, devo agradecer às anotações deles.

Outro agradecimento especial aos meus ex-alunos (e amigos), Leonardo Leandro (Webmaster), Dionei Mascarenhas e Caio Moreira por disponibilizarem este material na Internet.

Quero registrar também minha admiração, respeito e especial carinho à Professora Eliana Prates do Instituto de Matemática da UFBA cujas notas de aula me inspiraram a redigir este trabalho, ao Prof. Antônio Andrade Souza da UCSal e ao meu orientador o Dr. José Nelson Bastos Barbosa.

Desde que desejamos aprimorar este trabalho, sugestões e críticas serão bem vindas.

Email: amferraznovaes@ig.com.br ou ataualpa@im.ufba.br.

Telefones: 3353-4784 ou 9179-1925

REVISÃO DE TRIGONOMETRIA

1. PRINCIPAIS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (**relação fundamental, fique ligado nela!**)

b) $\tan x = \sin x / \cos x$

c) $\cotg x = \cos x / \sin x = 1 / \tan x$

d) $\sec x = 1 / \cos x$

e) $\operatorname{cosec} x = 1 / \sin x$

f) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

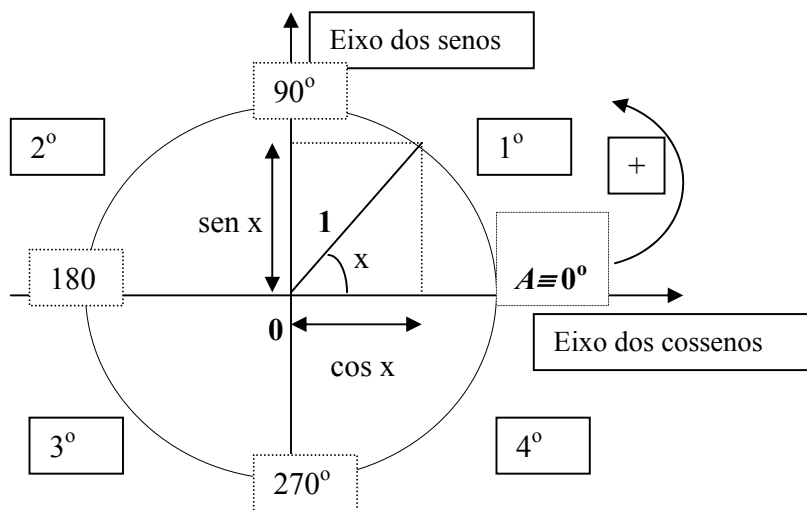
g) $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cotg^2 x$

h) $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

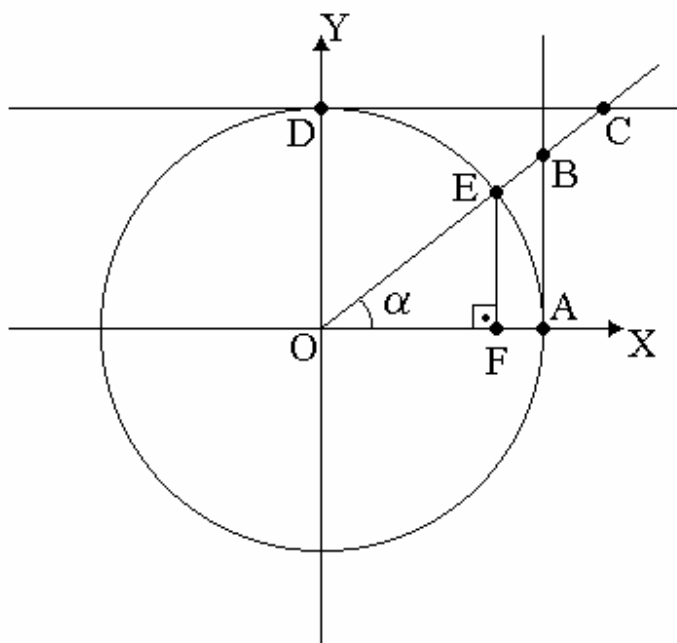
i) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. SINAIS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS:

A circunferência abaixo chama-se circunferência trigonométrica, tem raio = 1, centro coincidente com a origem do sistema cartesiano ortogonal e é o palco para a apresentação das funções trigonométricas. O seno é medido no eixo vertical e o cosseno é medido no eixo horizontal. Os arcos (com seus ângulos centrais correspondentes) são medidos a partir do ponto A e **têm como sentido positivo**, o sentido **anti-horário**.



	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
SEN X	+	+	-	-
COS X	+	-	-	+
TG X	+	-	+	-
COTG X	+	-	+	-
SEC X	+	-	-	+
COSSEC X	+	+	-	-



$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \overline{EF} \\ \cos \alpha &= \overline{OF} \\ \text{tg } \alpha &= \overline{AB} \\ \text{cotg } \alpha &= \overline{DC} \\ \sec \alpha &= \overline{OB} \\ \text{cosec } \alpha &= \overline{OC} \\ \overline{OE} &= R = 1 \end{aligned}$$

Pelo gráfico acima, podemos concluir que:

	0°	90°	180°	270°	360°
SENO	0	1	0	-1	0
COSSENO	1	0	-1	0	1

TABELA DE DERIVADAS (CÁLCULO I)

No que segue abaixo, ***a*** representa uma constante, e ***u*** e ***v*** são funções de ***x***.

$$1) \quad y = a \Rightarrow y' = 0$$

$$2) \quad y = ax \Rightarrow y' = a$$

$$3) \quad y = a.u \Rightarrow y' = a.u'$$

$$4) \quad y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$$

$$5) \quad y = u.v \Rightarrow y' = (u.v') + (v.u')$$

$$6) \quad y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{(v.u') - (u.v')}{v^2}$$

$$7) \quad y = u^a, (a \neq 0) \Rightarrow y' = a.(u^{a-1}).u'$$

$$8) \quad y = a^u (a \geq 0, a \neq 1) \Rightarrow y' = a^u . \ln a \times u'$$

$$9) \quad y = e^u \Rightarrow y' = e^u . u'$$

$$10) \quad y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$11) \quad y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u \times u'$$

$$12) \quad y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \times u'$$

$$13) \quad y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = \sec^2 u \times u'$$

$$14) \quad y = \operatorname{cotg} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec}^2 u \times u'$$

$$15) y = \sec u \Rightarrow y' = (\sec u) \times (\operatorname{tg} u) \times u'$$

$$16) y = \operatorname{cosec} u \Rightarrow y' = -(\operatorname{cosec} u) \times (\cotg u) \times u'$$

$$17) y = \operatorname{arcsen} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$18) y = \arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$19) y = \operatorname{arctg} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DE DERIVADAS

1ª) Derive as funções abaixo

$$a) y = 2x^4 - 3x^2 + x - 3$$

$$b) x = \frac{2(2z-1)}{\sqrt{3}}$$

$$c) w = \frac{3}{4y} + 2y \left(\sqrt[3]{y^2} \right) + \frac{3}{\sqrt{y}}$$

$$d) u = \frac{t+5}{t-7}$$

$$e) y = \frac{-5}{6x^3-1} + x^3 \cdot \ln \sqrt{\pi}$$

$$f) y = x^{2/3} (2x^{1/3} - 1)$$

$$g) g(x) = \frac{5}{x^2} - 2\sqrt{x} - \sqrt{3} \cdot x^5$$

$$h) (-2/5) \operatorname{sen} x + 9 \operatorname{sec} x = y$$

$$i) y = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$j) g(t) = \frac{\operatorname{tg} t - 1}{\sec t}$$

$$l) g(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

$$m) y = [\operatorname{sen}^2 x + \cos(3x)]^3$$

$$n) h(t) = \frac{e^{-2t}}{3t-1}$$

$$o) f(x) = \operatorname{arctg}(2x+1)$$

$$p) f(x) = 1 - \operatorname{arcsen}(2x^3)$$

2ª) Uma partícula possui equação de posição $x(t) = 3 \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$ (em metros), onde $t \in [0, \pi[$ (em segundos). Determine:

a) o instante em que a partícula atinge altura máxima (velocidade nula);

b) a aceleração da partícula, decorridos $\frac{\pi}{2}$ segundos.

3ª) Calcule a derivada de cada função abaixo (onde a é uma constante $\neq 0$). (Os resultados abaixo são de extrema importância para o estudo posterior da Integral indefinida):

a) $y = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$.

b) $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$.

4ª) Seja $s(t) = t^3 - 6t^2 + 1$, a função posição de um móvel em cada instante t . Determine:

a) posição e velocidade quando a aceleração é nula;

b) posição e aceleração quando a velocidade é nula.

5ª) Resolva os problemas a seguir:

a) A equação do movimento de uma partícula é $s(t) = \sqrt[3]{t+2}$, s em metros, t em segundos.

Determinar:

- a.1) o instante em que a velocidade é de $1/12$ m/s;
- a.2) a distância percorrida até esse instante;
- a.3) a aceleração da partícula quando $t = 2$ seg.

b) Em economia a taxa de variação instantânea (derivada) do custo total de produção em relação ao número de unidades produzidas denomina-se **custo marginal**. Frequentemente, é uma boa aproximação do custo de produção de uma unidade adicional.

Sendo $C(q)$ o custo total de produção de q unidades, então, o custo marginal é igual a $C'(q)$, que é aproximadamente o custo de produção de uma unidade adicional, ou seja,

$C'(q) \approx$ custo de produção da $(q+1)$ -ésima unidade.

Sendo assim, suponha que o custo total para se fabricar q unidades de um certo produto seja de

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 10$$

b.1) deduza a fórmula do custo marginal

b.2) estime o custo de produção da 51ª unidade empregando aproximação fornecida pelo custo marginal.

b.3) calcule o custo real de produção da 51ª unidade.

c) Certo estudo ambiental em uma comunidade suburbana indicou que o nível médio diário de **CO** no ar será de $C(p) = \sqrt{0,5p^2 + 17}$ partes por milhão quando a população for de **p** milhares de habitantes. Calcula-se que daqui a **t** anos a população será de $p(t) = 3,1 + 0,1t^2$ milhares de habitantes. Qual será a taxa de variação (derivada) em relação ao tempo do **CO** daqui a três anos?

GABARITO

$$1^a) \text{ a) } y' = 8x^3 - 9x + 1 \quad \text{b) } y' = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \text{c) } w' = \frac{-3}{4y^2} + \frac{10 \cdot y^{\frac{2}{3}}}{3} - \frac{3}{2 \cdot y^{\frac{3}{2}}} \quad \text{d) } u' = \frac{-12}{(t-7)^2}$$

$$\text{e) } y' = \frac{-90x^2}{(6x^3 - 1)^2} + 3x^2 \cdot \ln \sqrt{\pi} \quad \text{f) } y' = 2 - \frac{2}{3x^{1/3}} \quad \text{g) } g'(x) = \frac{-10}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 5\sqrt{3} \cdot x^4$$

$$\text{h) } y' = (-2/5) \cos x + 9 \sec x \cdot \tan x \quad \text{i) } y' = x \cdot \cos x \quad \text{j) } g'(t) = \cos t + \sin t$$

$$\text{l) } g(x) = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2} \quad \text{m) } y = 3 \cdot [\sin^2 x + \cos(3x)]^2 \cdot [2 \sin x \cos x - 3 \sin 3x]$$

$$\text{n) } h'(t) = \frac{-6te^{-2t} + e^{-2t}}{(3t-1)^2} \quad \text{o) } f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} \quad \text{p) } f'(x) = 1 - \frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}$$

$$2^a) \text{ a) } t = \frac{\pi}{8} \text{ segundos} \quad \text{b) } \text{aceleração} = 6\sqrt{2} \text{ metros por segundo ao quadrado}$$

$$3^a) \text{ a) } y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \quad \text{b) } y' = \frac{1}{x^2 - a^2}$$

$$4^a) \text{ a) } \begin{cases} s(2) = -15 \\ v(2) = -12 \end{cases} \quad \text{b) } \text{Para } t = 0, \text{ temos } \begin{cases} s(0) = 1 \\ a(0) = -12 \end{cases} \quad \text{e } \text{Para } t = 4, \text{ temos } \begin{cases} s(4) = -31 \\ v(4) = 12 \end{cases}$$

$$5^a) \text{ a) } \text{a.1) } t = 6 \text{ segundos} \quad \text{a.2) } \text{distância} = (2 - \sqrt[3]{2}) \text{ metros} \quad \text{a.3) } a(2) = \frac{-1}{18 \cdot \sqrt[3]{4}} \text{ m/s}^2$$

$$\text{b) b.1) } C'(q) = 6q + 5 \quad \text{b.2) } C'(50) = 305 \quad \text{b.3) } C(51) - C(50) = 308$$

$$\text{c) } 0,24$$

TEXTO DO PROFESSOR ERON, MESTRE EM MATEMÁTICA E PROFESSOR DE VÁRIAS FACULDADES.

A INTEGRAL

INTRODUÇÃO

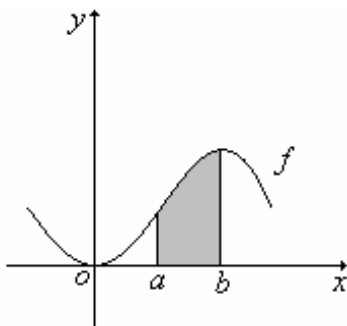
Os dois problemas fundamentais do cálculo – o cálculo da *reta tangente* e o cálculo de *áreas* – dividem esta matéria em duas partes: O Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Veremos como estes dois problemas estão intimamente relacionados.

As idéias básicas do Cálculo Integral têm origem bem remota e começaram com o problema de calcular a área de uma figura plana ou o volume de um sólido. Estas foram questões centrais da matemática na Grécia antiga desde cerca de 4 séculos A.C. Arquimedes (287 – 212 A.C.) se ocupou intensamente com estes problemas calculando áreas e volume de diversas figuras geométricas. O procedimento usado nesses cálculos empregava o chamado “método da exaustão” que consistia em “exaurir” ou “esgotar” a figura dada por meio de outras áreas e volumes conhecidos. Este método é atribuído a Eudoxo (406-355 A.C.) que foi quem primeiro deu uma prova satisfatória de que o volume de um cone é um terço do volume de um cilindro de mesma base e altura. O método da exaustão foi desenvolvido e aperfeiçoado por Arquimedes que é considerado, juntamente com Newton e Gauss, como um dos três grandes matemáticos da história e certamente é o maior matemático da antiguidade. Arquimedes usou técnicas para encontrar áreas de regiões limitadas por parábolas, espirais e várias outras curvas.

O PROBLEMA DA ÁREA

As fórmulas para as áreas das figuras geométricas básicas, como retângulos, polígonos e círculos, datam dos primeiros registros sobre matemática.

Vamos considerar o problema de encontrar a área da região **limitada** pelo gráfico de uma função $y = f(x)$, contínua, não negativa, num intervalo $[a,b]$, o eixo OX e as retas verticais $x = a$ e $x = b$ (veja a figura abaixo).



Vamos usar o método dos retângulos para calcular a área dessa região. O método consiste em dividir o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos iguais e em cada subintervalo construir um retângulo que

se estende desde o eixo OX até algum ponto sobre a curva $y = f(x)$. O retângulo tem base igual ao comprimento do subintervalo e altura igual a $f(\varepsilon)$ sendo ε um ponto qualquer do subintervalo (em geral é tomado como uma das extremidades do subintervalo ou o ponto médio).

Para cada subintervalo S_i consideremos a base como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(\varepsilon_i)$, onde $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

A área total dos retângulos, que escrevemos $\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$, pode ser vista como uma *aproximação* da

área da figura sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Fica intuitivamente evidente que quando n cresce essas aproximações vão ficando cada vez melhores e tendem à *área exata*, como um limite.

Assim, a área da região corresponde a $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i \right)$.

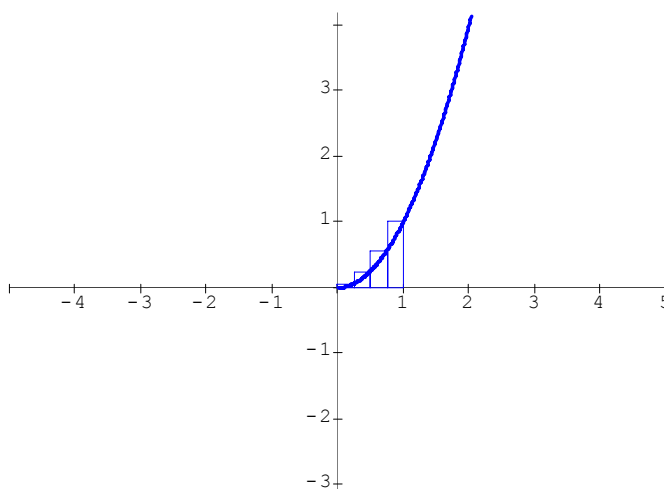
EXEMPLO: Vamos calcular a área da região limitada pela curva $y = x^2$ no intervalo $[0, 1]$.

Dividindo o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos, cada subintervalo tem comprimento $1/n$ e os extremos dos subintervalos ocorrem em $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Vamos construir retângulos em cada um desses intervalos cuja altura pode ser o valor da função em qualquer ponto do intervalo. Vamos escolher, nesse caso, os extremos direitos. Assim, as alturas dos retângulos serão $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, 1$. Uma vez que cada intervalo tem comprimento $1/n$, a área total dos intervalos será

$$A(n) = \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 1 \right) \frac{1}{n}.$$

Por exemplo, se $n = 4$ a área total dos quatros subintervalos será

$$A(4) = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 \right) \frac{1}{4} = \frac{15}{32} = 0,46875.$$

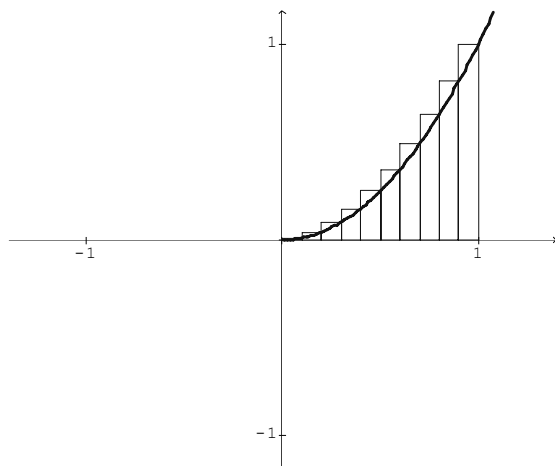


Vejamos os resultados para alguns valores crescentes de n :

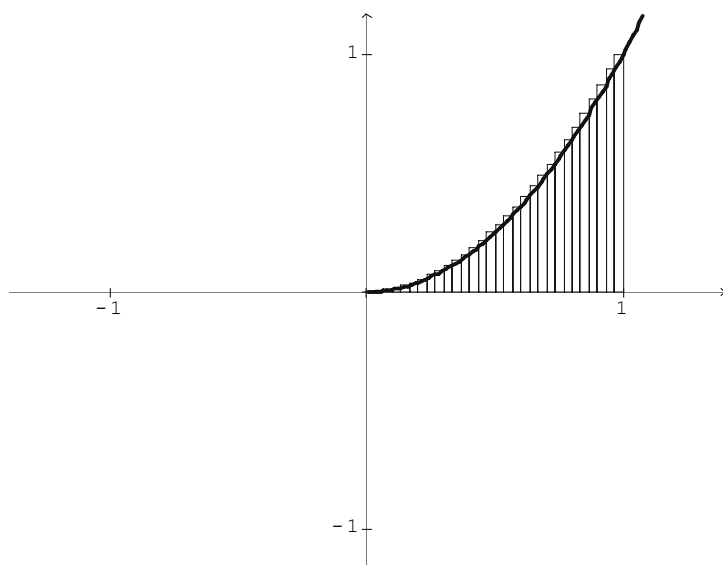
n	4	10	100	1000	10000	100000
$A(n)$	0,46875	0,38500	0,338350	0,333834	0,333383	0,333338

Vejamos alguns exemplos de divisões feitas no intervalo $[0,1]$ (Gráficos construídos no **Winplot**)

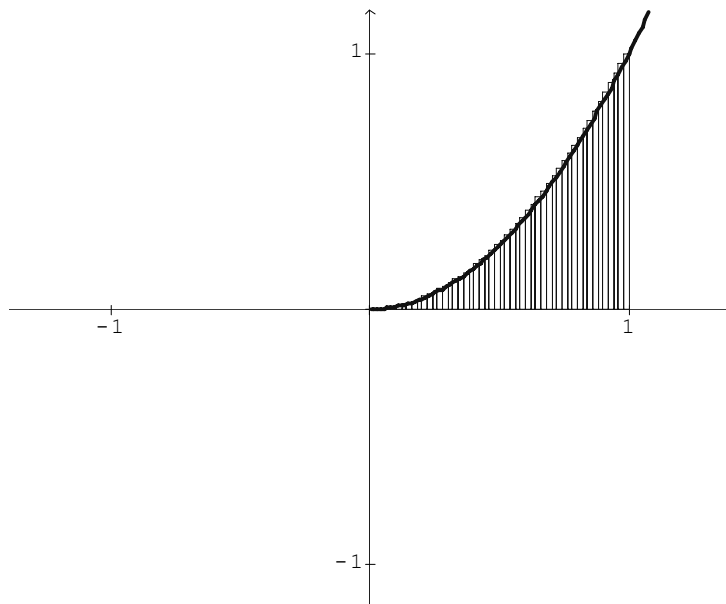
10 subintervalos:



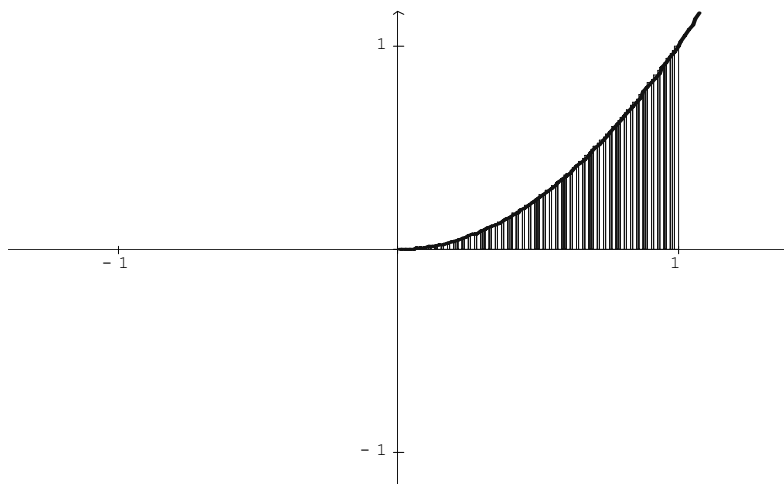
30 subintervalos:



50 subintervalos:



100 subintervalos:



Na maioria das vezes o limite que expressa a área tem cálculo difícil e trabalhoso. Existe um outro método para o cálculo dessa área que tem conexão com a diferenciação (ou derivação).

Para o exemplo visto, consideremos a função $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Calculando a diferença dos valores dessa função nos extremos do intervalo considerado, ou seja, $F(1) - F(0)$, obtemos $1/3 = 0,33333...$ que foi a aproximação obtida para a área.

O que tem essa função de especial e qual a ligação dela com a função $y = x^2$?

Observamos que derivando $F(x)$ obtemos $f(x)$, ou seja, $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$!!!

OS GÊNIOS NEWTON E LEIBNITZ

Historicamente os conceitos básicos da integral foram usados pelos gregos muito tempo antes do cálculo diferencial ter sido descoberto. No século XVII, vários matemáticos descobriram como obter áreas mais facilmente usando limites. O maior avanço em relação a um método geral para o cálculo da área foi feito independentemente por Newton e Leibnitz, os quais descobriram que as áreas poderiam ser obtidas revertendo o processo da derivação. Esta descoberta vista como o começo do Cálculo, foi veiculada por Newton em 1679 e publicada em 1711 num artigo intitulado “Sobre a Análise Através de Equações com Infinitos Termos”; e foi descoberto por Leibnitz em cerca de 1673 e declarado num manuscrito não publicado datado de 11 de novembro de 1675.

O limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i \right)$ irá receber uma notação especial $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i \right) = \int_a^b f(x) dx$ e será chamado de **integral definida**.

O que Newton e Leibnitz mostraram foi que $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ onde $F(x)$ é uma função tal que $F'(x) = f(x)$. Este é um dos resultados mais importantes do Cálculo conhecido como **Teorema Fundamental do Cálculo** ou **Fórmula de Newton - Leibnitz**.

A nossa questão agora será aprender métodos para encontrar a função $F(x)$, ou seja, dada uma função $f(x)$, encontrar a função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Este processo é chamado de **antidiferenciação**.

A Integral Indefinida

Para cada uma das funções $f(x)$ dadas a seguir tente encontrar uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

- | | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|
| a) $f(x) = x$ | b) $f(x) = 3x^2$ | c) $f(x) = 1$ | d) $f(x) = e^{2x}$ |
| e) $f(x) = \cos(2x)$ | f) $f(x) = \sin(3x)$ | g) $f(x) = \sec^2(x)$ | h) $f(x) = 2/x$ |

Definição: Uma função $F(x)$ é chamada de uma **antiderivada** ou uma **primitiva** de uma função $f(x)$ em um dado intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x no intervalo.

EXEMPLOS:

- $F(x) = x^4/4$ é uma primitiva de $f(x) = x^3$.
- $F(x) = x^4/4 + 1$ uma primitiva de $f(x) = x^3$.
- $F(x) = e^x$ é uma primitiva de $f(x) = e^x$.
- $F(x) = e^x + 2$ é uma primitiva de $f(x) = e^x$.

Os exemplos anteriores nos mostram que a antiderivada de uma função não é única!!

Temos os seguintes resultados

- Se $F(x)$ for qualquer primitiva de $f(x)$ num intervalo I , então para qualquer constante C , a função $F(x) + C$ é também uma primitiva de $f(x)$ naquele intervalo. Além disso, cada primitiva de $f(x)$ pode ser escrita na forma $F(x) + C$, escolhendo-se apropriadamente a constante C .
- Como consequência temos que duas primitivas de uma função diferem apenas de uma constante.
- A cada primitiva está associada uma família de primitivas.

A integração ou antidiferenciação é o processo pelo qual a primitiva mais geral de uma função é encontrada.

Se $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$, então integrando-se ou antidiferenciando-se $f(x)$, obtém-se as antiderivadas $F(x) + C$.

Denotamos isso escrevendo $\int f(x)dx = F(x) + C$ e temos a equivalência

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$$

- O símbolo $\int$ é chamado de **sinal de integração** ou uma **integral indefinida**.
- A função $f(x)$ é chamada de **integrando (ou função integranda)**.
- A constante C é chamada de **constante de integração**.
- O símbolo dx nas operações de diferenciação e antidiferenciação servem para identificar a variável independente.
- O adjetivo indefinida estabelece que não se encontra uma função *definida* quando se integra mas um conjunto (família) de funções.
- Esta notação para a integral foi dada por Leibnitz em 1675.

EXEMPLOS

$$1. \frac{d}{dx}(x) = 1 \Leftrightarrow \int dx = x + C.$$

$$2. \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x \Leftrightarrow \int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$3. \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 \Leftrightarrow \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

$$4. \text{Generalizando: } \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n \Leftrightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

$$5. \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \Leftrightarrow \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6. \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \Leftrightarrow \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

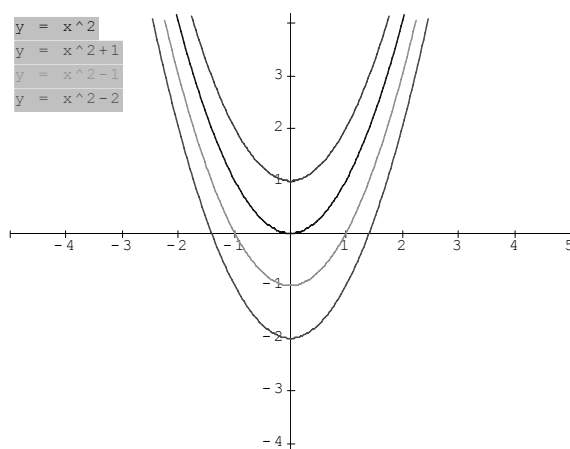
$$7. \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \Leftrightarrow \int e^x dx = e^x + C.$$

Observação: Através do conhecimento das derivadas das funções podemos obter as expressões de suas integrais indefinidas que podem ser catalogadas numa tabela onde os resultados podem ser checados mediante a derivação do 2º membro. (**Consulte um livro de Cálculo e obtenha uma tabela de integrais ou veja a página 17**).

Geometricamente, a integral indefinida é um conjunto ou família de curvas que se obtém pelo deslocamento de uma primitiva qualquer sobre o eixo OY.

Por exemplo, para $f(x) = 2x$ a família de primitivas $\int 2x dx = x^2 + C$ é uma família de parábolas com eixo de simetria em OY.

Vejam alguns exemplos para $C = , -2, -1, 0, 1$.



- Uma pergunta que surge naturalmente é: Toda função tem primitiva e consequentemente integral indefinida? A resposta a esta questão é negativa.
- Mas toda função *contínua* em $[a,b]$ tem integral indefinida em $[a,b]$.
- Vale observar que ainda que a derivada de uma função elementar é uma função elementar, a primitiva de uma função elementar pode não se expressar como um número *finito* de funções elementares, como, por exemplo, as integrais $\int e^{-x^2/2} dx$; $\int \frac{\sin x}{x} dx$ (Existem outros exemplos que serão vistos em cursos mais avançados).

Propriedades da Integral Indefinida

Suponhamos que $\int f(x)dx = F(x) + C$. Temos as seguintes propriedades:

P₁: A derivada de uma integral indefinida é igual ao integrando.

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Observe que o resultado vem da própria definição de integral indefinida.

Exemplos:

$$1. \int x dx = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2} + C \right)' = x.$$

$$2. \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + C \Rightarrow \left(\frac{e^{3x}}{3} + C \right)' = e^{3x}.$$

$$3. \int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} + C \Rightarrow \left(\frac{\sin 2x}{2} + C \right)' = \cos 2x.$$

P₂: A integral indefinida da soma de duas ou mais funções é igual à soma de suas integrais:

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx. \quad \text{Ex: } \int x + \sin(x) dx = \int x dx + \int \sin(x) dx = \frac{x^2}{2} - \cos(x) + C.$$

P₃: A integral indefinida do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela integral da função:

$$\int Kf(x) dx = K \int f(x) dx \quad (K \in \mathbb{R}). \quad \text{Ex: } \int 5 \sec^2(x) dx = 5 \int \sec^2(x) dx = 5 \tan(x) + C.$$

EXEMPLOS:

$$1) \int (2x^2 + 1) dx = \frac{2x^3}{3} + x + C.$$

$$2) \int (e^{3x} + 2x) dx = \frac{e^{3x}}{3} + x^2 + C.$$

$$3) \int (x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C.$$

Observação: Quando integramos uma função multiplicada por uma constante ou uma soma de funções englobamos as constantes de integração em uma **única** constante C.

RESOLVA...

$$4. \int x(1 + x^3) dx$$

$$5. \int x^{1/3} (2 - x)^2 dx$$

$$6. \int \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4} dx$$

$$7. \int (1 + \sqrt{t}) dt$$

$$8. \int \left(\frac{2}{x} + e^x \right) dx$$

$$9. \int (4 \cos x + \sec^2 x) dx$$

$$10. \int \sec x (\sec x + \operatorname{tg} x) dx$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x}$$

$$12. \int \sin(x+2) dx$$

$$13. \int \cos(x^2 + 1) 2x dx$$

ATENÇÃO: A integral indefinida do produto de duas funções **não** é igual ao produto das integrais indefinidas de cada função:

$$\int f(x) \cdot g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx. \quad \textbf{Exemplo:} \int x^2 \cdot x^3 dx \neq \int x^2 dx \cdot \int x^3 dx. \quad (\text{verifique!!!})$$

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Nem sempre podemos identificar diretamente e imediatamente uma integral que se quer determinar com alguma da tabela. Entretanto, em muitas delas, uma simples *mudança de variável* nos leva ao resultado desejado. Este método é chamado de **substituição** e tem como motivação a *regra da cadeia* do ponto de vista da antidiferenciação.

Consideremos o exemplo 13 anterior $\int \cos(x^2 + 1) 2x dx$. Observemos que fazendo $u = x^2 + 1$, a diferencial é $du = 2x dx$. Assim, a integral pode ser rescrita como $\int \cos u du = \sin u + C$ e voltando à variável x original temos que $\int \cos(x^2 + 1) 2x dx = \sin(x^2 + 1) + C$.

De uma maneira geral, se temos a integral na forma $\int f(g(x)) g'(x) dx$ e se F é uma primitiva de f , temos que $\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C$.

Isto corresponde a fazer $u = g(x)$; $du = g'(x) dx$ e portanto integrar $\int f(u) du$.

EXEMPLOS:

1. $\int (x+1)^{10} dx$ (Faça $u = x + 1$)

Nos exemplos, 2, 3 e 4 faça $u = x^2 + 1$.

2. $\int (x^2 + 1)^{10} 2x dx$.

3. $\int e^{x^2 + 1} 2x dx$.

4. $\int \cos(x^2 + 1) 2x dx$.

5. $\int e^{2x} dx$. (Faça $u = 2x$).

6. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. (Faça $u = \sqrt{x}$).

7. $\int t^4 \sqrt[3]{3 - 5t^5} dt$. (Faça $u = 3 - 5t^5$).

8. $\int x e^{x^2} dx$. (Faça $u = x^2$).

9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2 + x^3}}$. (Faça $u = 2 + x^3$).

Prezados alunos, existem outras técnicas de integração, que estudaremos mais adiante, pois infelizmente, nem todas as integrais podem ser resolvidas por substituição direta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- O Cálculo - Novos Horizontes – Anton (vol 1).
- Cálculo A – Diva Fleming.
- Cálculo com Geometria Analítica – Swokowski (vol 1).

TABELA DE ALGUMAS INTEGRAIS IMEDIATAS

1. $\int dx = x + C$	10. $\int \operatorname{cosec}(x)dx = \ln \operatorname{cosec}(x) - \cotg(x) + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	11. $\int \sec(x)dx = \ln \sec(x) + \tg(x) + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1).$	12. $\int \sec^2(x)dx = \tg(x) + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, (a > 0 \text{ e } a \neq 1).$	13. $\int \operatorname{cosec}^2(x)dx = -\cotg(x) + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	14. $\int \sec(x) \cdot \tg(x)dx = \sec(x) + C$
6. $\int \sen(x)dx = -\cos(x) + C$	15. $\int \operatorname{cosec}(x) \cdot \cotg(x)dx = -\operatorname{cosec}(x) + C$
7. $\int \cos(x)dx = \sen(x) + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sen\left(\frac{x}{a}\right) + C$
8. $\int \tg(x)dx = \ln \sec(x) + C$	17. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tg\left(\frac{x}{a}\right) + C$
9. $\int \cotg(x)dx = \ln \sen(x) + C$	18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Após este “show de bola” do Professor Eron, vamos ler algumas páginas que escrevi.

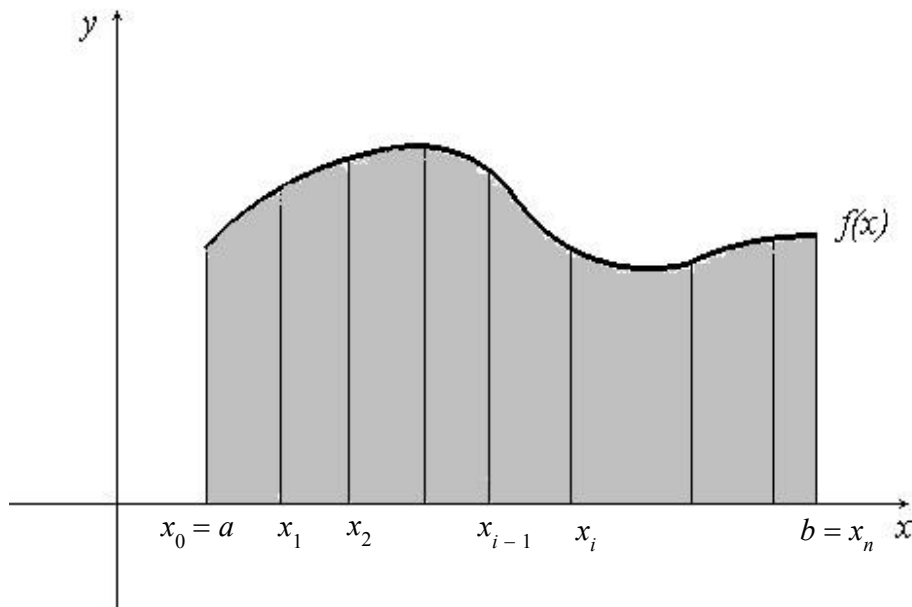
INTEGRAL DEFINIDA

UMA VISÃO INTUITIVA

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocuparam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

Um caso muito comentado é como se calculava a área do círculo (antes da fórmula πr^2). Consideremos um polígono regular de n lados, inscrito nesse círculo. Quando $n \rightarrow +\infty$ o polígono torna-se uma aproximação do círculo. Para calcular a área de uma figura plana (com certas restrições, isto é, para alguns tipos de figuras planas) procedemos de forma análoga.

Seja S a área de uma região plana, delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa f , pelo eixo Ox e pelas retas $x = a$ e $x = b$ (veja na figura abaixo a parte “listrada”).



Faremos uma partição do intervalo $[a, b]$, isto é, dividiremos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos.

Esta partição pode ser regular ou qualquer (ou seja, todos os subintervalos podem ter ou não o mesmo comprimento).

Escolhemos os pontos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < b = x_n$ e sejam:

Δx_i o comprimento do i -ésimo subintervalo e $\|\Delta x_i\|$ o comprimento do maior subintervalo.

Em cada um desses subintervalos tomamos um número c_i e construímos o retângulo de base Δx_i e de altura $f(c_i)$. A soma S_n das áreas desses retângulos é dada por

$$S_n = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i .$$

Se fizermos o número de subintervalos crescer indefinidamente, isto é, $n \rightarrow +\infty$, teremos, com toda certeza $\|\Delta x_i\| \rightarrow 0$ e assim a soma S_n acima se aproxima do valor de S (que é a área da figura acima).

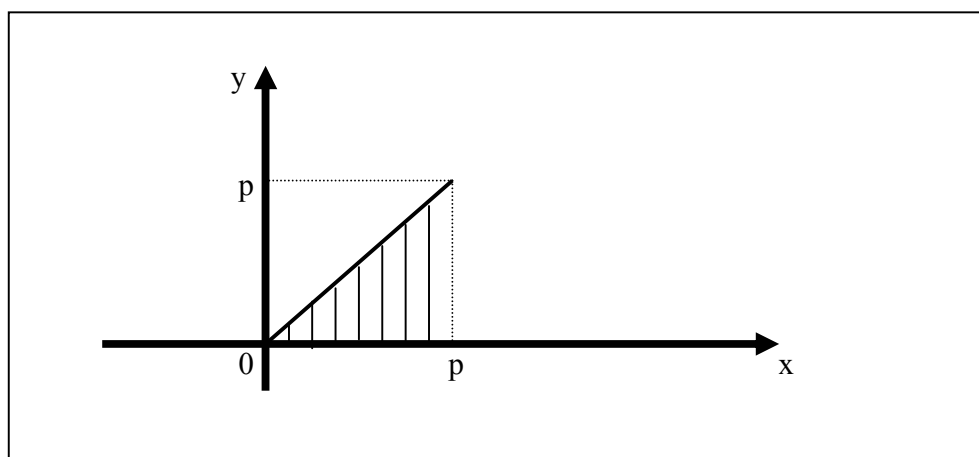
DEFINIÇÃO: Nas condições estabelecidas sobre a função f no início do nosso estudo, temos

$$\text{Área} = S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \right) = \lim_{\|\Delta x_i\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \right). \text{ A área } S \text{ será denotada por } \int_a^b f(x) dx$$

(lê-se *integral definida* de a até b da função f). Portanto: $S = \int_a^b f(x) dx$.

Vamos fazer alguns exemplos numéricos, com funções conhecidas para você entender melhor:

Seja calcular $\int_0^p f(x) dx$, onde $f(x) = x$, isto é, queremos achar $\int_0^p x dx$. Graficamente, pelo que foi exposto, desejamos determinar a área do triângulo retângulo de base e altura iguais a p que é naturalmente $A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{p \cdot p}{2} = \frac{p^2}{2}$, veja a figura abaixo:



Por outro lado, pela definição dada acima: $S = \int_0^p x dx = \lim_{\|\Delta x_i\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \right)$.

Subdividindo o intervalo $[0, p]$ em n partes iguais, teremos $\Delta x_i = \frac{p}{n}$ e lembrando que, para

$f(x) = x$ temos, naturalmente, $f(c_i) = c_i$, chegamos a: $\int_0^p x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p}{n} \cdot c_i \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{p}{n} \sum_{i=1}^n c_i \right)$.

Falta agora escolher o valor de c_i , para cada subintervalo, tomaremos cada c_i de duas maneiras diferentes, para mostrar a você que o resultado independe do c_i escolhido:

PRIMEIRA MANEIRA: $c_1 = \frac{1}{n}; c_2 = \frac{2}{n}; \dots; c_i = \frac{i}{n}; \dots; c_n = \frac{n}{n} = 1$ (isto é, o valor de c_i é o limite superior de cada subintervalo), assim:

$$\int_0^p x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p}{n} \cdot c_i \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{p}{n} \sum_{i=1}^n c_i \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{p}{n} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{i}{n} + \dots + p \right)}_{\text{Soma dos termos de uma P.A. de razão } \frac{1}{n}} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{p}{n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{n} + p \right) \cdot n}{2} \right] = \frac{p^2}{2}$$

SEGUNDA MANEIRA Se escolhêssemos o valor de c_i como sendo o limite inferior de cada subintervalo, teríamos o mesmo resultado para a área! Senão vejamos:

$c_1 = 0; c_2 = \frac{1}{n}; \dots; c_i = \frac{i-1}{n}; \dots; c_n = \frac{np-p}{n}$, assim:

$$\int_0^p x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{p}{n} \underbrace{\left(0 + \frac{1}{n} + \dots + \frac{i-1}{n} + \dots + \frac{np-1}{n} \right)}_{\text{Soma dos termos de uma P.A. de razão } \frac{1}{n}} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{p}{n} \cdot \frac{\left(0 + \frac{np-1}{n} \right) \cdot n}{2} \right] = \frac{p^2}{2}.$$

Mesmo que usássemos um c_i na metade, ou na terça parte, etc... de cada subintervalo o resultado (por incrível que pareça!) seria o mesmo. Foi isso que Isaac Newton e Leibnitz demonstraram, independentemente, o primeiro na Inglaterra e o segundo na Alemanha.

Fazendo cálculos mais cansativos, podemos provar que:

$$\text{a) } \int_0^p x^2 \, dx = \frac{p^3}{3};$$

$$\text{b) } \int_0^p x^3 \, dx = \frac{p^4}{4};$$

$$\text{c) } \int_0^p x^4 \, dx = \frac{p^5}{5}.$$

Será que você consegue perceber uma relação geral? Pense um pouco...

Posteriormente (próxima página!) você verá o importantíssimo **Teorema Fundamental do Cálculo** ele permitirá, dentre outras coisas, **que você não tenha o imenso trabalho** que tivemos acima para

$$\text{calcular } \int_0^p x \, dx = \frac{p^2}{2}$$

Enunciaremos, sem demonstração, um resultado fundamental e com inúmeras aplicações nas mais diversas ramificações do conhecimento, ele se chama:

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Se $f(x)$ é uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ em $[a, b]$ (isto é, $F'(x) = f(x)$, para todo x pertencente a $[a, b]$) então

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Propriedades da integral definida:

No que segue (do item 1 ao item 4), considere as funções f e g integráveis em um intervalo $[a, b]$ e k uma constante real:

$$1) \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx;$$

$$2) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$4) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

5) Se f é contínua em um intervalo ao qual pertencem os números a , b e c , então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ quaisquer que sejam os valores de } a, b \text{ e } c.$$

APLICAÇÕES:

Calcular as integrais definidas (em sala nós veremos que em muitos dos casos abaixo estamos calculando áreas de figuras planas que no segundo grau você nem sonhava em calcular...):

$$a) \int_0^3 x^2 dx; \quad b) \int_1^e \frac{dx}{x}; \quad c) \int_{-1}^2 (x^3 + 5x - 8) dx; \quad d) \int_0^{\pi} \sin x dx; \quad e) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx;$$

$$\text{f) } \int_1^2 \frac{1+x}{x^3} dx; \quad \text{g) } \int_1^2 \frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^2} dx; \quad \text{h) } \int_1^2 \sqrt{7x+2} dx; \quad \text{i) } \int_{-1}^0 \frac{x^2}{(x^3+4)^5} dx;$$

Meus nobres alunos, nem sempre, como comentamos na página 16, conseguimos resolver integrais por substituição direta, precisamos então conhecer novas técnicas de integração. Antes vamos revisar alguns tópicos sobre integral indefinida, já mencionados pelo Professor Eron em seu texto iniciado na página 7.

INTEGRAL INDEFINIDA

IMPORTANTE:

De um modo geral trabalharemos com **funções contínuas em um intervalo real.**

DEFINIÇÃO 1:

Se $F'(x) = f(x)$ então $F(x)$ é denominada uma **primitiva** ou **antiderivada** de $f(x)$.

EXEMPLOS:

- a) $\sin x$ é uma *primitiva* de $\cos x$ pois $(\sin x)' = \cos x$;
- b) $-\cos x$ é uma *primitiva* de $\sin x$ pois $(-\cos x)' = \sin x$;
- c) x^2 é uma *primitiva* de $2x$ pois $(x^2)' = 2x$;
- d) Note que $x^2 + 1$ também é uma *primitiva* de $2x$ pois $(x^2 + 1)' = 2x$;
- e) De um modo geral $x^2 + C$ (onde C representa um número real qualquer) é uma *primitiva* de $2x$ pois $(x^2 + C)' = 2x$.

PROPOSIÇÃO 1: Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e C é um número real então $F(x) + C$ é também uma primitiva de $f(x)$.

Demonstração: $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$

PROPOSIÇÃO 2: Se $F(x)$ e $G(x)$ são ambas primitivas de $f(x)$ então existe um número real C tal que $G(x) = F(x) + C$.

Demonstração: $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$

Logo, $G(x) - F(x)$ é uma função constante, isto é, existe um número real C tal que

$$G(x) - F(x) = C.$$

$$\text{Portanto } G(x) = F(x) + C$$

DEFINIÇÃO 2: O conjunto de todas as primitivas de $f(x)$ é a *integral indefinida* de $f(x)$ que é indicada por $\int f(x)dx$.

Pelas Proposições 1 e 2 temos que se $F(x)$ é uma primitiva qualquer de $f(x)$ então

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ sendo que } C \text{ pode ser qualquer número real.}$$

OBSERVAÇÕES:

- a) Na expressão $\int f(x)dx$ a função $f(x)$ é chamada de integrando (ou função integranda);
- b) A integral indefinida, por uma questão de simplificação, será chamada apenas de integral.

EXEMPLOS:

- a) $(\sin x)' = \cos x$, portanto $\int \cos x dx = \sin x + C$;
- b) $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$, logo $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C$;
- c) $(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, logo $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + C$;
- d) $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$, logo $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$

EXERCÍCIOS:

1) Determine as integrais abaixo, utilizando o conceito de integral indefinida:

- | | |
|--|--|
| a) $\int \sin x dx =$ | RESPOSTA: $-\cos x + C$ |
| b) $\int e^x dx =$ | RESPOSTA: $e^x + C$ |
| c) $\int 1 dx = \int dx =$ | RESPOSTA: $x + C$ |
| d) $\int x dx =$ | RESPOSTA: $\frac{x^2}{2} + C$ |
| e) $\int x^2 dx =$ | RESPOSTA: $\frac{x^3}{3} + C$ |
| f) $\int x^3 dx =$ | RESPOSTA: $\frac{x^4}{4} + C$ |
| g) Para $n \neq -1$, $\int x^n dx =$ | RESPOSTA: $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| h) $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} =$ | RESPOSTA: $\ln x + C$ |
| i) Para $a > 0$ e $a \neq 1$, $\int a^x dx =$ | RESPOSTA: $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |

$$j) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \arcsen x + C$$

$$k) \int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \arctg x + C$$

$$l) \int \sec^2 x \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \operatorname{tg} x + C$$

$$m) \int x\sqrt{x} \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \frac{2}{5} x^{5/2} + C$$

$$n) \int x^2 \sqrt[3]{x} \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \frac{3}{10} x^{10/3} + C$$

$$o) \int 2x \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } x^2 + C$$

$$p) \int 3x \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \frac{3x^2}{2} + C$$

$$q) \int 11x^2 \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \frac{11x^3}{3} + C$$

$$r) \int 8x^3 \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } 2x^4 + C$$

$$s) \int (x^2 + x^5 + x^6) \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + C$$

$$t) \int (3x^2 + 2x^5 + 7x^6) \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } x^3 + \frac{x^6}{3} + x^7 + C$$

$$u) \int (3x^{-2} + 2x^{-3} + 7x^{-4}) \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } -\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{7}{3x^3} + C$$

$$v) \int (3x^{-1} + 2x^{-2/3} + 7x^{-1/2}) \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } 3 \ln|x| + 6x^{1/3} + 14x^{1/2} + C$$

$$w) \int \left(\frac{2}{3} x^{-1} + \frac{5}{6} x^{-2/3} + \frac{1}{2} x^{-1/2} \right) \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \frac{2}{3} \ln|x| + \frac{5x^{1/3}}{2} + x^{1/2} + C$$

$$x) \int \frac{x^3 + 1}{x} \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \frac{x^3}{3} + \ln|x| + C$$

$$y) \int \frac{5x^4 + 3x^2 + 4x + 7}{x} \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \frac{5x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 4x + 7 \ln|x| + C$$

$$z) \int e^{5x} \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } \frac{e^{5x}}{5} + C$$

2) Determine as integrais indefinidas abaixo, utilizando as “idéias” apresentadas acima:

$$a) \int e^{-4x} \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } -\frac{e^{-4x}}{4} + C$$

$$b) \int \frac{e^{-8x}}{6} \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } -\frac{e^{-8x}}{48} + C$$

$$c) \int \operatorname{sen} 4x \, dx =$$

$$\text{RESPOSTA: } -\frac{\cos 4x}{4} + C$$

- d) $\int 3\operatorname{sen} 6x \, dx =$ **RESPOSTA:** $-\frac{\cos 6x}{2} + C$
- e) $\int \frac{4}{3} \cos 6x \, dx =$ **RESPOSTA:** $\frac{2 \cdot \operatorname{sen} 6x}{9} + C$
- f) $\int \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5} \operatorname{sen} 6x \right) dx =$ **RESPOSTA:** $\frac{x}{2} - \frac{2 \cdot \cos 6x}{15} + C$
- g) $\int \left(\frac{1}{2} e^{3x} - \frac{2}{7} \cos 6x \right) dx =$ **RESPOSTA:** $\frac{e^{3x}}{6} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{21} + C$
- h) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x} dx =$ **RESPOSTA:** $-2 \cos x + C$
- i) $\int (\operatorname{sen} \sqrt{5}) x \, dx =$ **RESPOSTA:** $\frac{(\operatorname{sen} \sqrt{5}) x^2}{2} + C$
- j) $\int \operatorname{sen}(\sqrt{5}x) \, dx =$ **RESPOSTA:** $-\frac{\cos(\sqrt{5}x)}{\sqrt{5}} + C$
- k) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx =$ **RESPOSTA:** $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$
- l) $\int \frac{5}{2\sqrt{1-x^2}} dx =$ **RESPOSTA:** $\frac{5}{2} \operatorname{arcsen} x + C$
- m) $\int \frac{5x^4 + e^{4x} + 4\operatorname{sen} 8x + 7}{5} dx =$ **RESPOSTA:** $\frac{x^5}{5} + \frac{e^{4x}}{20} - \frac{\cos 8x}{10} + \frac{7x}{5} + C$
- n) $\int \frac{1}{1+x^2} dx =$ **RESPOSTA:** $\operatorname{arctg} x + C$
- o) $\int \frac{1+x+x^2}{x^2} dx =$ **RESPOSTA:** $-\frac{1}{x} + \ln|x| + x + C$
- p) $\int \frac{2x^3 + e^{9x} + 3\operatorname{sen} 5x + 7 \cos 2x}{6} dx =$ **RESPOSTA:** $\frac{x^4}{12} + \frac{e^{9x}}{54} - \frac{\cos 5x}{10} + \frac{7}{12} \operatorname{sen} 2x + C$
- q) $\int x e^x dx =$ (Foi só uma provocação... trata-se da técnica II, página 34)
- r) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx =$ (Foi outra provocação... página 34)
- s) $\int e^{x^2} dx$ (impossível usando um número finito das funções que você conhece! Pesquise!)

Ao fazer os exercícios acima, você deve ter notado que a integral indefinida tem algumas propriedades:

PROPRIEDADES DA INTEGRAL INDEFINIDA

- 1) Se k é um número real (isto é, uma constante real): $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$;
- 2) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

Nos exercícios que faremos adiante, você poderá consultar a tabela de integrais abaixo:

TABELA DE INTEGRAIS (CHAMADAS IMEDIATAS)

(DEPOIS AUMENTAREMOS ESTA TABELA)

- 1) Se $n \neq -1$: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$;
- 2) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
- 3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, como caso particular, temos: $\int e^x dx = e^x + C$;
- 4) $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$;
- 5) $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$;
- 6) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$;
- 7) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C$;
- 8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$;
- 9) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + C$;
- 10) $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x dx = \sec x + C$;
- 11) $\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x dx = -\operatorname{cosec} x + C$.

Técnicas de Integração

Como você pôde ver nas nossas aulas anteriores, algumas integrais indefinidas não são “diretas” (lembre como exemplos as letras q), r), do exercício 2)). Vamos então aprender algumas técnicas que podem ser úteis quando você “encarar” algumas integrais que não sejam imediatas.

1ª) MUDANÇA DE VARIÁVEL (OU REGRA DA SUBSTITUIÇÃO)

EXEMPLO 1

$$\int e^{4x} dx = ?$$

Acredito que você saiba fazer “de cabeça”! Mas vamos tentar uma técnica:

Faça $4x = u$, daí, derivando (ou diferenciando) ambos os membros:

$4dx = du$, logo: $dx = \frac{du}{4}$, voltando à expressão acima e substituindo:

$$\int e^{4x} dx = \int e^u \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{1}{4} e^u + C = \frac{1}{4} e^{4x} + C$$

EXEMPLO 2

$$\int \operatorname{sen} 6x \, dx = ?$$

Faça agora $6x = u$, daí, e derive ambos os membros:

$6dx = du$, logo: $dx = \frac{du}{6}$, voltando à expressão acima e substituindo:

$$\int \operatorname{sen} 6x \, dx = \int \operatorname{sen} u \frac{du}{6} = \frac{1}{6} \int \operatorname{sen} u \, du = -\frac{1}{6} \cos u + C = -\frac{1}{6} \cos 6x + C$$

EXEMPLO 3

$$\int \frac{dx}{x-5} = ?$$

Use como substituição $x-5 = u$, daí $dx = du$ e portanto:

$$\int \frac{dx}{x-5} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x-5| + C$$

EXEMPLO 4

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx = ?$$

Use como substituição $1+e^x = u$, daí $e^x dx = du$ e portanto:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|1+e^x| + C$$

EXEMPLO 5

$$\int x \cos x^2 \, dx = ?$$

Tente $x^2 = u$:

$2x dx = du$, logo: $dx = \frac{du}{2x}$, voltando à expressão acima e substituindo:

$$\int x \cos x^2 dx = \int x \cos u \frac{du}{2x} = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \operatorname{sen} u + C = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C$$

EXEMPLO 6

$$\int \frac{x^2}{1+x^3} dx = ?$$

Faça agora $1 + x^3 = u$:

$3x^2 dx = du$, daí: $dx = \frac{du}{3x^2}$, portanto:

$$\int \frac{x^2}{1+x^3} dx = \int \frac{x^2}{u} \frac{du}{3x^2} = \int \frac{du}{3u} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln |u| + C = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 1| + C$$

Será que você sacou ?

ABRA OS OLHOS:

Na integral $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$ **quando substituímos “alguma expressão” por “u”** (no exemplo $1 + x^3 = u$) **e derivamos, “aparece” a outra expressão** (na verdade, a **outra** expressão seria **apenas** x^2 , e é por isso que se costuma dizer que temos a outra expressão **a menos de um fator constante**). Mas você já sabe que a constante multiplicando não atrapalha, pois pode “sair” da integral.

Se ligue no próximo exemplo:

EXEMPLO 7

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx = ?$$

E agora? Qual a melhor substituição? Pense um pouco! Arrisque! Se você tentar “ $\operatorname{sen} x = u$... não dá! Pode conferir que o negócio vai ficar pior!

Qual o problema? Se não deu, tente outra substituição! Que tal $\cos x = u$, daí: $-\operatorname{sen} x dx = du$,

portanto $dx = -\frac{du}{\operatorname{sen} x}$,

assim

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{u^3} \times \frac{-du}{\sin x} = \int \frac{-du}{u^3} = \int -u^{-3} du = -\int u^{-3} du = -\frac{u^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2u^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

EXEMPLO 8

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = ?$$

Se tentarmos $1 + x^4 = u$, ao derivarmos, não “aparecerá” o outro termo, isto é, o x . E aí?

Vamos tentar $x^2 = u$, daí: $dx = \frac{du}{2x}$, portanto:

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \int \frac{x}{1+u^2} \times \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \arctg u + C = \frac{1}{2} \arctg x^2 + C$$

Nos exemplos que seguem, ***a*** representa um número real (constante) diferente de zero:

EXEMPLO 9

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = ?$$

Faça $x = t \cdot a$ (conseqüentemente $t = \frac{x}{a}$), logo $dx = a dt$, portanto:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{adt}{a^2 + (ta)^2} = \int \frac{adt}{a^2 + t^2 a^2} = \frac{a}{a^2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \arctg t + C = \frac{1}{a} \arctg \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

EXEMPLO 10

Considere agora ***a > 0*** :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$$

Faça a mesma substituição anterior, isto é: $x = t \cdot a$, logo $dx = a dt$, daí:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2 - (ta)^2}} = \int \frac{adt}{\sqrt{a^2 - t^2 a^2}} = \int \frac{adt}{a\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsen t + C = \arcsen \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

EXEMPLO 11

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = ?$$

Note que, pela definição de tangente, podemos escrever: $\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$. Portanto, fazendo a substituição $\cos x = t$ temos que $-\operatorname{sen} x \, dx = dt$, fazendo os cálculos, você encontrará:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C$$

EXEMPLO 12

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = ?$$

Note que, pela definição de cotangente, podemos escrever: $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx$. Portanto, fazendo a substituição $\operatorname{sen} x = t$ temos que $\cos x \, dx = dt$, daí:

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Precisaremos de dois resultados que já foram demonstrados quando estudamos derivadas:

O primeiro deles é: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.

O segundo é $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

VAMOS AGORA AMPLIAR A NOSSA TABELA DE INTEGRAIS:

TABELA DE INTEGRAIS IMEDIATAS

- 1) Se $n \neq -1$: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$;
- 2) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$;
- 3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, como caso particular, temos: $\int e^x dx = e^x + C$;

- 4) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C;$
- 5) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C;$
- 6) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C;$
- 7) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C;$
- 8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C;$
- 9) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C;$
- 10) $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C;$
- 11) $\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C;$
- 12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C;$
- 13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C;$
- 14) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$
- 15) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$
- 16) $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C;$
- 17) $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C$

Resolva as integrais abaixo, usando o método da substituição:

- 1) $\int (3x-4)^3 \, dx$ Re sp.: $\frac{(3x-4)^4}{12} + C;$
- 2) $\int \sqrt{3x-4} \, dx$ Re sp.: $\frac{2}{9} \sqrt{(3x-4)^3} + C;$
- 3) $\int \frac{dx}{3x-7}$ Resp.: $\frac{1}{3} \ln |3x-7| + C;$
- 4) $\int x \cdot e^{x^2} \, dx$ Re sp.: $\frac{e^{x^2}}{2} + C;$
- 5) $\int x \cdot e^{-x^2} \, dx$ Re sp.: $-\frac{e^{-x^2}}{2} + C;$

$$6) \int e^x \cdot \sqrt{e^x + 1} dx \quad \text{Re sp.: } \frac{2}{3} \sqrt{(1 + e^x)^3} + C;$$

$$7) \int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen} x dx \quad \text{Re sp.: } -\frac{1}{4} \cos^4 x + C;$$

$$8) \int \cos x \cdot \operatorname{sen}^5 x dx \quad \text{Re sp.: } \frac{1}{6} \operatorname{sen}^6 x + C;$$

$$9) \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx \quad \text{Re sp.: } \frac{1}{\cos x} + C;$$

$$10) \int \sqrt{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x dx \quad \text{Re sp.: } -\frac{2}{3} \sqrt{\cos^3 x} + C;$$

$$11) \int \frac{\sec^2 x}{3 + 2 \operatorname{tg} x} dx \quad \text{Re sp.: } \frac{1}{2} \ln |3 + 2 \operatorname{tg} x| + C;$$

$$12) \int \frac{x^2}{(1 + x^3)^2} dx \quad \text{Re sp.: } -\frac{1}{3 + 3x^3} + C;$$

$$13) \int x^3 \cos x^4 dx \quad \text{Re sp.: } \frac{\operatorname{sen} x^4}{4} + C;$$

$$14) \int \sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx \quad \text{Re sp.: } \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + C;$$

$$15) \int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 3}} \quad \text{Re sp.: } \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 3} + C;$$

$$16) \int \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} dx \quad \text{Resp.: } \frac{\ln^2(x + 1)}{2} + C;$$

$$17) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \operatorname{sen} x + 1}} \quad \text{Resp.: } \sqrt{2 \operatorname{sen} x + 1} + C;$$

$$18) \int \frac{\operatorname{sen}(2x) dx}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}} \quad \text{Resp.: } 2\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x} + C;$$

$$19) \int \frac{\operatorname{arcsen} x dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{Resp.: } \frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{2} + C;$$

$$20) \int \frac{\arctg^2 x dx}{1+x^2}$$

$$\text{Resp.: } \frac{\arctg^3 x}{3} + C;$$

$$21) \int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$$

$$\text{Resp.: } \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| + C;$$

$$22) \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\text{Resp.: } \ln|\ln x| + C;$$

$$23) \int 3^{x^2+4x+3} (x+2) dx$$

$$\text{Resp.: } \frac{3^{x^2+4x+3}}{2 \cdot \ln(3)} + C;$$

$$24) \int \sin x \cdot \sin(\cos x) dx$$

$$\text{Resp.: } \cos(\cos x) + C;$$

$$25) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\text{Resp.: } \ln|x + \sqrt{x^2+9}| + C;$$

$$26) \int \frac{dx}{1+2x^2}$$

$$\text{Resp.: } \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2} \cdot x) + C;$$

$$27) \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$$

$$\text{Resp.: } \frac{1}{3} \arcsen \frac{3x}{4} + C;$$

$$28) \int \frac{dx}{4-9x^2}$$

$$\text{Resp.: } \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2+3x}{2-3x} \right| + C.$$

Resolva as seguintes integrais indefinidas:

$$a) \int \frac{\sin(1+3 \ln x)}{x} dx$$

$$b) \int \frac{1+2e^{2x}}{\sqrt{x+e^{2x}}} dx$$

$$c) \int \frac{dx}{x(\ln x + 3)}$$

$$d) \int \frac{1+\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$$

$$e) \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$$

$$f) \int \left(\frac{3x}{x^2+1} + x^2 e^{x^3} \right) dx$$

$$g) \int (x^2 \sqrt{x+1}) dx$$

$$h) \int \left[\frac{2}{5} \left(\frac{1}{1+16x^2} + \frac{\cos x}{\sin^3 x} \right) \right] dx$$

$$i) \int (x \sqrt[3]{1-3x}) dx$$

$$j) \int \frac{\sin^5(\sqrt[3]{x}) \cos(\sqrt[3]{x})}{3 \sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$l) \int \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

$$m) \int \left(\frac{e^x}{e^{2x}+16} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$n) \int [3^x + (3^x)^2 + (3^x)^3] dx$$

$$o) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} \cos^2 x}$$

RESPOSTAS

$$a) -\frac{1}{3} \cos(1+3 \ln x) + C$$

$$b) 2 \sqrt{x+e^{2x}} + C$$

$$c) \ln |\ln x + 3| + C$$

$$d) \operatorname{tg} x + \frac{3}{4} \sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x} + C$$

$$e) 2 \sqrt{1+\sin^2 x} + C$$

$$f) \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

$$g) \frac{2}{7} \sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5} \sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C$$

$$h) \frac{1}{10} \operatorname{arctg}(4x) - \frac{1}{5 \sin^2 x} + C$$

$$i) \frac{1}{21} \sqrt[3]{(1-3x)^7} - \frac{1}{12} \sqrt[3]{(1-3x)^4} + C$$

$$j) \frac{\sin^6(\sqrt[3]{x})}{6} + C$$

$$l) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$m) \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^x}{4} \right) + 2\sqrt{x} + C$$

$$n) \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{(3^x)^2}{2 \ln 3} + \frac{(3^x)^3}{3 \ln 3} + C$$

$$o) \frac{3}{2} \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} + C$$

2ª) INTEGRAÇÃO POR PARTES

Será que agora que você está “fera” em calcular integrais pelos métodos vistos acima, você poderia resolver a integral abaixo:

$\int x \cdot e^x dx = \dots$ Hum! Tá difícil, né! Pois bem, vamos aprender uma nova técnica para resolver integrais como essa.

Você lembra da regra da derivada do produto? Vamos relembrar:

Se $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ então $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, em outras palavras:

$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, que também pode ser escrita:

$u(x) \cdot v'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' - u'(x) \cdot v(x)$, integrando ambos os membros, em relação a x :

$\int u(x) \cdot v'(x) dx = \int ([u(x) \cdot v(x)]' - u'(x) \cdot v(x)) dx$ separando:

$\int u(x) \cdot v'(x) dx = \int [u(x) \cdot v(x)]' dx - \int u'(x) \cdot v(x) dx$, como, por definição, $\int [u(x) \cdot v(x)]' dx = u(x) \cdot v(x) + C$, temos:

$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) + C - \int u'(x) \cdot v(x) dx$, como na fórmula ao lado ainda há integrais a serem calculadas, podemos desprezar a constante C , obtendo assim:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

A fórmula acima é colocada numa forma simplificada para melhor memorização:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Vamos fazer alguns exemplos para você se sentir mais seguro:

EXEMPLO 1

$$\int x \cdot e^x dx = ?$$

Você pode naturalmente perguntar... Quem faz o papel de “ u ”? e quem é dv ?

Vamos “tentar” $u = x$ e $dv = e^x dx$; diferenciamos (ou derivamos) a expressão que contém u e integramos a que possui dv . Assim:

$du = dx$ e $\int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x + C$, prezados alunos, pode-se demonstrar que ao usarmos o método da integração por partes, ao calcularmos o valor da função v , podemos “esquecer” a constante, deste modo, ao invés de $v = e^x + C$, temos $v = e^x$. Voltando à fórmula $\int u dv = uv - \int v du$, temos:

$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx \Rightarrow \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$ (Note que colocamos a constante C , apenas no final de todo o processo de integração).

Portanto: $\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$.

Vamos fazer uma brincadeira? Que tal se nós seguissemos o caminho errado? Isto é:

$u = e^x$ e $dv = xdx$ diferenciando (ou derivando) a expressão que contém u e integrando a que possui dv , teremos:

$du = e^x dx$ e $\int dv = \int x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} + C$, “esquecendo” a constante, temos $v = \frac{x^2}{2}$. Voltando à fórmula $\int u dv = uv - \int v du$, obtemos:

$$\int x \cdot e^x dx = e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx \Rightarrow \int x \cdot e^x dx = e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot e^x dx .$$

Será que você está vendo que o negócio piorou???

Antes nós queríamos calcular, apenas $\int x \cdot e^x dx =$, mas agora nós “caímos” na integral $\int x^2 \cdot e^x dx$

(observe que o expoente do x aumentou ao invés de diminuir!).

Conclusão: É importante a escolha certa de u e de dv !

A prática lhe trará mais segurança, portanto... exercite seus neurônios!!!

EXEMPLO 2

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x dx = ?$$

Quem faz o papel de “ u ”? e quem é dv ?

Vamos tentar $u = x$ e $dv = \operatorname{sen} x dx$; diferenciando (ou derivando) a expressão que contém u e integrando a que possui dv teremos:

$$du = dx \text{ e } \int dv = \int \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = -\cos x + C, \text{ “esquecendo” a constante, temos } v = -\cos x .$$

Voltando à fórmula $\int u dv = uv - \int v du$, obteremos:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \operatorname{sen} x dx &= -x \cdot \cos x - \int -\cos x dx \Rightarrow \int x \cdot \operatorname{sen} x dx = \\ &= -x \cdot \cos x + \int \cos x dx \Rightarrow \int x \cdot \operatorname{sen} x dx = -x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

$$\text{Portanto: } \int x \cdot \operatorname{sen} x dx = -x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

EXEMPLO 3

$$\int \ln x \, dx = ?$$

E agora? quem faz o papel de “ u ” ? e quem é dv ?

Vamos tentar $u = \ln x$ e $dv = dx$, assim:

$$du = \frac{dx}{x} \text{ e } v = x, \text{ utilizando a fórmula } \int u dv = uv - \int v du :$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx \Rightarrow \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

EXEMPLO 4

$$\int \arcsen x \, dx = ?$$

E aí? quem é “ u ” ? e quem é dv ?

Vamos tentar $u = \arcsen x$ e $dv = dx$, assim:

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ e } v = x, \text{ usando a fórmula } \int u dv = uv - \int v du :$$

$$\int \arcsen x \, dx = x \arcsen x - \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ e agora, como é que faz para calcular } \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} ?$$

Faça por substituição, $1-x^2 = t \Rightarrow -2x dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{2x}$, deste modo:

$$\int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{-dt}{2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$-t^{\frac{1}{2}} + C = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

Finalmente:

$$\int \arcsen x \, dx = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C$$

EXEMPLO 5

E se nós quisermos calcular $\int x \cdot \ln x \, dx = ?$ Vamos fazer em sala...

Usando integração por partes, calcule as integrais abaixo:

- | | |
|---|--|
| 1) $\int x \cos x \, dx$ | Re sp.: $x \operatorname{sen} x + \cos x + C$; |
| 2) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ | Re sp.: $x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$; |
| 3) $\int x \ln x \, dx$ | Re sp.: $\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C$; |
| 4) $\int x^2 \ln x \, dx$ | Re sp.: $\frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C$; |
| 5) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$ | Re sp.: $-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$; |
| 6) $\int x^2 e^x \, dx$ | Re sp.: $e^x (x^2 - 2x + 2) + C$; |
| 7) $\int e^x \cos x \, dx$ | Re sp.: $\frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C$; |
| 8) $\int (x^2 + 2x) e^x \, dx$ | Re sp.: $x^2 e^x + C$; |
| 9) $\int (x^2 + 1) \operatorname{sen} x \, dx$ | Re sp.: $-(x^2 - 1) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + C$; |
| 10) $\int \operatorname{arctg}(3x) \, dx$ | Re sp.: $x \cdot \operatorname{arctg}(3x) - \frac{1}{6} \ln(9x^2 + 1) + C$; |
| 11) $\int \arcsen(x - 2) \, dx$ | Re sp.: $(x - 2) \arcsen(x - 2) + \sqrt{-x^2 + 4x - 3} + C$; |
| 12) $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx$ | Resp.: $-x \cot g(x) + \ln \operatorname{sen}(x) + C$; |
| 13) $\int (16x^3 + 4x + 1) \ln x \, dx$ | Re sp.: $(4x^4 + 2x^2 + x) \ln x - (x^4 + x^2 + x) + C$. |

3ª) INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES DOS TIPOS

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx \quad e \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

Observe que as integrais acima contêm trinômios do segundo grau.

Para resolver tais integrais normalmente usamos o método de “completar quadrados”.

Antes de ver os exemplos abaixo lembre das *integrais imediatas*:

- 1) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C;$
- 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C;$
- 3) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$
- 4) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

EXEMPLO 1

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+9} = ?$$

Será que dá pra perceber que $x^2-4x+9 = (x-2)^2 + 5$?

Se não deu, em sala agente conversa melhor!

Deste modo:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+9} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+5}. \text{ E agora? Olhe para a integral imediata número 1) acima!}$$

Dá para notar que com a substituição $x-2=u$ resolvemos nosso problema? Acompanhe:

$x-2=u \Rightarrow dx=du$ daí:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2+5} = \int \frac{du}{u^2+5} = \int \frac{du}{u^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

EXEMPLO 2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x + 7}} = ?$$

Note que $-x^2 - 4x + 7 = -(x^2 + 4x - 7) = -[(x+2)^2 - 11] = [11 - (x+2)^2]$.

Assim:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x + 7}} = \int \frac{dx}{\sqrt{11 - (x+2)^2}} \text{ E aí? Compare com a integral imediata número 2), acima.}$$

Usando a substituição $x+2 = u$, teremos:

$$x+2 = u \Rightarrow dx = du, \text{ portanto:}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x + 7}} = \int \frac{dx}{\sqrt{11 - (x+2)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{11 - u^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{11})^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{\sqrt{11}}\right) + C =$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+2}{\sqrt{11}}\right) + C$$

EXEMPLO 3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 7}} = ?$$

Perceba que $x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$.

Conseqüentemente:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 7}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 + 3}}. \text{ Compare com a integral imediata número 3), listada acima.}$$

Usando a substituição $x-2 = u \Rightarrow dx = du$, teremos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 7}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 + 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{u^2 + 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{u^2 + (\sqrt{3})^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 3} \right| + C =$$

$$= \ln \left| x - 2 + \sqrt{(x-2)^2 + 3} \right| + C$$

EXEMPLO 4

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 1} = ?$$

Escrevendo $x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$, obteremos:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 1} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 - 3}. \text{ Compare com a integral imediata número 4).}$$

Substitua $x - 2 = u \Rightarrow dx = du$ daí:

$$\int \frac{dx}{(x - 2)^2 - 3} = \int \frac{du}{u^2 - 3} = \int \frac{du}{u^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{3}}{u + \sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - 2 - \sqrt{3}}{x - 2 + \sqrt{3}} \right| + C$$

EXEMPLO 5

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4} = ? \text{ Esta nós faremos em sala!}$$

EXEMPLO 6

$$\int \frac{(x + 7)dx}{x^2 - 4x + 3} = ? \text{ Dever de casa!}$$

Calcule as integrais abaixo (observe os trinômios do segundo grau ...):

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

$$\text{Resp.: } \frac{1}{2} \arctg \frac{x + 1}{2} + C;$$

$$2) \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\text{Resp.: } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 5}{x - 1} \right| + C;$$

$$3) \int \frac{(x + 5)dx}{2x^2 + 4x + 3}$$

$$\text{Resp.: } \frac{1}{4} \ln |2x^2 + 4x + 3| + 2\sqrt{2} \cdot \arctg[\sqrt{2}(x + 1)] + C;$$

$$4) \int \frac{x + 3}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}} dx$$

$$\text{Resp.: } -\frac{1}{4} \sqrt{3 + 4x - 4x^2} + \frac{7}{4} \arcsen \frac{2x - 1}{2} + C;$$

$$5) \int \frac{(x + 5)dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 3}}$$

$$\text{Resp.: } \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 4x + 3} + 2\sqrt{2} \ln |\sqrt{2x^2 + 4x + 3} + \sqrt{2}(x + 1)| + C.$$

4ª) INTEGRAÇÃO DE ALGUMAS FUNÇÕES RACIONAIS

Primeiramente vamos citar alguns resultados importantes:

1) Sejam α, β, m e n números reais dados, com $\alpha \neq \beta$. Então existem constantes A e B tais que:

$$a) \frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta};$$

$$b) \frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}. \text{ (Algumas vezes é mais “direto”, substituir } x-\alpha = t \text{)}$$

APLICACÃO:

Demonstre que $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

2) Sejam $\alpha, \beta, \gamma, m, n, p$, números reais dados, com α, β, γ distintos entre si. Então existem constantes A, B e C , tais que:

$$a) \frac{mx^2 + nx + p}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma};$$

$$b) \frac{mx^2 + nx + p}{(x-\alpha)(x-\beta)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}.$$

3) Sejam α, a, b, c, m, n, p , números reais dados, tais que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então existem constantes A, B e C , tais que:

$$\frac{mx^2 + nx + p}{(x-\alpha)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{ax^2 + bx + c};$$

VAMOS APLICAR OS RESULTADOS ACIMA NOS EXERCÍCIOS ABAIXO:

EXEMPLO 1

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = ? \text{ (note que, na verdade, esta integral é imediata!).}$$

EXEMPLO 2

$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = ?$ (observe que podemos usar a estratégia de “completar quadrados” vista na seção anterior).

EXEMPLO 3

$\int \frac{(5x - 2)dx}{x^2 - 4x + 3} = ?$ (podemos também usar a estratégia de “completar quadrados”).

EXEMPLO 4

$\int \frac{(7x - 2)dx}{(x - 3)^2} = ?$

EXEMPLO 5

$\int \frac{(x^2 + 2)dx}{x^2 - 3x + 2} = ?$

EXEMPLO 6

$\int \frac{(x^3 + 2)dx}{(x - 1)^2} = ?$

EXEMPLO 7

$\int \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx = ?$

EXEMPLO 8

$\int \frac{2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = ?$

EXEMPLO 9

$\int \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx = ?$

EXEMPLO 10

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 4x + 13} dx = ?$$

EXEMPLO 11

$$\int \frac{x^5 + x + 1}{x^3 - 8} dx = ?$$

EXERCÍCIOS:

Resolva as integrais das funções racionais abaixo:

$$1) \int \frac{x+1}{2x+1} dx \quad \text{Re sp. } \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \ln|2x+1| + C ;$$

$$2) \int \frac{x dx}{(x+1)(x+3)(x+5)} \quad \text{Resp. } \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)} \right| + C ;$$

$$3) \int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} \quad \text{Resp. } \frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C ;$$

$$4) \int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx \quad \text{Re sp. } \frac{3}{x-2} + \ln \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 + C ;$$

$$5) \int \frac{8x-16}{16-x^4} dx \quad \text{Re sp.: } \ln \sqrt{4+x^2} - \ln |2+x| - \arctg \left(\frac{x}{2} \right) + C ;$$

$$6) \int \frac{(x^2-2x+3)dx}{(x^2+1)(x-1)^2} \quad \text{Re sp : } \arctg x + \ln \sqrt{x^2+1} - \ln |x-1| + \frac{1}{1-x} + C ;$$

$$7) \int \frac{dx}{(x^2+9)^2} \quad \text{Re sp. } \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54} \arctg \left(\frac{x}{3} \right) + C ;$$

$$8) \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+9)^2} \quad \text{Re sp. } \frac{x-9}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54} \arctg \left(\frac{x}{3} \right) + C .$$

5ª) INTEGRAÇÃO DE ALGUMAS FUNÇÕES IRRACIONAIS

EXEMPLO 1

Será que você está preparado para fazer esta integral $\int \sqrt{x-3} \cdot x dx$?

Algumas integrais onde há uma ou mais raízes podem ser resolvidas com o seguinte artifício:

Faça $\sqrt{x-3} = t$, conseqüentemente, quadrando ambos os membros: $x-3 = t^2$ e é claro que $x = t^2 + 3$, logo $dx = 2t dt$, substituindo na integral pedida:

$$\int t \cdot (t^2 + 3) 2t dt = 2 \int (t^4 + 3t^2) dt = \frac{2}{5} t^5 + 2t^3 + C = \frac{2}{5} (\sqrt{x-3})^5 + 2(\sqrt{x-3})^3 + C$$

EXEMPLO 2

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = ?$$

Faça $\sqrt{x} = t$, conseqüentemente, quadrando ambos os membros: $x = t^2$ logo $dx = 2t dt$, substituindo na integral pedida:

$$\int \frac{2t dt}{1+t} = \int \frac{2t}{1+t} dt \text{ e agora? Lembre que: } \underline{\text{nas divisões de polinômios, quando o grau do numerador}}$$

for maior ou igual ao grau do denominador, usualmente dividimos o numerador pelo denominador (divisão de polinômios, sétima série... tudo bem, em sala nós resolveremos). Assim:

$$\int \frac{2t dt}{1+t} = \int \frac{2t}{1+t} dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2 \ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2 \ln|1+\sqrt{x}| + C, \text{ note}$$

que, como $1+\sqrt{x}$ é sempre positivo, não há necessidade do módulo, e a resposta pode ser:

$$\int \frac{2t dt}{1+t} = 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

ATENÇÃO! Poderíamos também ter substituído $1+\sqrt{x} = t$. Tente e veja que também dá certo!

OS EXEMPLOS 3 E 4 QUE SEGUEM SERÃO FEITOS EM SALA:

EXEMPLO 3

$$\int \frac{1+x^2}{(3+x)^{\frac{1}{3}}} dx = ?$$

EXEMPLO 4

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = ?$$

Resolva as integrais das funções irracionais:

$$1) \int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx$$

$$\text{Resp.: } \frac{2}{27} \sqrt[4]{x^9} - \frac{2}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + C;$$

$$2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\text{Resp.: } 2 \left(\frac{(\sqrt{x-1})^5}{5} + \frac{2(\sqrt{x-1})^3}{3} + \sqrt{x-1} \right) + C;$$

$$3) \int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}}$$

$$\text{Resp.: } \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3} \right| + C;$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}}$$

$$\text{Resp.: } 4\sqrt[4]{x} - 4 \ln |\sqrt[4]{x} - 1| + C;$$

$$5) \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

$$\text{Resp.: } 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + 2\sqrt{x+4} + C;$$

$$6) \int \frac{(x+3)dx}{x(x-2\sqrt{x}+3)}$$

$$\text{Resp.: } 2 \ln \sqrt{x} + 2\sqrt{2} \cdot \text{arctg} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}} \right) + C;$$

$$7) \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-2)^5} \left(\sqrt[3]{(x-2)^2} - 1 \right)}$$

$$\text{Resp.: } \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x-2}-1}{\sqrt[6]{x-2}+1} \right| - 3 \text{arctg} \sqrt[6]{x-2} + C;$$

$$8) \int x(1+x)^{\frac{2}{3}} dx$$

$$\text{Resp.: } \frac{3}{8}(1+x)^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{5}(1+x)^{\frac{5}{3}} + C;$$

$$9) \int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$$

$$\text{Resp.: } 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} - 48 \ln(2 + \sqrt[6]{x}) + C;$$

LISTA DE CÁLCULO II DA PROFESSORA SIRLANE COELHO

Com o intuito de relacionar mais exercícios para vocês, pedi à colega, **Professora Sirlane** para disponibilizar na internet a lista que ela elaborou.

I) Resolva as integrais abaixo por substituição:

- | | |
|--|---|
| 1) $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$ | Re sp.: $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$; |
| 2) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^4}}$ | Re sp.: $\frac{\arcsen x^2}{2} + C$; |
| 3) $\int \frac{\cos(\ln x) \, dx}{x}$ | Re sp.: $\sin(\ln x) + C$; |
| 4) $\int \ln(\cos x) \, \operatorname{tg} x \, dx$ | Re sp.: $-\frac{\ln^2(\cos x)}{2} + C$; |
| 5) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^5 x}$ | Re sp.: $-\frac{\ln^4 x}{4} + C$; |
| 6) $\int e^x \cdot \sin e^x \, dx$ | Re sp.: $-\cos(e^x) + C$; |
| 7) $\int \frac{e^{4x} \, dx}{1+3e^{4x}}$ | Re sp.: $\frac{1}{12} \ln 3e^{4x}+1 + C$; |
| 8) $\int \frac{\sec^2 2x}{1+\operatorname{tg} 2x} \, dx$ | Re sp.: $\frac{1}{2} \ln 1+\operatorname{tg} 2x + C$; |
| 9) $\int \sqrt{x+1} \, dx$ | Re sp.: $\sqrt{(x+1)^3} + C$; |
| 10) $\int (x+2) \cdot \sin(x^2+4x-6) \, dx$ | Re sp.: $-\frac{1}{2} \cos(x^2+4x-6) + C$; |
| 11) $\int 2^{-x} \operatorname{tg}(2^{1-x}) \, dx$ | Re sp.: $\frac{\ln \cos 2^{1-x} }{2 \ln 2} + C$; |
| 12) $\int \frac{(\arcsen x)^2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | Re sp.: $\frac{\arcsen^3 x}{3} + C$; |

$$13) \int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx \quad \text{Re sp.: } -\ln |\operatorname{sen} x + \cos x| + C ;$$

$$14) \int \frac{dx}{1 + e^x} \quad \text{Re sp.: } x - \ln |e^x + 1| + C ;$$

$$15) \int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x + \cos x} dx \quad \text{Re sp.: } \ln |x + \cos x| + C ;$$

$$16) \int a^{\operatorname{sen} x} \cos x dx \quad \text{Re sp.: } \frac{a^{\operatorname{sen} x}}{\ln a} + C ;$$

$$17) \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 x}} dx \quad \text{Re sp.: } \operatorname{arcsen} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{2} \right) + C ;$$

$$18) \int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \operatorname{tg} x + 1)} \quad \text{Re sp.: } \frac{1}{3} \ln |3 \operatorname{tg} x + 1| + C ;$$

$$19) \int \sec x \cdot \cos x dx \quad \text{Re sp.: } x + C ;$$

$$20) \int \frac{(\operatorname{arcsen} x + x) dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{Re sp.: } \frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{2} - \sqrt{1 - x^2} + C ;$$

$$21) \int x^2 \cdot \cos(x^3 + 3) dx \quad \text{Re sp.: } \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3 + x^3) + C ;$$

$$22) \int \frac{\operatorname{sen}(2x) dx}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}} \quad \text{Resp.: } 2\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x} + C ;$$

$$23) \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} \quad \text{Resp.: } \frac{1}{3} \operatorname{arcsen} \frac{3x}{4} + C ;$$

$$24) \int \frac{dx}{9x^2 + 4} \quad \text{Re sp.: } \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{2} x \right) + C ;$$

$$25) \int \frac{dx}{4 - 9x^2} \quad \text{Resp.: } \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2 + 3x}{2 - 3x} \right| + C ;$$

$$26) \int 3^x \cdot e^x dx \quad \text{Re sp.: } \frac{3^x \cdot e^x}{1 + \ln 3} + C .$$

II) Resolva as seguintes integrais por partes:

- 1) $\int x \cdot e^x dx$ *Re sp.*: $x \cdot e^x - e^x + C$;
- 2) $\int x \cos 2x dx$ *Re sp.*: $\frac{x \operatorname{sen} x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$;
- 3) $\int x^2 \ln x dx$ *Re sp.*: $\frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C$;
- 4) $\int \frac{\ln(\ln x) dx}{x}$ *Re sp.*: $\ln(\ln x) \cdot \ln x - \ln x + C$;
- 5) $\int \operatorname{arctg} x dx$ *Re sp.*: $x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$;
- 6) $\int x \sec x \operatorname{tg} x dx$ *Re sp.*: $x \sec x - \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$;
- 7) $\int \operatorname{arcsen} x dx$ *Re sp.*: $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + C$;
- 8) $\int x \cdot 2^{-x} dx$ *Re sp.*: $-\frac{x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2} + C$;
- 9) $\int x \operatorname{sen} x \cdot \cos x dx$ *Re sp.*: $\frac{-x \cdot \cos 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{8} + C$;
- 10) $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$ *Re sp.*: $-x \cdot \operatorname{cotg} x + \ln |\operatorname{sen} x| + C$;
- 11) $\int \frac{x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$ *Re sp.*: $-x \cdot \operatorname{cossec} x + \ln |\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x| + C$;
- 12) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$ *Re sp.*: $\frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C$.

III) Resolva as seguintes integrais:

- 1) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$ *Re sp.*: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C$;

- 2) $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 3}$ $\text{Re sp.: } x - \frac{3}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C;$
- 3) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4}$ $\text{Re sp.: } \frac{-1}{x-2} + C;$
- 4) $\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$ $\text{Re sp.: } \frac{1}{2\sqrt{6}} \arctg\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C;$
- 5) $\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$ $\text{Re sp.: } \frac{2}{3} \arctg(2x-1) + C;$
- 6) $\int \frac{dx}{6x^2 - 5x + 1}$ $\text{Re sp.: } \frac{6}{5} \ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + C;$
- 7) $\int \frac{(x+3)dx}{x^2 - 2x - 5}$ $\text{Re sp.: } \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x - 5| + 2\sqrt{6} \ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + C.$

IV) Resolva as integrais por frações parciais:

- 1) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2 - 5x + 6}$ $\text{Re sp.: } -7 \ln|x-2| + 9 \ln|x-3| + C;$
- 2) $\int \frac{(2x+1)dx}{(x-2)^3}$ $\text{Re sp.: } -5\left|2(x-2)^2 - 2\right|(x-2) + C;$
- 3) $\int \frac{4dx}{x^3 + 4x}$ $\text{Re sp.: } \ln x - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| + C;$
- 4) $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2}$ $\text{Re sp.: } \ln|x| + \frac{1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C;$
- 5) $\int \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$ $\text{Re sp.: } \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{6} \ln|x+2| - \frac{2}{3} \ln|x+1| + C;$
- 6) $\int \frac{dx}{x^2(1+x)}$ $\text{Re sp.: } -\frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x+1| + C;$
- 7) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$ $\text{Re sp.: } \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \arctg x + C.$

V) Resolva as integrais das funções irracionais:

$$1) \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt[4]{x}} \quad \text{Re sp.: } \frac{\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{x}{4} + \frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} - \sqrt[4]{x^2} - \ln \left| \sqrt[4]{x+1} \right| + C ;$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx \quad \text{Re sp.: } 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + 2\sqrt{x+4} + C ;$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt[4]{x^3}} \quad \text{Re sp.: } \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{4}{3} \ln \left| \sqrt[4]{x^3} + 1 \right| + C ;$$

$$4) \int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} \quad \text{Re sp.: } \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3} \right| + C ;$$

$$5) \int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx \quad \text{Re sp.: } \frac{2}{27} \sqrt[4]{x^9} - \frac{2}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + C .$$

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1) Integrais da forma: $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$; $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$ e $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$

Da trigonometria do segundo grau, temos as fórmulas abaixo:

$$\int \cos mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2} \int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx ;$$

$$\int \sin mx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2} \int [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx ;$$

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2} \int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx .$$

EXEMPLOS

$$a) \int \cos 4x \cdot \cos 7x dx ; \quad b) \int \sin x \cdot \sin 3x dx ; \quad c) \int \sin 3x \cdot \cos 2x dx .$$

2) Integrais da forma: $\int R(\cos x) \cdot \sin x \, dx$. Usualmente, a substituição conveniente é $\cos x = t$;

3) Integrais da forma: $\int R(\sin x) \cdot \cos x \, dx$. Usualmente, a substituição conveniente é $\sin x = t$;

EXEMPLOS (para os casos 2 e 3)

a) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x}$; b) $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^4 x}$ (“quebre” $\cos^3 x$ como $\cos^2 x \cdot \cos x$); c) $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{2 + \cos x}$.

4) Integrais da forma: $\int \operatorname{tg}^m x \cdot dx$. Normalmente, a substituição conveniente é $\operatorname{tg} x = t$. Note que $x = \operatorname{arctg} t \therefore dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

EXEMPLOS

a) $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$; b) $\int \frac{dx}{\cot^2 x}$; c) $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

5) Integrais da forma: $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ em que pelo menos um dos expoentes naturais **m** ou **n** é um número ímpar. Normalmente, a substituição conveniente é $\sin x = t$ (se **n** for ímpar) ou $\cos x = t$ (se **m** for ímpar). Lembre que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

EXEMPLOS

a) $\int \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$; b) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx$; c) $\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x \, dx$.

6) Integrais da forma: $\int R(\sin^n x, \cos^m x) \cdot dx$, onde as potências de $\sin x$ e $\cos x$ são pares. Normalmente, a substituição conveniente é $\operatorname{tg} x = t$ que tem como consequência:

$$x = \operatorname{arctg} t \therefore dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

EXEMPLOS

a) $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$; b) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; c) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; d) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} \, dx$.

- 7) Integrais da forma: $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ onde as potências de $\sin x$ e $\cos x$ são números não negativos e pares. Normalmente, usa-se $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ e / ou $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

EXEMPLOS

a) $\int \sin^4 x \, dx$; b) $\int \cos^4 x \, dx$; c) $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \, dx$.

- 8) Integrais da forma: $\int R(\sin x, \cos x) \cdot dx$. Usualmente, a substituição conveniente é $\tan \frac{x}{2} = t$ (chamada substituição universal, pois quando o “bicho pega” normalmente usamos esta substituição), que tem como consequência: $x = 2 \arctan t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

EXEMPLOS

a) $\int \frac{dx}{\sin x}$; b) $\int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}$; c) $\int \frac{dx}{4 - 5 \cos x}$; d) $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$; e) $\int \frac{\sin x \, dx}{1 + \sin x}$.

- 9) Integração de certas funções irracionais por meio de substituições trigonométricas.

Quando as funções irracionais são do tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$; $\sqrt{a^2 + x^2}$; $\sqrt{x^2 - a^2}$ onde a é uma constante positiva. As substituições sugeridas são:

Para $\sqrt{a^2 - x^2}$, usar $x = a \cdot \sin t$;

Para $\sqrt{a^2 + x^2}$, usar $x = a \cdot \tan t$;

Para $\sqrt{x^2 - a^2}$, usar $x = a \cdot \sec t$.

EXEMPLOS

a) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$; b) $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx$; c) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}}$; d) $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$; e) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4 + x^2)^5}}$.

Lista de exercícios

- 1) $\int \cos 4x \cdot \cos 7x \, dx$ $\text{Resp.: } \frac{\sin 11x}{22} + \frac{\sin 3x}{6} + C;$
- 2) $\int \sin 3x \cdot \cos 2x \, dx$ $\text{Resp.: } -\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C;$
- 3) $\int \sin x \cdot \sin 3x \, dx$ $\text{Resp.: } -\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C;$
- 4) $\int \sin 5x \cdot \sin 3x \, dx$ $\text{Resp.: } \frac{1}{4} \left(\sin 2x - \frac{\sin 8x}{4} \right) + C;$
- 5) $\int \sin x \cdot \cos 5x \, dx$ $\text{Resp.: } -\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 4x}{8} + C;$
- 6) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$ $\text{Resp.: } -\frac{1}{\sin x} + C;$
- 7) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx$ $\text{Resp.: } \cos \sec x - \frac{1}{3} \cos \sec^3 x + C;$
- 8) $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} \, dx$ $\text{Resp.: } \frac{(2 + \cos x)^2}{2} - 4(2 + \cos x) + 3 \ln(2 + \cos x) + C;$
- 9) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \, dx$ $\text{Resp.: } 2\sqrt{1 + \sin^2 x} + C; \text{ Sugestão: faça } 1 + \sin^2 x = t.$
- 10) $\int \text{tg}^4 x \, dx$ $\text{Resp.: } \frac{\text{tg}^3 x}{3} - \text{tg} x + x + C;$
- 11) $\int \text{tg}^3 x \, dx$ $\text{Resp.: } \frac{\text{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C;$
- 12) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ $\text{Resp.: } -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C;$
- 13) $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$ $\text{Resp.: } \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left(\frac{\text{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C;$

- 14) $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$ $\text{Resp.: } \frac{x}{16} - \frac{\sin^3 2x}{48} - \frac{\sin 4x}{64} + C;$
- 15) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ $\text{Resp.: } -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C$
- 16) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$ $\text{Resp.: } \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C;$
- 17) $\int \sin^3 x \, dx$ $\text{Resp.: } \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C;$
- 18) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$ $\text{Resp.: } \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C;$
- 19) $\int \sec 2x \, dx$ $\text{Resp.: } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} \right| + C;$
- 20) $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$ $\text{Resp.: } \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C;$
- 21) $\int \sin^2 3x \, dx$ $\text{Resp.: } \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C;$
- 22) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$ $\text{Resp.: } \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C;$
- 23) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x - 1}$ $\text{Resp.: } \frac{\ln |\operatorname{tg} x - 1|}{2} - \frac{\ln(\operatorname{tg}^2 x + 1)}{4} - \frac{x}{2} + C;$
- 24) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$ $\text{Resp.: } -\frac{1}{2} \left[\cot g x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) \right] + C;$
- 25) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \, dx$ $\text{Resp.: } \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - x + C;$
- 26) $\int \frac{\sin x \, dx}{1 + \sin x}$ $\text{Resp.: } \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)} + x + C;$

$$27) \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\text{Resp.: } \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \text{ ou, } \ln |\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C ;$$

$$28) \int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}$$

$$\text{Resp.: } \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} \right| + C ;$$

$$29) \int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}$$

$$\text{Resp.: } -\ln |2 - 2 \operatorname{tg}(x/2)| + C ;$$

$$30) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Resp.: } -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C ;$$

$$31) \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$$

$$\text{Resp.: } -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C ;$$

$$32) \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$\text{Resp.: } 2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} x \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{4} x^3 \sqrt{4 - x^2} + C ;$$

$$33) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Resp.: } -\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} + C ;$$

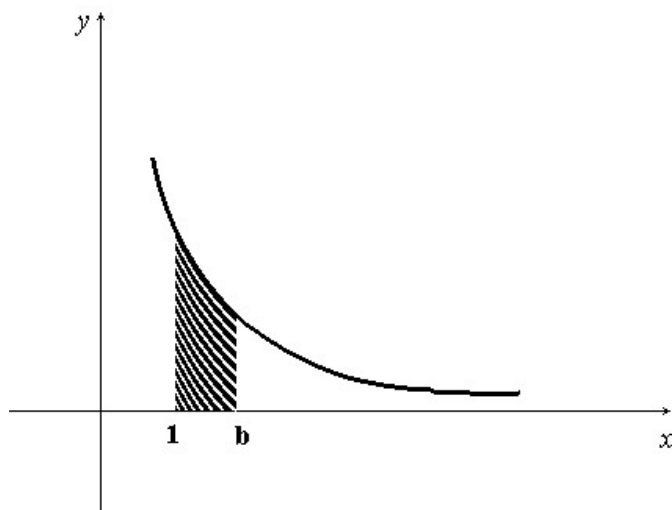
$$34) \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$$

$$\text{Resp.: } \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \arccos \left(\frac{a}{x} \right) + C .$$

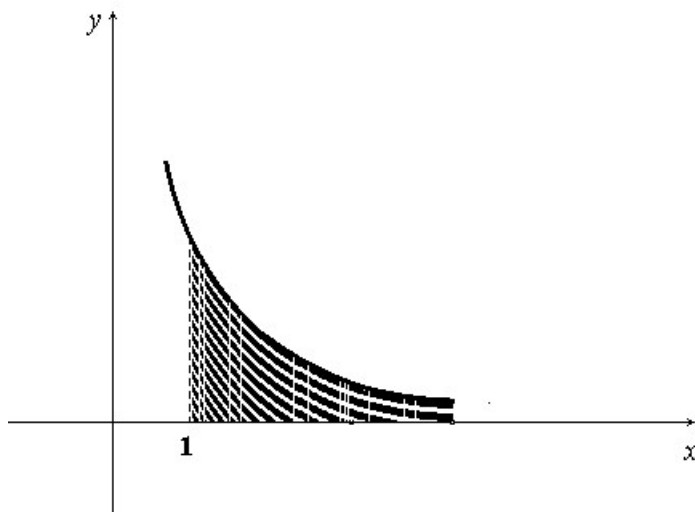
INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Dada a função $y = \frac{1}{x^2}$, fixemos $b \geq 1$ e tomemos a área $A(b)$ da região do plano limitada pelo gráfico da função, o eixo Ox e as retas $x = 1$ e $x = b$ (figura abaixo). Temos então que

$$A(b) = \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$



A área da figura limitada pelo gráfico da função, o eixo Ox e a reta $x = 1$ (veja a figura abaixo) é dada por $A(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[A(b) \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{b} \right] = 1 - 0 = 1$



DEFINIÇÃO 1: Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, +\infty)$. Dizemos que a integral imprópria de f em $[a, +\infty)$ converge e é igual a $I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f(x) dx \right)$ caso este limite exista (seja finito), caso contrário dizemos que a integral imprópria de f em $[a, +\infty]$ diverge.

Por comodidade, usaremos a notação: $I = \int_a^{+\infty} f(x) dx$.

OBSERVAÇÃO: No exemplo anterior, $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge e $I = 1$.

De modo análogo definimos $I = \int_{-\infty}^b f(x) dx$, assim $I = \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\int_a^b f(x) dx \right)$.

APLICAÇÃO:

Estude a convergência das integrais impróprias:

a) $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ (resposta: diverge, fazendo as contas, acharemos pois $I = +\infty$);

b) $I = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ (resposta: converge, pois $I = \frac{\pi}{2}$).

DEFINIÇÃO 2: Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $\mathbb{R}$. Tomemos $a \in \mathbb{R}$ um número qualquer.

Dizemos que a integral imprópria de f em $\mathbb{R}$ converge e é igual a $I = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$ caso estas integrais sejam ambas convergentes. Caso contrário (isto é, se pelo menos uma dessas integrais divergir) dizemos que a integral imprópria de f em $\mathbb{R}$ diverge.

Por comodidade, usaremos a notação: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

OBSERVAÇÃO: pode-se demonstrar que a definição acima independe do número real a considerado.

Estude a convergência das integrais impróprias:

a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (resposta: converge, pois $I = \pi$);

b) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ (resposta: converge, neste caso $I = 0$).

EXERCÍCIOS DIVERSOS

1º) Determine as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int \operatorname{tg} x \cdot \ln(\cos x) dx$

b) $\int \frac{e^{5x}}{1 + e^{10x}} dx$

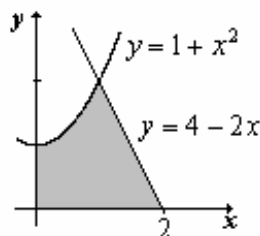
c) $\int \left(e^{2x} + \sqrt[3]{27x} + \frac{5}{x} \right) dx$

d) $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx + \int \frac{x^2}{1+x^6} dx$

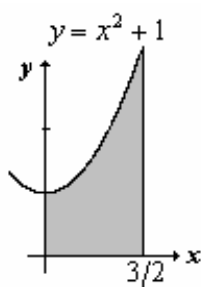
2º) Determine $f(x)$, sabendo que f é uma função derivável, f' é contínua, $f(1) = \frac{\pi}{2}$ e que $\int (1+x^4) f'(x) dx = x^2 + C$, com C constante real.

3º) Utilize integral definida para calcular o valor da área de cada região indicada:

a)



b)



4º) Determine as integrais indefinidas utilizando o método da substituição (mudança de variáveis):

a) $\int 2x(x^2 + 1)^5 dx$

b) $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$

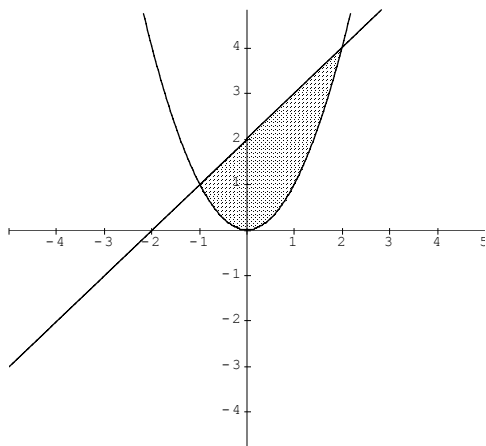
c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) dx$

d) $\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}} dx$

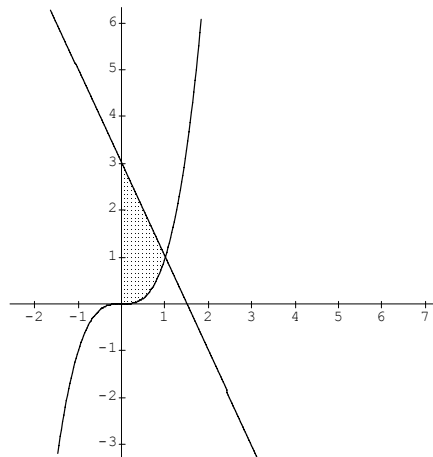
5º) Determine $f(x)$, sabendo que $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2x-3}{3\sqrt[3]{(x^2-3x)^2}}$ e $f(3) = \frac{4}{3}$.

6º) Determine o valor da área da região do plano limitada simultaneamente pelas curvas abaixo:

a) $y = x^2$, $y = x + 2$.



b) $y = x^3$, $x = 0$, $y = -2x + 3$.



7º) Calcule as seguintes integrais indefinidas:

7.1) $\int \left(\frac{x}{1+9x^4} + \frac{x^3}{1+9x^4} \right) dx$

7.2) $\int (e^{1/x} + 2) \frac{e^{1/x}}{x^2} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^7 x} dx$

LISTA DE CÁLCULO II

1) Calcule as integrais:

a) $\int_1^{2e} 4 \ln x \, dx$; b) $\int_1^2 x \cdot \ln x \, dx$; c) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$; d) $\int_1^3 x \cdot e^x \, dx$.

2) Verifique se as integrais impróprias convergem ou divergem:

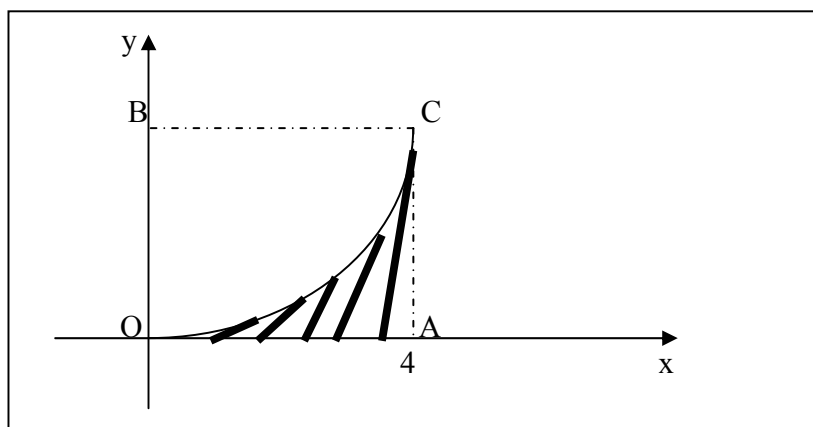
a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; b) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; c) $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$; e) $\int_0^{+\infty} x \, dx$.

3) Determine a área da região limitada pela curva $y = -x^2 + 3x - 2$, o eixo Ox e as retas $x = 1$ e $x = 2$.

4) Encontre a área limitada por $y = \sin x$ e o eixo Ox de 0 a 2π .

- 5) Determine a área da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.
- 6) Determine a área da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$.
- 7) Determine a área da região limitada por $y = \ln x$ e $x = 2$.
- 8) Determine a área da região limitada pelas curvas $x \cdot y = 4$ e $x + y = 5$.
- 9) Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = 2x - x^2$ e $y = 2^x$ e as retas $x = 0$ e $x = 2$.
- 10) Encontre a área limitada por $y = |x - 1|$, $y = x^2 - 2x$ o eixo Oy e a reta $x = 2$.
- 11) Determine a área da região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$.
- 12) Ache a área limitada pela curva $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ e o eixo Ox.
- 13) Encontre a área limitada pela parábola $y^2 = 2x - 2$ e a reta $y = x - 5$ o eixo Ox e a reta $x = 2$.
- 14) Encontre o volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo Ox, da superfície contida entre as parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.
- 15) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo Ox, da região limitada por $y = e^x$, $x \leq 0$ e $y = 0$.
- 16) Determine o volume gerado pela rotação, em torno do eixo Ox, da região limitada por $y^2 = x^3$ ($x > 0$), o eixo Ox e a reta $x = 4$.
- 17) Encontre o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo Ox, da região limitada por $y = x^2 + 1$ e a reta $y = x + 3$.
- 18) Encontre, por integração, o volume de um cone reto, de altura h unidades e raio da base r .

19) Achar o volume gerado pela rotação da área OAC (ver figura) em torno da reta BC.



FUNÇÕES DE VÁRIAS VÁRIÁVEIS

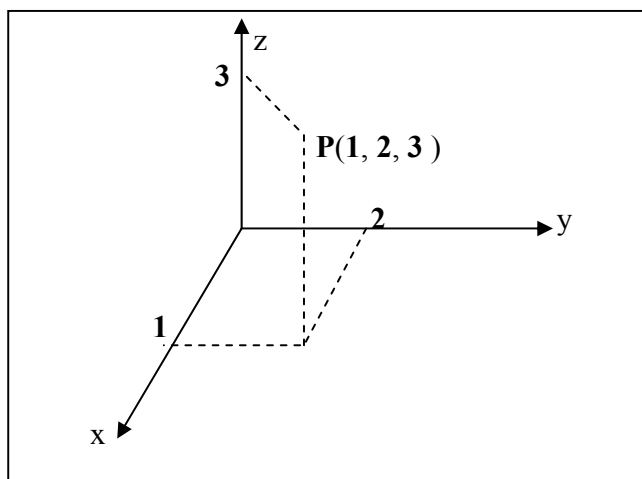
Você já reparou que:

- a) Índices de Inflação dependem dos preços de vários produtos?
- b) O volume de uma piscina, em forma de prisma quadrangular, por exemplo, depende das três dimensões, largura, altura e comprimento?
- c) O preço de um computador pode ser visto como função do preço dos diversos componentes, como processador, memórias, hd, etc...?

Nosso objetivo agora é conhecer um pouco mais sobre funções de várias variáveis.

Espaço numérico **n**-dimensional é o conjunto de todas as n-uplas ordenadas de números reais, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Indicamos por $\mathbb{R}^n$, isto é, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$.

EXEMPLO: $P(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Veja o gráfico abaixo



FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

Apesar de que estudaremos funções de três ou mais variáveis independentes a maioria das nossas definições e resultados será enunciada em relação a funções de duas variáveis pelo fato de que há uma interpretação geométrica para este caso.

De um modo geral uma função de duas variáveis independentes f é denotada por

$\left\{ \begin{array}{l} f : D \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto z \end{array} \right.$, onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é chamado de domínio da função f . Trocando em miúdos: Uma função

real de duas variáveis reais f , consiste em:

1) Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ de pares de números reais, denominado (do mesmo modo que no cálculo de uma variável) de domínio da função f ;

2) Uma regra que associa a cada elemento de D um único número real $z = f(x, y)$.

Quando estudamos funções de uma variável o domínio nem sempre era o conjunto dos números reais mas normalmente era o conjunto de todos os $x \in \mathbb{R}$ para o qual a função estava bem definida, analogamente o domínio (D) da função $z = f(x, y)$ é o conjunto de todos os $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para os quais está definida a função $z = f(x, y)$.

Geometricamente o domínio de $z = f(x, y)$ é um conjunto de pontos no plano.

Dê o domínio das seguintes funções:

1) $f(x, y) = x^2 + y^3$.

2) $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$.

3) $f(x, y) = \ln(x - y)$.

4) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Em sala de aula vamos fazer juntos os seguintes gráficos:

a) $z = f(x, y) = 0$ (veremos que é o plano xy).

b) $z = f(x, y) = 3$ (veremos que é um plano paralelo ao plano xy com cota $z = 3$).

c) $z = x$ (veremos que é um plano).

d) $z = x^2 + y^2$ (denominamos esta superfície de parabolóide).

e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (esta superfície é um cone).

f) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (esta superfície é uma semi-esfera).

DERIVADAS PARCIAIS

1) Incremento (acrécimo) parcial e total.

Se $z = f(x, y)$, o **incremento parcial de z em relação a x** , que indicamos por $\Delta_x z$ (acrécimo parcial em relação a x) é dado por: $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

Analogamente o **acrécimo parcial de z em relação a y** é: $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Se dermos simultaneamente um acréscimo de Δx à variável x e um acréscimo de Δy à variável y , obtemos um acréscimo correspondente a z que indicamos por Δz , chamado **acrécimo total** matematicamente: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

2) Derivadas parciais.

Seja $z = f(x, y)$. A derivada parcial de f (ou de z) em relação a x , é por definição, o limite (quando tal limite for um número real):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

De agora em diante, usaremos os símbolos $\frac{\partial z}{\partial x}$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Analogamente:

Seja $z = f(x, y)$. A derivada parcial de f em relação a y , é, por definição, o limite (quando tal limite existe):

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

De agora em diante, usaremos indiferentemente os símbolos $\frac{\partial z}{\partial y}$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}$.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Desde que, ao calcular, por exemplo, $\frac{\partial f}{\partial y}$, a variável x é

considerada como uma constante (um número real fixo), trata-se, em essência de calcular a derivada de uma função de **uma variável!**

Portanto, é natural que as regras para calcular as derivadas parciais sejam as mesmas regras que se usam para calcular as derivadas das funções de uma variável.

EXEMPLO: $z = x^2 \cdot \text{sen } y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \text{sen } y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot \cos y$$

3) **Derivadas parciais de ordens superiores.**

Seja $z = f(x, y)$ e as derivadas de primeira ordem $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$. Podemos definir:

$$\text{a) } \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

$$\text{b) } \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$\text{c) } \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};$$

$$\text{d) } \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

As derivadas acima são chamadas de derivadas de segunda ordem da função $z = f(x, y)$.

As derivadas das letras c) e d) são chamadas derivadas mistas de segunda ordem da função $z = f(x, y)$.

APLICAÇÕES:

1) Se $z = x^2 + y^3$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. (o que você notou sobre as duas últimas derivadas, isto é, as mistas?).

2) Se $f(x, y) = x^3 + x^2 y^5 + x^4 y - \ln y + \ln(xy)$, determine $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

(o que você notou sobre as duas últimas derivadas, isto é, as mistas?)

3) Se $f(x, y) = \text{sen}(x^2 + xy) + y$, determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

4) Se $f(x, y) = x \ln \left(\frac{x^2}{y-1} \right) + 3y$, determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

5) Se $f(x, y, z) = e^{x^2 y} + \text{tg } z$, determine $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$.

6) Se $f(x, y) = \frac{\cos y}{x} - yx^3$, determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

7) Considere a função $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Verifique se $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)$.

Até agora nós usamos as regras práticas que vocês aprenderam em Cálculo I (para funções de uma variável) com o objetivo de calcular as derivadas parciais, mas é importante você lembrar que, se $z = f(x, y)$, temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Considere a função $z = f(x, y) = x^2 y^3$, vamos calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, usando a definição:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 y^3 - x^2 y^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y^3 [(x + \Delta x)^2 - x^2]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y^3 [x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y^3 [\cancel{\Delta x} (2x + \Delta x)]}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [y^3 (2x + \Delta x)] = 2xy^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x^2 (y + \Delta y)^3 - x^2 y^3}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2 y^3} + 3x^2 y^2 \Delta y + 3x^2 y (\Delta y)^2 + x^2 (\Delta y)^3 - \cancel{x^2 y^3}}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta y} [3x^2 y^2 + 3x^2 y \Delta y + x^2 (\Delta y)^2]}{\cancel{\Delta y}} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [3x^2 y^2 + 3x^2 y \Delta y + x^2 (\Delta y)^2] = 3x^2 y^2 \end{aligned}$$

DIFERENCIAL TOTAL

Seja $z = f(x, y)$.

Sabemos que $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Definimos a diferencial total dz de uma função, à expressão: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$.

Quando $(\Delta x \rightarrow 0 \text{ e } \Delta y \rightarrow 0) \Rightarrow \Delta z \cong dz$.

APLICAÇÕES (resolveremos em sala):

- 1) Calcular o valor aproximado da variação da hipotenusa de um triângulo cujos catetos medem 6 cm e 8 cm quando o cateto menor é aumentado de 0,5 cm e o maior cateto é diminuído de 0,125 cm. **Resposta: 1/5.**
- 2) A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \frac{V^2}{R}$ watts (onde a voltagem V é medido em volts e a resistência R é medida em ohms). Se $V = 100$ volts e $R = 10$ ohms, calcule um valor aproximado para a variação ΔP em P , quando V decresce 0,2 volt e R aumenta de 0,01 ohm. **Resposta: aproximadamente – 5 watts.**

DERIVADA TOTAL

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO COMPOSTA (DERIVADA TOTAL)

- 1) Suponha $z = f(x, y)$ e $x = g(t)$ e $y = h(t)$, assim, a derivada total $\frac{dz}{dt}$ é definida como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

EXEMPLO

Seja $z = x^4 + 3xy + 1$ com $x = 2t + 1$ e $y = t^2$, calcule $\frac{dz}{dt}$.

- 2) Suponha agora que $z = f(x, y)$ e $y = h(x)$, isto é, z é na verdade uma função de uma variável apenas (a variável x), assim a fórmula acima $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ se tornará:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} \text{ mas } \frac{dx}{dx} = 1 \text{ e, portanto, temos finalmente: } \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

EXEMPLO

Se $z = 2y^3 + x^2$ e $y = \frac{1}{x}$, determine $\frac{dz}{dx}$.

- 3) Derivada de uma função na forma implícita:

Dizemos que, por exemplo, $y = \frac{x-1}{3x+1}$ representa a forma explícita da dependência entre y e x .

Infelizmente nem sempre é simples explicitar y como função de x (às vezes é mesmo

impossível). Existem algumas maneiras de contornar esse problema, quando queremos derivar y como função de x , uma delas é usando o argumento do item 2), visto acima:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (\text{que denotaremos por } *). \text{ Vejam alguns exemplos:}$$

a) Ache $\frac{dy}{dx}$, sabendo que $y = f(x)$ e que $x^3y^4 - x^2y^3 + x^5 = y^5$. O “truque” é escrever

$x^3y^4 - x^2y^3 + x^5 - y^5 = 0$ e denotar a **expressão nula** $x^3y^4 - x^2y^3 + x^5 - y^5$ como z . Assim:

$z = x^3y^4 - x^2y^3 + x^5 - y^5 = 0$, usando *: $0 = \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$, “tirando” o valor de $\frac{dy}{dx}$, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{3x^2y^4 - 2xy^3 + 5x^4}{4x^3y^3 - 3x^2y^2 - 5y^4}.$$

b) Determine $\frac{dy}{dx}$, sabendo que $y = f(x)$ e que $x^2 + y = xy$ (Será que você consegue fazer?)

EXERCÍCIOS

Calcule a expressão e o valor no ponto dado das derivadas indicadas abaixo:

a) $x^2 + y^2 = 4$, $\frac{dy}{dx}$, no ponto $P(1, \sqrt{3})$, e $\frac{dx}{dy}$, no ponto $Q(\sqrt{3}, 1)$

b) $y^4 + 2y - 4x^2 = 5x - 1$, $\frac{dy}{dx}$, no ponto $P(0, -1)$

c) $y - x - \frac{1}{4}\sin(y) = 0$, $\frac{dy}{dx}$, no ponto de ordenada $\frac{\pi}{2}$

d) $e^y + xy = e$, y' , no ponto de ordenada 1

e) $xy^2 + y^3 = 2x - 2y + 1$, y' , no ponto em que a abscissa e a ordenada são iguais

FUNÇÃO HOMOGÊNEA

Diz-se que uma função $z = f(x, y)$ é homogênea de grau $n \geq 0$ se e somente se

$$f(kx, ky) = k^n \cdot f(x, y) \text{ com } k > 0.$$

EXEMPLOS:

1) $f(x, y) = x^2 \cdot y^2$ (verifique que $f(x, y)$ é homogênea de grau 4).

2) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (verifique que $f(x, y)$ é homogênea de grau 0).