UNIVERSIDADE CATÓLICA DO SALVADOR
CURSO: INFORMÁTICA DISCIPLINA: ÁLGEBRA
PROFESSOR: ATAUALPA MAGNO FERRAZ DE NOVAES
PRIMEIRO SEMESTRE DE 2006

Prezados Alunos, sejam bem-vindos ao nosso curso de Álgebra

Desejo que vocês possam desfrutar destas notas de aula. O sabor coloquial com que procuramos "temperar" estas anotações certamente facilitará a aprendizagem da matéria.
Um agradecimento muito especial à professora **Jolândia Vila**, pelo incentivo e constante auxílio que ela me prestou ao longo do tempo que tive a honra e o prazer de trabalhar ao lado dela. Uma grande parte do que está aqui registrado teve origem nas anotações de aula da própria Jolândia. Quero registrar também minha admiração, respeito e especial carinho aos autores de livros, excelentes mestres, Edgard de Alencar Filho e Leônidas Hegenberg. Outro agradecimento especial aos meus ex-alunos, Leonardo Leandro (**Webmaster**), Dioney Mascarenhas e Caio Moreira por disponibilizarem este material na Internet.
Desde que desejamos aprimorar este trabalho ao longo do tempo, sugestões e críticas serão bem vindas.
Email: amferraznovaes@ig.com.br ou ataualpa@im.ufba.br.
Telefones: 3353-4784 ou 9179-1925

CONJUNTOS NUMÉRICOS FUNDAMENTAIS

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é representado por $\mathbb{N}$ e é definido como:

$\mathbb{N}$ **= { 0, 1, 2, 3, 4, ... }.**

Observação: $\mathbb{N}$ *** = { 1, 2, 3, 4, ... }. Isto é, o *asterisco* exclui o zero do conjunto** $\mathbb{N}$ **.**

Note que nem sempre a **subtração** de dois números naturais, tem como resultado um número natural. Portanto, vamos "ampliar" $\mathbb{N}$ de modo que, a operação de subtração possa ser definida para quaisquer números do novo conjunto. Obteremos assim, o conjunto dos números inteiros:

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros é representado por $\mathbb{Z}$ e é definido como:

$\mathbb{Z}$ **= {... , -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... }**

Observação: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} =$ **{... , – 4, – 3, – 2, – 1, 1, 2, 3, 4, ... }**

Note que nem sempre a **divisão** de dois números inteiros, tem como resultado um número inteiro. Portanto, vamos "ampliar" $\mathbb{Z}$ de modo que, a operação de divisão possa ser definida para quaisquer números do novo conjunto, **exceto quando o divisor for zero**. Obteremos assim, o conjunto dos números racionais:

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS ($\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q}$ = { x; x = p/q com p $\in \mathbb{Z}$, q $\in \mathbb{Z}$ e q $\neq$ 0 }, ou seja: $\mathbb{Q}$ = { x; x = p/q com p $\in \mathbb{Z}$, q $\in \mathbb{Z}^*$ }

Temos então que número racional é aquele que pode ser escrito na forma de uma fração p/q onde p e q são números inteiros, com o denominador diferente de zero.

Lembre-se que **<u>NÃO EXISTE DIVISÃO POR ZERO</u>!**

Note que 0/3 = 0/7 = 0, **<u>mas não existem</u>**, por exemplo: 3/0, 7/0, nem também 0/0.

São exemplos de números racionais: 2/3; – 3/7; 0,001 = 1/1000; 0,75 = 3/4; 0,333... = 1/3; 7 = 7/1, etc...

<u>Nota</u>: é fácil ver que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Observou-se que há números, como, por exemplo, $\sqrt{2}$ = 1,414213562... que não pertencem a $\mathbb{Q}$, isto é, que não podem ser escritos como quociente de dois números inteiros. Os matemáticos então definiram o conjunto dos números irracionais:

CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS (Símbolos: *I* ou $\mathbb{Q}$')

$\mathbb{Q}$'= *I* = { x; x é um número que pode ser expresso como decimal infinito e não periódico }.

Exemplos de números irracionais:

a) π = 3,1415926535897932... (pi = razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro);
b) e = 2,71828... (e é chamado número de Euler);
c) $\sqrt{2}$ = 1,414213562... ;
d) $\sqrt{3}$ = 1,732050807... ;
e) 2,01001000100001... (decimal infinito e não periódico);
f) $-\pi$;
g) $4e$;
h) $3\sqrt{2}$;
i) $7e + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + \pi$.

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS ($\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}$ = { x; x é racional ou x é irracional }.

<u>Notas</u>:
a) é óbvio que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;

b) $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R}$;
c) $\mathbb{R} = \boldsymbol{I} \cup \mathbb{Q}$ (isto significa que um número real ou é racional ou irracional; não tem outra chance!).

INTERVALOS NUMÉRICOS

Dados dois números reais distintos p e q, chama-se **intervalo** a todo conjunto de todos números reais compreendidos entre p e q , podendo inclusive incluir p e q. Os números p e q são os limites do intervalo, sendo a diferença p – q , chamada amplitude do intervalo.
Se o intervalo incluir p e q , o intervalo é fechado e caso contrário, o intervalo é dito aberto.
A tabela abaixo, define os diversos tipos de intervalos.

TIPOS	REPRESENTAÇÃO	OBSERVAÇÃO
INTERVALO FECHADO	$[\ p;\ q\ ] = \{\ x \in \mathbb{R}\ ;\ p \le x \le q\ \}$	inclui os limites p e q
INTERVALO ABERTO	$(\ p;\ q\ ) = \{\ x \in \mathbb{R}\ ;\ p < x < q\ \}$	exclui os limites p e q
INTERVALO FECHADO À ESQUERDA	$[\ p;\ q\ ) = \{\ x \in \mathbb{R}\ ;\ p \le x < q\ \}$	inclui p e exclui q
INTERVALO FECHADO À DIREITA	$(\ p;\ q\ ] = \{\ x \in \mathbb{R}\ ;\ p < x \le q\ \}$	exclui p e inclui q
INTERVALO SEMI-FECHADO	$[\ p;\ +\infty\ ) = \{\ x \in \mathbb{R}\ ;\ x \ge p\ \}$	valores maiores ou iguais a p.
INTERVALO SEMI-FECHADO	$(-\infty\ ;\ q\ ] = \{\ x \in \mathbb{R}\ ;\ x \le q\ \}$	valores menores ou iguais a q.
INTERVALO ABERTO	$(\ -\infty\ ;\ q\ ) = \{\ x \in \mathbb{R}\ ;\ x < q\ \}$	valores menores do que q.
INTERVALO ABERTO	$(\ p;\ +\infty\ ) = \{\ x \in \mathbb{R}\ ;\ x > p\ \}$	valores maiores do que p.

NOTA: é fácil observar que o conjunto dos números reais (o conjunto $\mathbb{R}$) pode ser representado na forma de intervalo como $\mathbb{R} = (\ -\infty;\ +\infty\ )$.

CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS ($\mathbb{C}$)

$\mathbb{C} = \{\ x = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}i;\ \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ pertencem a $\mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}\ \}$.

Notas:
a) é fácil concluir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
b) é óbvio que $\boldsymbol{I} \subset \mathbb{C}$.

OBSERVAÇÃO: Vamos relembrar que, dado um conjunto A, com n elementos, o conjunto de todos os subconjuntos de A, denominado conjunto das partes de A e representado por $\wp(A)$ tem 2^n elementos; veja os exemplos abaixo:

a) se $A = \{1,2\}$, o conjunto das partes de A, $\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$;

b) se $B = \{0,1,2\}$, $\wp(B) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}\{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$;

ÁLGEBRA DE BOOLE E CIRCUITOS DE CHAVEAMENTO

Por volta de 1850, um matemático inglês chamado **George Boole**, escreveu um livro chamado "Investigações sobre as leis do pensamento humano" buscando regras "algébricas" para os raciocínios lógicos, semelhantes às regras algébricas comuns usadas nos raciocínios numéricos.
Boole foi ridicularizado na época pelo fato de que ninguém via aplicação prática para o seu trabalho.

Mas, em 1938, o Matemático americano (e Engenheiro Elétrico) Claude Shannon, em sua tese de mestrado no Instituto de Tecnologia de Massachusets (M.I.T) apresentou uma abordagem extremamente elegante que relacionava uma Álgebra Booleana (com apenas dois elementos, genericamente designados por "0" e "1") com os circuitos digitais (desligados correspondendo ao "0" e ligados correspondendo ao "1").

Prezados alunos, ao longo dos mais de 25 anos de ensino eu escuto a pergunta (feita por alguns alunos) "professor, onde é que eu vou aplicar esse conhecimento?" Espero que a narração que fiz acima possa ajudar vocês a compreender melhor que, nem sempre a prática antecede à teoria...

Vamos estudar um pouco sobre esse "casamento" perfeito entre Álgebra Booleana e os circuitos digitais.

DEFINIÇÃO: Seja $B \neq \varnothing$ um conjunto com três operações: duas binárias "$\vee$"= "join" (ou junção) e "$\wedge$"= "meet" (ou encontro) e uma operação singular " ' " = complementação Booleana, e no qual destacam-se, pelo menos, os elementos **distintos** "0" e "1". Diz-se que $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ é uma álgebra Booleana se e somente se, os **oito axiomas** abaixo são satisfeitos:

(1) $x \vee y = y \vee x, \forall x, y \in B$;
(2) $x \wedge y = y \wedge x, \forall x, y \in B$;
(3) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \forall x, y, z \in B$;
(4) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \forall x, y, z \in B$;
(5) $x \vee 0 = x, \forall x \in B$;
(6) $x \wedge 1 = x, \forall x \in B$;
(7) $\forall x \in B, \exists x' \in B; x \wedge x' = 0$;
(8) $\forall x \in B, \exists x' \in B; x \vee x' = 1$;

EXEMPLOS:

I) $B = \{0,1\}$, $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ com as tábuas abaixo é uma Álgebra Booleana:

TABELA 1

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

TABELA 2

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

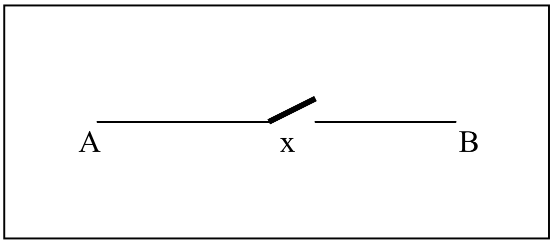
Onde naturalmente 0’ = 1 e 1’ = 0.

$\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$ é uma álgebra de Boole. Esta álgebra é conhecida como álgebra dos interruptores e é a mais útil das álgebras Booleanas. É o fundamento matemático da análise e projeto dos circuitos de interruptores (circuitos de chaveamento) que compõem os sistemas digitais.

Vamos visualizar em termos de circuitos elétricos com interruptores (ou chaves):

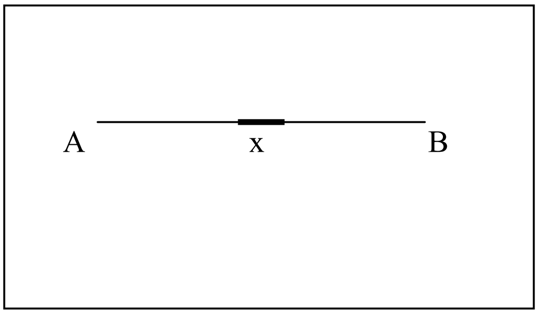
CIRCUITOS COM APENAS UMA CHAVE

Chave aberta (interruptor desligado):



Como a corrente não atravessa do ponto A ao ponto B, designaremos a chave aberta por 0 (zero).

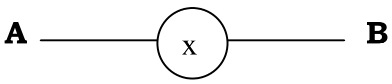
Chave fechada (interruptor ligado):



Como a corrente atravessa do ponto A ao ponto B, a chave fechada será designada por 1 (um).

É natural inferir que 0’ = 1 e 1’ = 0.

<u>Convenção</u>: ao representarmos circuitos com uma ou mais chaves e não quisermos determinar se a chave está aberta ou fechada, desenharemos um círculo para representar tal chave, assim:

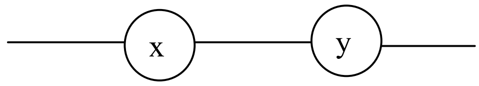


representa um interruptor (chave) que pode estar ligado ou desligado.

Sua função Booleana ou polinômio Booleano é $f(x) = x$.

CIRCUITOS COM DUAS CHAVES

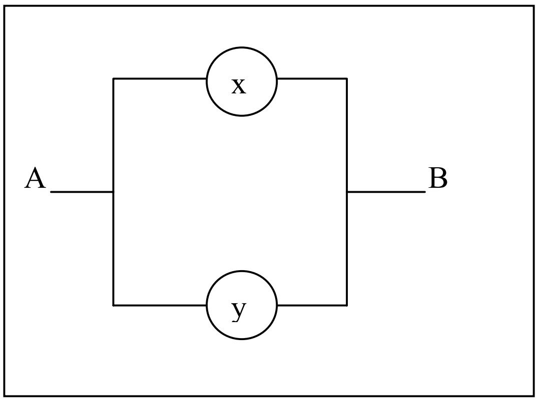
CIRCUITOS EM SÉRIE **(Funciona exatamente como a TABELA 1 acima. Verifique!)**



Sua função Booleana ou polinômio Booleano é $f(x,y) = x \wedge y$ **.**

ATENÇÃO: ***Observe que, de acordo com a Tabela 1, as chaves podem estar, ao todo, em 4 posições, isto é: um-um; um-zero, zero-um e zero-zero.***

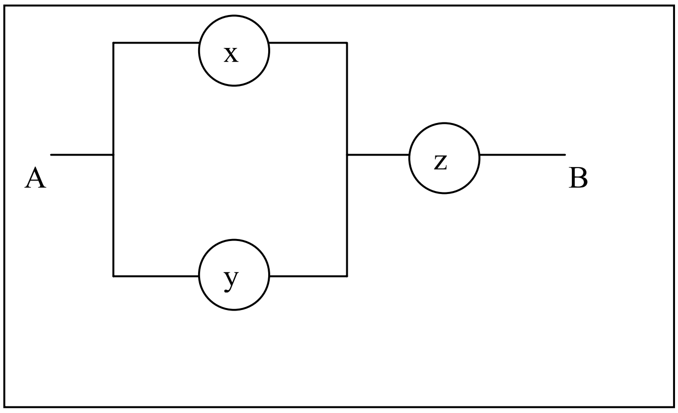
CIRCUITOS EM PARALELO: **(Funciona exatamente como a TABELA 2 acima. Verifique!)**



Sua função Booleana ou polinômio Booleano é $f(x,y) = x \vee y$ **.**

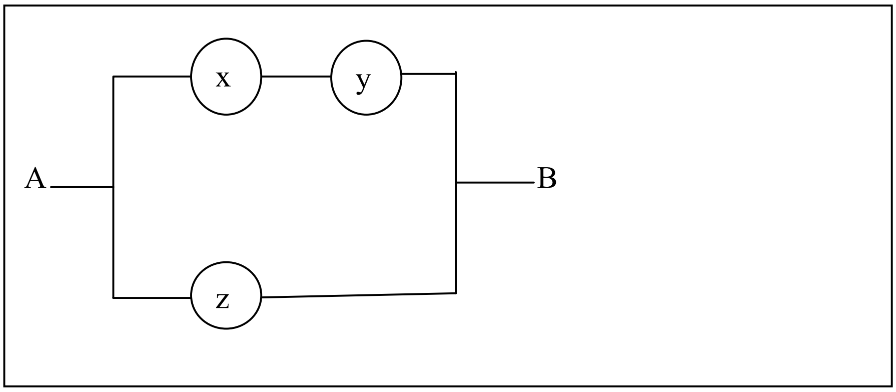
Determine a função Booleana ou polinômio Booleano que representa os circuitos abaixo:

a)



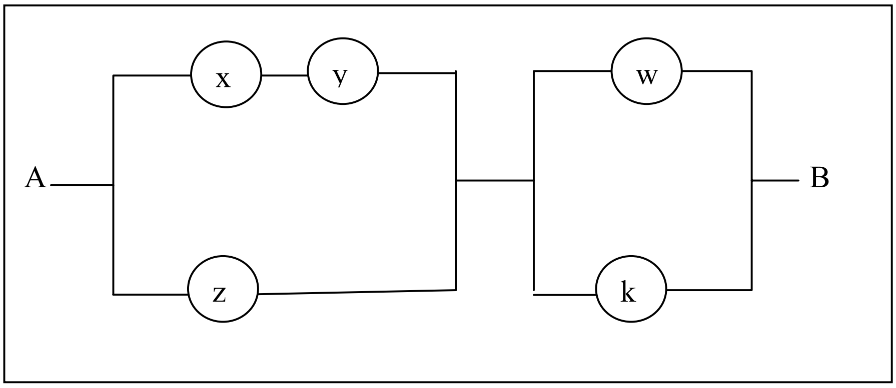
RESPOSTA: $f(x,y,z) = (x \vee y) \wedge z$

b)



RESPOSTA: $f(x,y,z) = (x \wedge y) \vee z$

c)



RESPOSTA: $f(x,y,z,w,k) = \left[(x \wedge y) \vee z\right] \wedge (w \vee k)$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: A ***<u>álgebra dos circuitos digitais</u>*** possui **apenas** dois elementos: 0 (zero = desligado) e 1 (um = ligado), mas ***<u>existem outras</u>*** álgebras Booleanas que possuem mais de dois elementos. Veja um exemplo abaixo;

Prove que se $B = \{1,2\}$**, então** $\wp(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$**, <u>com as tabelas abaixo</u>, é uma Álgebra de Boole, mais precisamente,** $\langle \wp(B), \cup, \cap, ', \varnothing, \{1,2\} \rangle$**, é uma Álgebra Booleana (note que** $\wp(B)$ **possui quatro elementos):**

$\cup$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$

$\cap$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{1,2\}$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\{1\}$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\varnothing$
$\{2\}$	$\varnothing$	$\{2\}$	$\varnothing$	$\{2\}$

$'$	
$\varnothing$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\varnothing$
$\{1\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{1\}$

Assim, $\langle \wp(B),\cup,\cap,',\varnothing,\{1,2\}\rangle$ é uma Álgebra de Boole com ***quatro*** elementos, onde o "0" é indicado por $\varnothing$ e o "1" é indicado por $\{1,2\}$. Os outros dois elementos são $\{1\}$ e $\{2\}$.

As propriedades abaixo devem ser demonstradas com base nos **oito axiomas** dados no início do estudo da álgebra Booleana (pois, como você viu acima nem toda Álgebra Booleana possui apenas dois elementos).

Alguns resultados importantes:

a) Se $\langle B,\vee,\wedge,',0,1\rangle$ é uma álgebra de Boole e $x'\in B$ é o complemento Booleano de $x\in B$, então x' é único;

b) $(x')'=x$;

c) $x\vee x=x$;

Demonstração de c): $x=x\vee 0=x\vee(x'\wedge x)=(x\vee x')\wedge(x\vee x)=1\wedge(x\vee x)=x\vee x$, usando os axiomas citados na definição de álgebra de Boole. São eles: (5); (7), (3), (8) e (6).

d) $x\wedge x=x$.

Faça as outras demonstrações como exercício.

<u>DUALIDADE NUMA ÁLGEBRA DE BOOLE</u>

<u>DEFINIÇÃO</u>: Por ***<u>dual</u>*** de uma proposição com relação a uma álgebra Booleana B, entendemos a proposição obtida pela substituição de $\vee$ *por* $\wedge$, $\wedge$ *por* $\vee$, 1 *por* 0 e 0 *por* 1.

<u>EXEMPLOS</u>:

a) A proposição dual de $y \vee x' = 0$ é $y \wedge x' = 1$;

b) Dualize: $(x \wedge y') \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (y \wedge z')$. **Resposta:** $(x \vee y') \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge (y \vee z')$.

<u>OBSERVAÇÃO IMPORTANTE</u>: Se valer uma fórmula (isto é, se ela for verdadeira) a dual dessa fórmula também vale. Tome como exemplo as fórmulas c) e d) dadas acima, na página 8 (no tópico “alguns resultados importantes”):

c) $x \vee x = x$;

d) $x \wedge x = x$.

Outros resultados importantes:

Se $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$ é uma álgebra de Boole então $\forall x, y, z \in B$ temos:

(i) $x \wedge 0 = 0$; (O “0” é o elemento absorvente da operação $\wedge$)
(ii) $x \vee 1 = 1$; (O “1” é o elemento absorvente da operação $\vee$)
(iii) $0' = 1$;
(iv) $1' = 0$;
(v) $x \wedge (x \vee y) = x$; (Primeira lei da absorção, muito importante em outras demonstrações)
(vi) $x \vee (x \wedge y) = x$; (Segunda lei da absorção, também muito importante em outras demonstrações)
(vii) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; (Associatividade da operação $\vee$)
(viii) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$; (Associatividade da operação $\wedge$)
(ix) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$;
(x) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

<u>EXERCÍCIO</u>: **Demonstre apenas (i), (ii), (v) e (vi).**

FORMA NORMAL CONJUNTIVA, DISJUNTIVA E COMPLEMENTAR

Voltaremos agora a estudar ***apenas*** a Álgebra dos circuitos digitais, recorde as tabelas estudadas anteriormente. Lembre do exemplo da página 4:

I) $B = \{0,1\}$, $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ com as tábuas abaixo é uma Álgebra Booleana:

TABELA 1

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

TABELA 2

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Onde naturalmente 0' = 1 e 1' = 0.

$\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ é uma álgebra de Boole. Esta álgebra é conhecida como álgebra dos interruptores e é a mais útil das álgebras Booleanas. É o fundamento matemático da análise e projeto dos circuitos de interruptores (circuitos de chaveamento) que compõem os sistemas digitais.

Observe as expressões Booleanas: $f_1(x,y,z) = (x \vee y) \wedge z$ e $f_2(x,y,z) = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.
Elas são representações distintas da mesma função (basta você utilizar a distributividade...) Existem formas canônicas (ou padrões clássicos) no estudo da álgebra Booleana; são elas as **formas normais conjuntiva (fnc), disjuntiva (fnd) complementar (g)**.
A explicação da origem dessas fórmulas é belíssima, e será feita em sala de aula onde faremos também diversos exercícios.

EXEMPLO 1:

Ache a **fnc**, a **fnd** e **g** de $f(x,y) = x \wedge (x \vee y')$.

Primeiro passo: Faça a tabela verdade:

x	y	y'	x ∨ y'	x ∧ (x ∨ y')
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0

A forma normal disjuntiva "só utiliza" os resultados iguais a "1", assim: $fnd(x,y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$.

A função complementar "só considera" os resultados iguais a "0", deste modo:

$g(x,y) = (x' \wedge y) \vee (x' \wedge y')$.

A forma normal conjuntiva “só considera” os resultados iguais a “0”, mas usando a negação de cada parte; para você entender melhor, observe:

$$fnc(x,y)=[g(x,y)]'=[(x'\wedge y)\vee(x'\wedge y')]'=(x'\wedge y)'\wedge(x'\wedge y')'=(x\vee y')\wedge(x\vee y)$$

<u>EXEMPLO 2</u>:

Determinar a **fnc**, a **fnd** e **g** de $f(x,y,z)=(x\vee y)\wedge(x\vee y')\wedge(x'\vee z)$.

x	**y**	**z**	**x'**	**y'**	**x ∨ y**	**x ∨ y’**	**x' ∨ z**	$f(x,y,z)$
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

$$fnd(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z)$$

$$g(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y'\wedge z').$$

$$fnc(x,y,z)=(x'\vee y'\vee z)\wedge(x'\vee y\vee z)\wedge(x\vee y'\vee z')\wedge(x\vee y'\vee z)\wedge(x\vee y\vee z')\wedge(x\vee y\vee z).$$

<u>MAPA DE KARNAUGH</u>

Processo figurativo que permite simplificar funções booleanas (conseqüentemente também permite simplificar circuitos de chaveamento) **dadas na forma normal disjuntiva** (**fnd**).
Detalharemos o processo em sala de aula.

EXERCÍCIOS

1º) Construa um circuito de chaveamento que depende de dois interruptores satisfazendo a:

(1) a corrente passa quando as duas chaves estão desligadas;
(2) a corrente não passa quando pelo menos uma das chaves está ligada;
(3) determine a fnd, simplifique esse circuito pelo método de Karnaugh e esboce o circuito simplificado.

2º) Um farol é controlado por um circuito de chaveamento que depende de duas chaves satisfazendo a:

(1) o farol acende quando apenas uma chave está desligada;
(2) o farol não acende quando ambas as chaves estão desligadas ou ambas ligadas;

(3) determine a fnd, simplifique esse circuito pelo método de Karnaugh e esboce o circuito simplificado.

3º) Uma lâmpada é controlada por um circuito que depende de 3 interruptores de modo que:

(1) a lâmpada acende se pelo menos 2 interruptores estão ligados;
(2) a lâmpada não acende se pelo menos 2 interruptores estão desligados;
(3) determine a fnd, simplifique esse circuito pelo método de Karnaugh e esboce o circuito simplificado.

4º) O sistema de comunicação interna de uma fábrica é controlado por um circuito de chaveamento que depende de três interruptores x, y e z, satisfazendo às seguintes condições:

(1) o sistema não é ligado se x está desligado;
(2) o sistema não é ligado se pelo menos 2 interruptores estão desligados;
(3) o sistema é ligado nos demais casos.

(a) Encontrar uma função Booleana (FND OU FNC, a que você preferir…) que represente tal circuito;
(b) **Simplificar**, pelo método de Karnaugh, a função encontrada. **Desenhe o circuito simplificado.**

5º) Construir um circuito de chaveamento com o menor número de chaves possível, definido pelo mapa de Karnaugh: (**Desenhe o circuito simplificado)**

	$x \wedge y$	$x \wedge y'$	$x' \wedge y'$	$x' \wedge y$
$z \wedge w$		√	√	
$z \wedge w'$		√	√	
$z' \wedge w'$				
$z' \wedge w$	√			√

LISTA DE ÁLGEBRA

1) Dadas as funções Booleanas abaixo, na forma normal disjuntiva, simplifique-as, quando possível, utilizando o processo de minimização conhecido como mapa de Karnaugh

a) $f(x,y)=(x\wedge y)\vee(x'\wedge y)$

b) $f(x,y)=(x\wedge y)\vee(x'\wedge y')\vee(x\wedge y')$

c) $f(x,y)=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)$

d) $f(x,y)=(x'\wedge y)\vee(x'\wedge y')\vee(x\wedge y')$

e) $f(x,y,z)=(x\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y'\wedge z)$

f) $f(x,y,z)=(x'\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z')$

g) $f(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z')$

h) $f(x,y,z)=(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y'\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z')$

i) $f(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z')$

j) $f(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')$

l) $f(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z')$

m) $f(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')$

n) $f(x,y,z,w)=(x\wedge y'\wedge z\wedge w')\vee(x'\wedge y'\wedge z\wedge w')$

o) $f(x,y,z,w)=(x\wedge y\wedge z'\wedge w')\vee(x\wedge y'\wedge z'\wedge w')\vee(x\wedge y\wedge z'\wedge w)\vee(x\wedge y'\wedge z'\wedge w)$

p) $f(x,y,z,w)=(x\wedge y'\wedge z\wedge w)\vee(x'\wedge y'\wedge z\wedge w)\vee(x\wedge y'\wedge z\wedge w')\vee(x'\wedge y'\wedge z\wedge w')\vee$
$(x\wedge y'\wedge z'\wedge w')\vee(x'\wedge y'\wedge z'\wedge w')\vee(x\wedge y'\wedge z'\wedge w)\vee(x'\wedge y'\wedge z'\wedge w)$

q) $f(x,y,z,w)=(x\wedge y\wedge z\wedge w)\vee(x\wedge y\wedge z\wedge w')\vee(x\wedge y'\wedge z\wedge w)\vee(x\wedge y'\wedge z\wedge w')\vee$
$(x'\wedge y'\wedge z'\wedge w')\vee(x'\wedge y\wedge z'\wedge w')\vee(x'\wedge y'\wedge z'\wedge w)\vee(x'\wedge y\wedge z'\wedge w)$

r) $f\left(x,y,z,w\right)=\left(x\wedge y\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x\wedge y\wedge z\wedge w'\right)\vee\left(x\wedge y\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x\wedge y\wedge z'\wedge w\right)\vee$
$\left(x'\wedge y\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z'\wedge w\right)$

s) $f\left(x,y,z,w\right)=\left(x\wedge y\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x\wedge y'\wedge z\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z\wedge w'\right)\vee$
$\left(x\wedge y'\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x\wedge y\wedge z'\wedge w\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z'\wedge w\right)$

2) Construa um circuito de chaveamento que depende de 3 interruptores sabendo que:

(1) apenas 2 chaves ligadas, desliga o circuito;
(2) apenas 1 interruptor ligado, liga o circuito;
(3) 3 chaves ligadas, liga o circuito;
(4) 3 chaves desligadas, desliga o circuito;
(5) determine a fnd, simplifique esse circuito pelo método de Karnaugh e esboce o circuito simplificado.

Queridos alunos, os dois próximos assuntos (“*NOÇÕES DE LÓGICA MATEMÁTICA BIVALENTE* ” e “ÁLGEBRA DOS CONJUNTOS ”) são apenas casos particulares de Álgebras Booleanas... Isto é, são Álgebras Booleanas “disfarçadas”.

NOÇÕES DE LÓGICA MATEMÁTICA BIVALENTE

1. PROPOSIÇÃO

Denominamos *proposição* (ou *proposição lógica* ou ainda *sentença*) a toda oração declarativa afirmativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa (na linguagem comum, ou verdadeira ou falsa). Daí o nome lógica bivalente.

Exemplos : ***a)*** $9 \neq 5$ ***b)*** $7 < 3$ ***c)*** $2 \in Z$ ***d)*** $3.5 + 1$ ***e)*** $3x - 1 = 11$

Naturalmente, as expressões *d)* e *e)* não são *proposições.*

Terminologia: Os ***valores lógicos*** de uma proposição são verdadeiro (V) ou falso (F).

Por exemplo: O valor lógico da proposição ***a)*** acima é verdadeiro, enquanto que o valor lógico da proposição ***b)*** acima é falso.

OBSERVAÇÃO: Muitos livros de Lógica usam a seguinte convenção: valor lógico **V = 1** (isto é, valor lógico verdadeiro é igual a um) e valor lógico **F = 0** (isto é, valor lógico falso é igual a zero). Isso confirma o que dissemos antes, isto é, que a Álgebra das proposições é uma “álgebra Booleana disfarçada”, onde o “0” é indicado por F e o “1” é indicado por V .

2. PROPOSIÇÃO SIMPLES

É toda sentença que contém uma única afirmativa. São representadas por letras minúsculas do alfabeto, preferencialmente p, q, r e t.

EXEMPLOS:

a) p: $2^{-1} = -2$
b) q: $3 \cdot 4 > 10$
c) r: O Brasil é uma monarquia.

2.1 - Negação de uma Proposição Simples

Dada uma proposição p, é sempre possível obtermos outra proposição cujo sentido seja contrário ao de p. Esta proposição é chamada negação de p e é representada por “~ p” (costuma-se ler “ não p” ou “não é verdade que p”).

EXEMPLOS:

a) p: $7 - 2 = 5$ tem como negação: ~ p: $7 - 2 \neq 5$
b) q: $3^{-1} \geq 2^{-1}$ tem como negação: ~ q: $3^{-1} < 2^{-1}$

OBSERVAÇÕES:

(1) Pode-se verificar, pelos exemplos acima, que uma proposição e a sua negação têm valores lógicos contrários. Este fato pode ser resumido na tabela abaixo:

p	~ p
V	F
F	V

(2) A negação de ~ p (chamada lei da dupla negação) equivale à própria proposição p, isto é:

~ (~ p) é o mesmo que p

EXERCÍCIOS:

1. Quais das expressões abaixo são proposições? No caso das proposições, quais são as verdadeiras?

a) $5 \cdot 4 = 20$	**b)** $5 - 4 = 3$	**c)** $1 + 3 \neq 1 + 6$	**d)** $(-2)^5 \geq (-2)^3$
e) $3 + 4 > 0$	**f)** $11 - 4 . 2$		

2. Qual é a negação de cada uma das seguintes proposições? Quais negações são verdadeiras?

a) $3 \cdot 7 = 21$ **b)** $3 \cdot (11 - 7) \neq 5$ **c)** $3 \cdot 2 + 1 > 4$ **d)** $5 \cdot 7 - 2 \leq 5 \cdot 6$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Às vezes, trabalhamos não só com proposições (no sentido que foi definido acima, isto é, que podem ser classificadas de maneira inequívoca como verdadeiras ou falsas), mas também com o que chamamos de funções proposicionais, veja alguns exemplos:
Exemplo 1:

Sabemos, que a rigor, $3x - 1 = 11$ não é uma proposição, más é fácil observar que, a depender do valor de x, a expressão $3x - 1 = 11$ pode ser verdadeira ou falsa (mais especificamente, para $x = 4$ a expressão dada: $3x - 1 = 11$ se torna uma proposição verdadeira e para qualquer $x \neq 4$ a expressão dada: $3x - 1 = 11$ se torna uma proposição falsa). Independentemente do valor lógico de $3x - 1 = 11$ podemos negá-la. Assim se quisermos negar a função proposicional $3x - 1 = 11$ (que por um abuso de linguagem, alguns autores denominam também de proposição), teremos: $3x - 1 \neq 11$.

Exemplo 2:

Usando a mesma linha de raciocínio do exemplo 1 acima, pode-se falar em negação da "proposição": $a > b$. Sua negação é $a \leq b$.

Exemplo 3:

A frase "o cachorro fugiu" não é, a rigor, uma proposição, pois não sabemos a qual cachorro especificamente a frase se refere, se identificarmos o tal cachorro podemos determinar a veracidade ou falsidade da afirmação "o cachorro fugiu". Como havíamos comentado antes, alguns (na verdade muitos) autores por um abuso de linguagem, denominam afirmações como essa ("o cachorro fugiu") de proposição (ou seja, "estendem" a definição de proposição).
Deste modo, independentemente do valor lógico de "o cachorro fugiu" podemos negá-la. Sua negação é; " o cachorro não fugiu" ou " não é verdade que o cachorro fugiu".

Seguiremos nos nossos estudos essa "convenção", isto é, expressões como as dos exemplos 1, 2 e 3 serão chamadas de proposições.

3. PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

A partir de proposições simples, podemos construir novas proposições, mediante o emprego de símbolos (conectivos) lógicos como **conjunção**, **disjunção (inclusiva e exclusiva)**, **condicional**, **bicondicional**.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Na verdade ao utilizarmos os conectivos entre as proposições simples estaremos realizando operações entre essas proposições, isto é, entre os valores lógicos (verdadeiro ou falso) correspondentes a essas proposições. Na verdade estamos introduzindo o assunto que se chama ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES.

3.1 - CONJUNÇÃO

Colocando o conectivo ***e*** entre duas proposições p e q, obtemos uma proposição composta, $p \wedge q$, denominada ***conjunção*** das proposições p e q.

***ATENÇÃO*:** $p \wedge q$ lê-se: *p* **e** *q*.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definição: A conjunção entre duas proposições só é verdadeira, ***apenas*** se ambas as proposições que a compõem são verdadeiras. Em qualquer outra situação a proposição composta é falsa.

OBSERVE OS EXEMPLOS ABAIXO:

1) $p : 2 > 0$ (cujo valor lógico é verdadeiro = **V**)
$q : 5 \neq 5$ (cujo valor lógico é falso = **F**)
$p \wedge q : 2 > 0$ **e** $5 \neq 5$ (é uma proposição composta falsa, pois **V e F**, pela tabela acima, tem falso como resultado).

2) p : $2 > 0$ (**V**)
q : $2 \neq 5$ (**V**)
p $\wedge$ q : $2 > 0$ **e** $2 \neq 5$ (é uma proposição composta verdadeira, pois **V e V**, pela tabela acima, tem verdadeiro como resultado).

3.2 – DISJUNÇÃO

Colocando-se o conectivo ***ou*** entre duas proposições, *p* e *q*, obtemos uma proposição composta, $p \vee q$, denominada ***disjunção*** (***disjunção inclusiva***) das proposições *p* e *q*.

***ATENÇÃO*:** $p \vee q$ lê-se: *p* **ou** *q*.

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definição: A disjunção entre duas proposições é falsa, ***apenas*** se ambas as proposições que a compõem são falsas. Em qualquer outra situação a proposição composta é verdadeira.

OBSERVE OS EXEMPLOS ABAIXO:

1) p : $3^4 < 2^6$ (**F**)
q : $2^2 > (-3)^5$ (**V**)
p $\vee$ q : $3^4 < 2^6$ **ou** $2^2 < (-3)^5$ (**V**).

2) p : $3^4 < 2^6$ (**F**)
q : $2^2 < (-3)^5$ (**F**)
p $\vee$ q : $3^4 < 2^6$ **ou** $2^2 < (-3)^5$ (**F**).

HÁ TAMBÉM OUTRO TIPO DE DISJUNÇÃO CHAMADA DE *DISJUNÇÃO EXCLUSIVA*.

Dadas duas proposições *p* e *q*, podemos obter uma proposição composta, $p \dot{\vee} q$, denominada ***disjunção*** (***disjunção exclusiva***) das proposições *p* e *q*.

***ATENÇÃO*:** $p \dot{\vee} q$ lê-se: **ou** *p* **ou** *q*.

Observe a tabela abaixo:

p	q	p $\dot{\vee}$ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definição: A disjunção entre duas proposições é verdadeira, apenas se as proposições que a compõem tiverem valores lógicos diferentes.

Por exemplo, considere que:
p : $2 > 0$ (**V**)
q : $5 \neq 5$ (**F**)
p $\dot{\vee}$ q : **ou** $2 > 0$ **ou** $5 \neq 5$ (**V**)

3.3 - CONDICIONAL

Colocando-se o conectivo ***se*** antes das afirmativas e a palavra ***então*** entre elas, obtemos uma proposição composta, $p \rightarrow q$, denominada ***condicional*** das sentenças p e q.

***ATENÇÃO*:** $p \rightarrow q$ lê-se: **Se** p **então** q.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Definição: A condicional somente é falsa se a primeira das proposições é verdadeira e a segunda é falsa.

Por exemplo, considere que:

p : 5 < 2 (**F**)
q : $2 \in Z$ (**V**)
$p \rightarrow q$: **Se** 5 < 2 **então** $2 \in Z$ (**V**)

A condicional pode aparecer escrita por mais de uma forma, como indicado a seguir:

1) ***Se*** p ***então*** q.
2) p ***somente se*** q.
3) q, ***se*** p.
4) p ***é condição suficiente para*** q
5) q ***é condição necessária para*** p

EXEMPLO:

*"**Se** o pássaro canta **então** está vivo"* pode ser escrita também:

O pássaro canta ***somente se*** está vivo;
O pássaro está vivo, ***se*** canta;
O pássaro cantar ***é condição suficiente para*** estar vivo;
O pássaro estar vivo ***é condição necessária para*** cantar.

3.4 - BICONDICIONAL

Colocando-se o conectivo ***se e somente se*** entre duas proposições, p e q, obtemos uma proposição composta, $p \leftrightarrow q$, denominada ***bicondional*** das sentenças p e q.

***ATENÇÃO*:** $p \leftrightarrow q$ lê-se: p **se e somente se** q.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Definição: A bicondicional é verdadeira, se as proposições que a compõem possuem valores lógicos iguais.

Por exemplo, considere que:
p : um quadrado de lado ***a*** tem diagonal medindo ***2a*** (**F**)
q : um quadrado de lado ***a*** tem área a^2 (**V**)
p $\leftrightarrow$ q : um quadrado de lado ***a*** tem diagonal medindo ***2a*** **se e somente se** sua área for a^2. (**F**)
OBSERVAÇÃO: A bicondicional $p \leftrightarrow q$ pode ser lida das seguintes formas:

1) *p* é condição necessária e suficiente para *q*;
2) q é condição necessária e suficiente para p

PODEMOS USAR A TABELA ABAIXO, PARA SINTETIZAR OS RESULTADOS ACIMA:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

RESUMO:

Conjunção $\wedge$ (e) **..................................** Só é verdadeira se forem ambas verdadeiras.

Disjunção Inclusiva $\vee$ (ou) **.................** Só é falsa se forem ambas falsas.

Disjunção Exclusiva $\dot{\vee}$ (ou ... ou ...) **....** Só é falsa se ambas forem verdadeiras ou ambas falsas.

Condicional $\rightarrow$ (se **...** então**...**) **............** Só é falsa se a primeira for verdadeira e a segunda for falsa.

Bicondicional $\leftrightarrow$ (se e somente se) **....** Só é verdadeira se ambas forem verdadeiras ou ambas falsas.

EXERCÍCIOS:

1. Classificar em verdadeira ou falsa, cada uma das seguintes proposições compostas:

a) 3 > 1 **e** 4 > 2	**b)** 1/2 < 3/4 **ou** 5 < 11	**c)** $(-1)^6 = -1$ **e** $2^5 < (-2)^7$
d) $\sqrt{16} = 6$ **ou** m.d.c (4,7) = 2	**e)** $2 - 1 = 1 \rightarrow 5 + 7 = 3 \cdot 4$	**f)** $2^2 = 4 \leftrightarrow (-2)^2 = 4$

2. Admitindo que **p** e **q** são verdadeiras, **r** é falsa e **t** é uma proposição cujo valor lógico não é conhecido, determine o valor (V ou F), de cada proposição abaixo:

a) $p \rightarrow r$	**b)** $p \leftrightarrow q$	**c)** $r \rightarrow q$
d) $(p \vee r) \leftrightarrow q$	**e)** $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	**f)** $p \rightarrow (q \wedge r)$
g) $\sim p \leftrightarrow \sim q$	**h)** $(\sim p \leftrightarrow r) \vee t$	**i)** $r \rightarrow (q \wedge t)$

4 - TAUTOLOGIAS E CONTRADIÇÕES

Dizemos que uma proposição composta é uma **tautologia**, quando seu **valor lógico é sempre verdadeiro, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples que a compõem**.

Exemplo: Verificar os valores lógicos da proposição $p \vee \sim p$.

p	~ p	p ∨ ~ p
V	F	**V**
F	V	**V**

Portanto, a proposição $p \vee \sim p$ é um exemplo de tautologia.

Dizemos que uma proposição composta é uma ***contradição***, quando seu **valor lógico é sempre falso, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples que a compõem**.

Exemplo: Verificar os valores lógicos da proposição $p \wedge \sim p$.

p	~ p	p ∧ ~ p
V	F	**F**
F	V	**F**

Portanto, a proposição $p \wedge \sim p$ é um exemplo de contradição.

5 – IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA

5.1 - IMPLICAÇÃO

Sejam p e q duas proposições. Dizemos que *p* ***implica*** *q* ($p \Rightarrow q$), se a condicional $p \rightarrow q$ for uma tautologia, ou seja, nunca ocorrer o caso **V → F**, único em que a condicional é falsa.

EXEMPLO: Verificar os valores lógicos de: $\mathbf{(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)}$

p	**q**	**p ∧ q**	**p ∨ q**	**(p ∧ q) → (p ∨ q)**
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**

Como a proposição *condicional* $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é uma *tautologia* e é uma, dizemos então que é uma *implicação* e passamos a representá-la assim: $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$.

5.2 - EQUIVALÊNCIA

<u>DEFINIÇÃO</u>: Dizemos que duas proposições p e q são <u>*equivalentes*</u> (ou segundo alguns autores, por abuso de linguagem, <u>*iguais*</u>) se elas têm o mesmo valor lógico. Representa-se $p \Leftrightarrow q$ e lê-se: p é equivalente a q (p é igual a q).

EXEMPLO 1:

p: O sol emite calor (que é uma proposição verdadeira)
q: $7 > 4$ (que também é uma proposição verdadeira)

As proposições p e q acima são equivalentes (ou iguais) pois ambas têm o mesmo valor lógico (no caso, ambas são verdadeiras).

EXEMPLO 2:

p: A lua é maior que o sol (que é uma proposição falsa)
q: $7 < 4$ (que também é uma proposição falsa)

As proposições p e q acima são equivalentes (ou iguais) pois ambas têm o mesmo valor lógico (no caso, ambas são falsas).

Você observou que para que duas proposições sejam equivalente, basta que elas tenham os mesmos valores lógicos, independentemente do "conteúdo" das afirmações.

Naturalmente, podemos também definir a equivalência entre duas proposições, do seguinte modo:

> **<u>DEFINIÇÃO</u>: Sejam p e q duas proposições. Dizemos que p equivale a q ($p \Leftrightarrow q$), se a bicondicional $p \leftrightarrow q$ for uma tautologia, isto é, se as proposições p e q têm sempre os mesmos valores lógicos.**

EXEMPLO: Provar você mesmo, que: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

6. VARIANTES DA CONDICIONAL

A condicional $p \rightarrow q$ possui, entre outras, duas proposições que lhe são **<u>equivalentes</u>**:

1) $\sim p \vee q$
2) $\sim q \rightarrow \sim p$

Vamos verificar essas equivalências:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

RESUMINDO O QUE ACABAMOS DE DEMONSTRAR: A proposição p $\rightarrow$ q é *equivalente* à proposição ~ q $\rightarrow$ ~ p (a proposição ~ q $\rightarrow$ ~ p é chamada de contrapositiva da aplicação p $\rightarrow$ q) e também à proposição ~ p $\vee$ q.

Assim, podemos afirmar que:

Se o pássaro canta **então** está vivo **(p $\rightarrow$ q)**
SIGNIFICA O MESMO QUE:
Se o pássaro não está vivo **então** não canta **(~ q $\rightarrow$ ~ p)**
E TAMBÉM SIGNIFICA O MESMO QUE:
O pássaro não canta **ou** está vivo **(~ p $\vee$ q)**

Mesmo frases malucas (risos!), dentro da lógica, podem ser reescritas como foi indicado acima, por exemplo:
Se o macaco voa **então** João é uma pedra **(p $\rightarrow$ q)**
SIGNIFICA O MESMO QUE:
Se João não é uma pedra **então** o macaco não voa **(~ q $\rightarrow$ ~ p)**
E TAMBÉM SIGNIFICA O MESMO QUE:
O macaco não voa **ou** João é uma pedra **(~ p $\vee$ q)**

De um modo mais geral, a condicional p $\rightarrow$ q tem três **variantes** (**CUIDADO!** Eu não disse que todas são equivalentes!) que são denominadas por:

1) Contrapositiva: ~ q $\rightarrow$ ~ p
2) Recíproca: q $\rightarrow$ p
3) Contrária: ~ p $\rightarrow$ ~ q

EXERCÍCIOS

1) Dada a proposição *"Se 2 < 1 então 7 = 7"* (observe que esta proposição é **verdadeir**a pois temos o caso **F $\rightarrow$ V**) **determine**:

a) Recíproca (que é falsa, pois agora trata-se do caso **V $\rightarrow$ F**):

b) Contrária (que é falsa, pois trata-se do caso **V $\rightarrow$ F**):

c) Contrapositiva (que é **verdadeir**a pois temos o caso **F $\rightarrow$ V**, isto era de se esperar pois já demonstramos que a contrapositiva ~ q $\rightarrow$ ~ p é equivalente à condicional p $\rightarrow$ q):

2) Dada a proposição *"Se o pássaro canta então está vivo"* determine:

a) Recíproca:
b) Contrária:
c) Contrapositiva:

3) Considere a proposição *"Se o triângulo é eqüilátero, então é isósceles"* determine:

a) Recíproca:

b) Contrária:
c) Contrapositiva:

4) Dê a recíproca da contrapositiva da condicional *"se $x = 2$, então $x^2 = 4$"*.

7. TABELA VERDADE

Podemos construir muitos raciocínios que podem se deduzidos das convenções e definições estabelecidas anteriormente. Vamos demonstrar algumas equivalências e propriedades usando as tabelas de verdade (ou tabelas – verdade).

EXERCÍCIOS:

1) Verificar se as proposições abaixo são tautologias ou contradições ou contingências (nem tautologia nem contradição):

1) s: $(p \wedge \sim p) \rightarrow (p \vee q)$
2) r: $[\, p \wedge (p \rightarrow q) \,] \rightarrow q$
3) t: $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
4) c: $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
5) u: $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q)$
6) v: $(p \vee q) \rightarrow p$

2) Demonstre as propriedades da conjunção usando a tabela verdade:

a) Idempotência: $p \wedge p \Leftrightarrow p$ $\quad \forall p$ ($\forall$ significa “qualquer que seja” ou ainda “para todo”)
b) Comutatividade: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $\quad \forall p, q$
c) Associatividade: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $\quad \forall p, q, r$
d) Elemento Neutro: $p \wedge 1 \Leftrightarrow 1 \wedge p \Leftrightarrow p$ $\quad \forall p$
e) Elemento Absorvente: $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \wedge p \Leftrightarrow 0$ $\quad \forall p$

3) Demonstre as propriedades da disjunção usando a tabela verdade:

a) Idempotência: $p \vee p \Leftrightarrow p$ $\quad \forall p$
b) Comutatividade: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $\quad \forall p, q$
c) Associatividade: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $\quad \forall p, q, r$
d) Elemento Neutro: $p \vee 0 \Leftrightarrow 0 \vee p \Leftrightarrow p$ $\quad \forall p$
e) Elemento Absorvente: $p \vee 1 \Leftrightarrow 1 \vee p \Leftrightarrow 1$ $\quad \forall p$

4) Demonstre as propriedades “mistas” usando a tabela verdade, $\forall p, q, r$:

a) Distributividade da conjunção em relação à disjunção: $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
b) Distributividade da disjunção em relação à conjunção: $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

5) Demonstre as negações abaixo usando a tabela verdade:

a) $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

b) $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$
c) $\sim (p \rightarrow q) = p \wedge \sim q$
d) $\sim (p \leftrightarrow q) = \sim p \leftrightarrow q$ (ou $p \leftrightarrow \sim q$)

8. NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Retomando exatamente o que fizemos no exercício 5), acima:

8.1 - Conjunção

$$\boxed{\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q}$$

Exemplo: A negação de *"o carro é preto **e** a pedra é dura"* é *" o carro não é preto **ou** a pedra não é dura "*.

8.2 - Disjunção

$$\boxed{\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q}$$

Exemplo: A negação de *"estudo **ou** trabalho"* é *"não estudo **e** não trabalho"*.

<u>**OBSERVAÇÃO**</u>: As duas leis acima: $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$ e $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$ são chamadas primeiras leis de <u>De Morgan</u> em homenagem ao matemático Augustus de Morgan..

8.3 – Condicional

$$\boxed{\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q}$$

Exemplo: A negação de *"**se** sou baiano, **então** sou brasileiro"* é *"sou baiano **e** não sou brasileiro"*.

8.4 – Bicondicional

A bicondicional pode ser negada de duas maneiras:

$\boxed{\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \leftrightarrow q}$ ou $\boxed{\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow \sim q}$

Exemplo: A negação de *"3 > 2, **se e somente se** 2 ∈ N"* pode ser feita de duas formas:

a) $3 \leq 2$, ***se e somente se*** $2 \in N$
b) $3 > 2$, *se **e somente se*** $2 \notin N$

EXERCÍCIOS

1) **Negar** as proposições:

a) 3 é impar **e** dois é primo;

b) Magno é Bahia **ou** Nelson é vitorinha ☺;
c) **Se** $x^2 = 4$, **então** $x = \pm 2$;
d) $\sqrt{x^2} = x$, **se e somente se** $x \geq 0$.

2) Na linguagem C, usada na programação de computadores, sabe-se que:

fabs (x) é o valor absoluto de x, sqrt (x) é a raiz quadrada de x, * é o operador multiplicação e + é o operador adição.

Pede-se calcular o valor da expressão: fabs (– 3) * sqrt (25) + fabs (4) * sqrt (49)

a) 33 b) 0 c) 34 d) 20 e) 43

3) A proposição composta $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim q$ tem valor lógico V; então o valor lógico da proposição p:

a) só pode ser V
b) pode ser V ou F
c) só pode ser F
d) depende do valor de q
e) não pode ser determinado a partir dessa proposição.

4) Se p é uma proposição verdadeira, então:

a) $p \wedge q$ é verdadeira, qualquer que seja q
b) $p \vee q$ é verdadeira, qualquer que seja q
c) $p \wedge q$ é verdadeira, só se q for falsa
d) $p \rightarrow q$ é falsa, qualquer que seja q
e) $p \leftrightarrow q$ é falsa, qualquer que seja q

9. SENTENÇAS ABERTAS, QUANTIFICADORES

Já vimos que expressões como $x + 1 = 7$, $x > 2$ e $x^3 = 2x^2$, não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas, pois para isso dependem do valor assumido pela variável x. Sendo assim, estas expressões, no sentido formal **não constituem proposições.** No entanto, vamos mostrar a vocês que podemos transformá-las em proposições, juntando-lhes os chamados ***quantificadores***.

OBSERVAÇÕES:

1) Salvo menção em contrário os valores numéricos de ***x*** poderão ser quaisquer **números reais.** Em outras palavras, costuma-se dizer que o nosso ***universo lógico***, normalmente simbolizado por ***U***, será, salvo menção em contrário, o conjunto R;

2) Nas sentenças matemáticas abaixo, a expressão “tal que” será abreviada por um ponto e vírgula.

QUANTIFICADORES:

Universal : $\forall$ x (Lê-se: Todo x ou Para todo x ou Qualquer que seja x)
Exemplo: ($\forall$ x) (x + 1 = 7), que se lê: “Para qualquer valor de x, x + 1 = 7” (proposição falsa).

Existencial : $\exists$ x (Lê-se: Existe pelo menos um x ou Existe x ou Existe algum x)
Exemplo: ($\exists$ x); (x + 1 = 7), que se lê: "Existe algum x tal que x + 1 = 7" (proposição verdadeira).

Existencial Particular : $\exists!$ x (Lê-se: Existe um único x ou Existe apenas um x)
Exemplo: ($\exists!$ x); (x + 1 = 7), que se lê: "Existe apenas um x tal que x + 1 = 7" (que é uma proposição verdadeira).

NEGAÇÕES DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADORES:

Nas explicações que se seguem, considere *U* um universo lógico e *p (x)* uma proposição:

1) $\sim (\forall x \in U, p(x)) = \exists x \in U; \sim p(x)$

EXEMPLOS:

a) $\sim (\forall x \in R,\ x^2 > 4) = \exists x \in R; x^2 \leq 4$
b) $\sim (\forall x \in R,\ x^2 \geq 0) = \exists x \in R; x^2 < 0$
c) ~ (Todo homem é mortal) = Existe pelo menos um homem que não é mortal (ou, o que é o mesmo: Existe pelo menos um homem imortal).

RESUMINDO: Negação do quantificador ***Universal***: Troca-se $\forall$ x por $\exists$ x e ***nega-se*** a proposição.

2) $\sim (\exists x \in U, p(x)) = \forall x \in U; \sim p(x)$

EXEMPLOS:

a) $\sim (\exists x \in R,\ x^2 > 16) = \forall x \in R; x^2 \leq 16$
b) $\sim (\exists x \in R,\ x^2 \geq 0) = \forall x \in R; x^2 < 0$
c) ~ (Existe homem que é mortal) = Todo homem não é mortal (ou, o que é o mesmo: Todo homem é imortal).

RESUMINDO: Negação do quantificador ***Existencial***: Troca-se $\exists$ x por $\forall$ x e ***nega-se*** a proposição.

EXERCÍCIOS:

1) Dê o valor lógico de cada proposição abaixo:

a) $\exists! x \in N; x^2 = 9$
b) $\exists x \in N; x^2 = 9$
c) $\forall x \in N, x^2 = 9$
d) $\forall x \in R, x \geq x$
e) $\exists x \in R; x \geq x$
f) $\exists! x \in R; x \geq x$
g) $\exists x \in R; x^2 = -4$
h) $\exists! x \in R; x^2 = -4$
i) $\forall x \in R, x^2 = -4$
j) $\forall x \in R, \exists y \in R; y = 1/x$

2) Negar as proposições abaixo:

a) $\forall\, x \in R,\, x + 2 = 7$
b) $\exists\, x \in R;\, x^2 - 2x \leq 4$
c) $\forall\, x \in R,\, \exists\, y \in R;\, y = 1/x$
d) $\exists\, x \in R;\, \forall\, y \in R,\, y > x$
e) $\exists\, x \in R;\, \forall\, y \in R,\, y > x \;\wedge\; 2x = 5y$
f) $\exists\, x \in R;\, \forall\, y \in R,\, y + x = 7 \;\vee\; x = 5y$
g) $\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0;\, \forall\, x \in X,\; |\, x - a \,| < \delta \rightarrow |\, f(x) - f(a) \,| < \varepsilon$
h) $\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0;\, \forall\, x \in X,\; 0 < |\, x - a \,| < \delta \rightarrow |\, f(x) - L \,| < \varepsilon$
i) $\exists\, x \in R;\, \forall\, y \in Z,\, \exists\, \varepsilon > 0;\, |\, x - y \,| \geq \varepsilon$

3) Dar a negação de *"Todo homem bom é justo e existe torcedor do vitorinha que é bom da bola"*.

10. PRINCÍPIO DA DUALIDADE

Dualidade no conjunto das proposições lógicas:

Dada uma expressão *E*, contendo apenas os símbolos: “=”, “$\wedge$”, “$\vee$”, “~”, “0” e “1”, define-se a dual de *E*, como a expressão *E’*, obtida de *E*, trocando-se “$\vee$” por “$\wedge$”; “$\wedge$” por “$\vee$”; “0” por “1”; “1” por “0” e conservando-se os demais elementos.
O mais importante resultado sobre a dualidade é que, se a expressão *E* for uma tautologia, então sua expressão dual *E’*, também é uma tautologia.

EXEMPLOS:

1) E: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \quad \forall\, p, q$
   E’: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \quad \forall\, p, q$
2) E: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \quad \forall\, p, q, r$
   E’: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \quad \forall\, p, q, r$
3) E: $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \quad \forall\, p$
   E’: $p \vee 1 \Leftrightarrow 1 \quad \forall\, p$
4) E: $p \wedge \sim p = 0 \quad \forall\, p$
   E’: $p \vee \sim p = 1 \quad \forall\, p$

<u>EXERCÍCIO</u>:

Usando a tabela verdade demonstre as proposições abaixo:

1) $p \rightarrow q = \sim p \vee q$;
2) $p \dot{\vee} q = (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$;
3) $p \leftrightarrow q = (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.

Você sabe o que acabou de fazer? Você provou que a condicional, a disjunção exclusiva e a bicondicional podem ser “escritas” em função apenas dos símbolos ~, $\vee$ e $\wedge$. Isso é muito importante para o que segue.

11. DEMONSTRAÇÕES DE PROPOSIÇÕES SEM O USO DA TABELA VERDADE

Usaremos as propriedades abaixo, que você já conhece, para simplificar proposições e demonstrar alguns resultados (observe a **"jóia"** da dualidade "embelezando" da propriedade 2) até a 17)) :

1) $\sim(\sim p) = p \quad \forall p$
2) $p \wedge \sim p = 0 \quad \forall p$
3) $p \vee \sim p = 1 \quad \forall p$
4) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \quad \forall p, q$
5) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \quad \forall p, q$
6) $p \wedge 1 = p \quad \forall p$
7) $p \vee 0 = p \quad \forall p$
8) $p \wedge 0 = 0 \quad \forall p$
9) $p \vee 1 = 1 \quad \forall p$
10) $p \wedge p = p \quad \forall p$
11) $p \vee p = p \quad \forall p$
12) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) \quad \forall p, q, r$
13) $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) \quad \forall p, q, r$
14) $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \quad \forall p, q, r$
15) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad \forall p, q, r$
16) $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q \quad \forall p, q$
17) $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q \quad \forall p, q$
18) $\sim(p \rightarrow q) = p \wedge \sim q \quad \forall p, q$
19) $\sim(p \leftrightarrow q) = \sim p \leftrightarrow q \quad \forall p, q$
20) $p \rightarrow q = \sim p \vee q \quad \forall p, q$
21) $p \dot{\vee} q = (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \quad \forall p, q$
22) $p \leftrightarrow q = (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \quad \forall p, q$

EXERCÍCIOS DE CLASSE:

1) Demonstre a propriedade 18) acima usando a 20) e a 17);

2) Usando propriedades das operações lógicas, simplificar o máximo possível as expressões e em seguida classificá–las em tautologia, contradição ou contingência:

a) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$;
b) $\sim(p \vee \sim q)$;
c) $\sim(\sim p \rightarrow q)$;
d) $\sim(p \rightarrow \sim q)$;
e) $\sim(\sim p \leftrightarrow \sim q)$;
f) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$;
g) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim(p \wedge q)] \wedge p$;
h) $\sim(\sim p \rightarrow q) \vee \sim(\sim p \vee q)$;
i) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$;
j) $[\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(p \vee q)] \vee (r \rightarrow q)$;
k) $[(q \wedge p) \vee \sim(q \rightarrow p)] \wedge \{q \rightarrow [\sim p \wedge \sim(\sim p)]\}$

LISTA DE ÁLGEBRA

I) Usando a tabela verdade, verificar se as proposições abaixo são tautologias, contradições ou contingências:

a) s: $(p \wedge \sim p) \rightarrow (p \vee q)$
b) r: $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
c) t: $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
d) c: $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
e) u: $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q)$
f) v: $(p \vee q) \rightarrow p$

II) Demonstre as propriedades da conjunção usando a tabela verdade:

a) Idempotência: $p \wedge p = p \quad \forall p$
b) Comutatividade: $p \wedge q = q \wedge p \quad \forall p, q$
c) Associatividade: $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) \quad \forall p, q, r$
d) Elemento Neutro: $p \wedge 1 = 1 \wedge p = p \quad \forall p$
e) Elemento Absorvente: $p \wedge 0 = 0 \wedge p = 0 \quad \forall p$
f) $p \wedge \sim p = 0 \quad \forall p$

III) Demonstre as propriedades da disjunção usando a tabela verdade:

a) Idempotência: $p \vee p = p \quad \forall p$
b) Comutatividade: $p \vee q = q \vee p \quad \forall p, q$
c) Associatividade: $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) \quad \forall p, q, r$
d) Elemento Neutro: $p \vee 0 = 0 \vee p = p \quad \forall p$
e) Elemento Absorvente: $p \vee 1 = 1 \vee p = 1 \quad \forall p$
f) $p \vee \sim p = 1 \quad \forall p$

IV) Demonstre as propriedades "mistas" usando a tabela verdade, $\forall$ p, q, r:

a) Distributividade da conjunção em relação à disjunção: $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
b) Distributividade da disjunção em relação à conjunção: $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
c) $p \rightarrow q = \sim p \vee q \quad \forall p, q$
d) $p \dot{\vee} q = (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \quad \forall p, q$
e) $p \leftrightarrow q = (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \quad \forall p, q$

V) Demonstre as negações abaixo usando a tabela verdade:

a) $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$
b) $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$
c) $\sim (p \rightarrow q) = p \wedge \sim q$
d) $\sim (p \leftrightarrow q) = \sim p \leftrightarrow q$
e) $\sim (p \leftrightarrow q) = p \leftrightarrow \sim q$

VI) A proposição composta $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim q$ tem valor lógico V; então o valor lógico da proposição p:

a) só pode ser V
b) pode ser V ou F
c) só pode ser F
d) depende do valor de q
e) não pode ser determinado a partir dessa proposição.

VII) Se p é uma proposição verdadeira, então:

a) $p \wedge q$ é verdadeira, qualquer que seja q
b) $p \vee q$ é verdadeira, qualquer que seja q
c) $p \wedge q$ é verdadeira, só se q for falsa
d) $p \rightarrow q$ é falsa, qualquer que seja q
e) $p \leftrightarrow q$ é falsa, qualquer que seja q

VIII) Considere ao proposições:

p: $2{,}4333... \in Q$
q: $-3^2 = 9$
r: $\sqrt{(-5)^2} = -5$

Assinale V ou F nas proposições a seguir:

a) $p \wedge q$	( )	f) $\sim q \wedge r$	( )
b) $p \vee r$	( )	g) $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$	( )
c) $q \rightarrow r$	( )	h) $\sim q \leftrightarrow (p \rightarrow r)$	( )
d) $p \leftrightarrow r$	( )	i) $(\sim p \wedge \sim r) \rightarrow (p \rightarrow q)$	( )
e) $\sim p \rightarrow \sim q$	( )	j) $\sim (\sim q \vee p) \vee (r \rightarrow p)$	( )

IX) Sendo:

p: $6{,}143143... \in Q$
q: todo racional possui inverso

A única proposição falsa é:

a) $p \vee q$
b) $p \wedge \sim q$
c) $p \rightarrow q$
d) $(p \wedge q) \rightarrow p$
e) $\sim (\sim p)$

X) Construir a tabela verdade da proposição ***s*** e dizer se a proposição ***s*** é tautologia, contradição ou contingência: ***s***: $(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$.

XI) Quais das implicações abaixo são verdadeiras, se $x \in R$?

(01) $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$
(02) $x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$

(04) $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$

(08) $x \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x-2}{x-2} = 1$

(16) $x < y \Rightarrow -x < -y$

(32) $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$

XII) Dê o valor lógico de cada proposição abaixo:

a) $\exists!\, x \in N;\ x^2 = 9$
b) $\exists\, x \in N;\ x^2 = 9$
c) $\forall\, x \in N,\ x^2 = 9$
d) $\forall\, x \in R,\ x \geq x$
e) $\exists\, x \in R;\ x \geq x$
f) $\exists!\, x \in R;\ x \geq x$
g) $\exists\, x \in R;\ x^2 = -4$
h) $\exists!\, x \in R;\ x^2 = -4$
i) $\forall\, x \in R,\ x^2 = -4$
j) $\forall\, x \in R,\ \exists\, y \in R;\ y = 1/x$

XIII) Negar as proposições abaixo:

a) $\forall\, x \in R,\ x + 2 = 7$
b) $\exists\, x \in R;\ x^2 - 2x \leq 4$
c) $\forall\, x \in R,\ \exists\, y \in R;\ y = 1/x$
d) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in R,\ y > x$
e) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in R,\ y > x \ \wedge\ 2x = 5y$
f) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in R,\ y + x = 7 \ \vee\ x = 5y$
g) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0;\ \forall\, x \in X,\ |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
h) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0;\ \forall\, x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
i) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in Z,\ \exists\, \varepsilon > 0;\ |x - y| \geq \varepsilon$

XIV) Utilizando propriedades das operações lógicas, isto é, **sem utilizar a tabela verdade**, simplificar o máximo possível as expressões abaixo e em seguida classificá–las em tautologia, contradição ou contingência: **(use as propriedades da página 18)**

a) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$;
b) $\sim(p \vee \sim q)$;
c) $\sim(\sim p \rightarrow q)$;
d) $\sim(p \rightarrow \sim q)$;
e) $\sim(\sim p \leftrightarrow \sim q)$;
f) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$;
g) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim(p \wedge q)] \wedge p$;
h) $\sim(\sim p \rightarrow q) \vee \sim(\sim p \vee q)$;
i) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$;
j) $[\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(p \vee q)] \vee (r \rightarrow q)$;
k) $[(q \wedge p) \vee \sim(q \rightarrow p)] \wedge \{q \rightarrow [\sim p \wedge \sim(\sim p)]\}$

XV) Considere as seguintes proposições: p: $\sqrt{2} \in Q \vee 4 \in (R - Q)$
q: $-5 \in Z \wedge 3$ é um número primo
r: $(-3 \in N) \rightarrow$ (6 é divisor de 12)

Determinar o valor lógico da proposição:

(a) $(p \vee \sim r) \rightarrow \sim q$

(b) $(p \wedge r) \leftrightarrow (p \dot{\vee} q)$

XVI) **Apenas** para o item (a) abaixo você pode usar a tabela verdade

(a) Sendo p e q proposições lógicas, demonstrar a propriedade: $(p \rightarrow q) = (\sim p \vee q)$

(b) Usando propriedades das operações lógicas, simplificar o máximo possível a expressão:
$[(q \wedge p) \vee \sim(q \rightarrow p)] \wedge \{q \rightarrow [\sim p \wedge \sim(\sim p)]\}$ e em seguida classificá–la em tautologia, contradição ou nem tautologia nem contradição.

XVII) Negar as proposições:

a) $\exists\, x \in R; \forall y \in Z, \exists\, \varepsilon > 0; |x - y| \geq \varepsilon$
b) $\forall\, x \in R, \exists\, y \in Q; \forall\, \varepsilon > 0, |y - x| < \varepsilon$

XVIII) **Apenas** para resolver o item (a) abaixo você pode usar a tabela verdade

(a) Sendo p e q proposições lógicas, demonstrar a propriedade: $\sim(p \vee q) = (\sim p \wedge \sim q)$

(b) Usando propriedades das operações lógicas, simplificar o máximo possível a expressão:
$\{[(p \wedge p) \vee (p \rightarrow q)] \wedge \sim r\} \vee \{[\sim(\sim q) \vee r] \wedge \sim(q \wedge \sim r)\}$ e em seguida classificá–la em tautologia, contradição ou nem tautologia nem contradição.

(c) Dada a proposição condicional "$\sqrt{5} \in (R - Q) \rightarrow \sqrt{5} \in R$" determinar sua recíproca, sua inversa, sua contrapositiva, e encontrar os valores lógicos destas 4 condicionais.

XIX) A proposição $[(p \leftrightarrow q) \rightarrow \sim q]$ tem valor lógico F; qual o valor lógico da proposição p ?

a) só pode ser V
b) pode ser V ou F
c) só pode ser F
d) depende do valor de q
e) não pode ser determinado a partir dessa proposição.

ÁLGEBRA DOS CONJUNTOS

Conjunto é um conceito primitivo, não se define. Embora a palavra conjunto indique coleção de elementos, em Matemática é usual estudarmos conjuntos sem qualquer elemento (chamado conjunto vazio e simbolizado por $\varnothing$ ou por { }) e também conjuntos que possuem apenas um elemento (dito conjunto unitário). Elemento de um conjunto também é um conceito primitivo. É muito comum representar um conjunto por uma letra maiúscula e os elementos desse conjunto entre chaves. Para designarmos que um elemento pertence a um conjunto, escrevemos, por exemplo, $2 \in \mathbb{Z}$ (lembre do conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros que estudamos anteriormente). Como dissemos antes a Álgebra dos conjuntos é uma "álgebra Booleana disfarçada", onde o "0" é indicado por $\varnothing$ e o "1" é indicado por Conjunto Universo $= S$.

Alguns exemplos de conjuntos:

1) $\boldsymbol{A} = \{ -2, 2 \}$;
2) $\boldsymbol{B} = \{ 2 \}$;
3) $\boldsymbol{C} =]\, 4, +\infty\, [$.

Vou contar um episódio da Matemática (e da lógica) bastante interessante. Havia um digníssimo Matemático Alemão, chamado Gotlob Frege que tentou sistematizar a lógica com base na Teoria dos Conjuntos. Após um longo período de estudos e pesquisas feitas por Frege, em uma carta bastante cordial (que você pode encontrar na internet) um Matemático, Filósofo e Lógico Inglês de nome Bertrand Russel perguntou a Frege:

Prezado colega gostaria que você me dirimisse (tirasse) uma dúvida:

"O conjunto de todos os conjuntos (que vamos designar de Ω pertence ou não a si mesmo?"
Quando Frege recebeu a carta e analisou a questão, ele compreendeu o raciocínio de Russel:
Senão vejamos:

1) Se Ω pertence a si mesmo, há um conjunto "maior" que ele próprio!
2) Se Ω não pertence a si mesmo, ele não pode representar o conjunto de todos os conjuntos!

O raciocínio acima é denominado "paradoxo de Russel" (ou antinomia de Russel).
Frege humildemente reconheceu que o conceito de conjunto como uma entidade absoluta condizia a paradoxos. Dizem que apesar da cordialidade de Russel, tal problema (a antinomia de Russel) o abalou profundamente. A partir daí foram criados mecanismos para sistematizar a Teoria dos Conjuntos evitando os paradoxos (há outros). Esse "conserto da Teoria" vem se arrastando até hoje...

Nosso estudo é baseado numa "Teoria Ingênua dos Conjuntos" (expressão usada pelo grande Matemático Paul Halmos). Assim não vamos nos envolver com estudos mais profundos da lógica. A idéia de conjunto que usaremos será aquela do ginásio ou do ensino médio...
Um abraço!

SUBCONJUNTO

Diz-se que um conjunto ***A*** é subconjunto de um conjunto ***B***, ou ***A*** está contido em ***B*** (e representa-se $A \subset B$) se e somente se todo elemento de ***A*** é também elemento de ***B***, em símbolos: $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{B}$.

EXEMPLOS:

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, pois todo elemento de $\mathbb{N}$ é elemento de $\mathbb{Z}$;
b) $]-3\ ,5\ [\ \subset \mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO: Pode-se demonstrar que qualquer que seja o conjunto ***A***, $\varnothing \subset A$.

NOTE QUE: o intervalo real $]-3\ ,5\ [$ não está contido em $\mathbb{Z}$ (e este fato representa-se: $]-3\ ,5\ [\ \not\subset \mathbb{Z}$), pois, por exemplo $\pi \in\ ]-3\ ,5\ [$ mas π não pertence a $\mathbb{Z}$ (indica-se $\pi \notin \mathbb{Z}$).

IGUALDADE DE CONJUNTOS

Diz-se que $A = B$ se e somente se $A \subset B$ **e** $B \subset A$.

EXEMPLOS:

a) $\{\ x \in \mathbb{Z}\ ;\ x^2 - 4 = 0\ \} = \{\ -2, 2\ \}$;
b) $\{\ x \in \mathbb{N}\ ;\ x^2 - 4 = 0\ \} = \{\ 2\ \}$;
c) $\{\ x \in \mathbb{R}\ ;\ x - 4 > 0\ \} =\ ]\ 4, +\infty\ [$.

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

Seja ***S*** o nosso conjunto universo, isto é, aquele que contém todos os outros conjuntos dos quais trataremos no que segue. Deste modo, considere que ***A***, ***B*** são subconjuntos de ***S***.

OPERAÇÃO 1: União ou Reunião de ***A*** com ***B*** (simbolicamente $A \cup B$):

$A \cup B = \{\ x \in S;\ x \in A$ **ou** $x \in B\ \}$. É comum em muitos livros a omissão da sentença $x \in S$, deste modo: $A \cup B = \{\ x \in A$ **ou** $x \in B\ \}$ (fica, então, subentendido que ***A*** e ***B*** estão contidos em algum universo ***S***).

OBSERVAÇÃO: O "**ou"** que figura na definição acima é exatamente a disjunção inclusiva que estudamos em lógica, assim: $A \cup B = \{\ x \in S;\ x \in A \vee x \in B\ \}$

EXEMPLOS:

a) $\{\ -2, 2\ \} \cup \{\ 2, 3\ \} = \{\ -2, 2, 3\ \}$;
b) $\{\ -2, 4\ \} \cup \{\ 2, 3\ \} = \{\ -2, 2, 3, 4\ \}$;
c) $\{\ -2, 4\ \} \cup \varnothing = \{\ -2, 4\ \}$.

OPERAÇÃO 2: Interseção de A com B (simbolicamente $A \cap B$):

$\mathbf{A \cap B} = \{ x \in S;\ x \in A$ **e** $x \in B \} = \{ x \in A$ **e** $x \in B \}$

OBSERVAÇÃO: O "**e"** que figura na definição acima é exatamente a conjunção que estudamos em lógica, deste modo: $A \cap B = \{ x \in S;\ x \in A \wedge x \in B \}$

EXEMPLOS:

a) $\{ -2, 2 \} \cap \{ 2, 3 \} = \{ 2 \}$;
b) $\{ -2, 4 \} \cap \{ 2, 3 \} = \varnothing$;
c) $\{ -2, 4 \} \cap \varnothing = \varnothing$.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Usaremos a seguinte "definição" para dizer que um conjunto A está contido em um conjunto B, (isto é, $A \subset B$): ***$A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$.***

OPERAÇÃO 3: Diferença entre A e B (simbolicamente $A - B$):

$A - B = \{ x \in S;\ x \in A \wedge x \notin B \} = \{ x \in A \wedge x \notin B \}$

EXEMPLOS:

a) $\{ -2, 2 \} - \{ 2, 3 \} = \{ -2 \}$;
b) $\{ -2, 4 \} - \{ 2, 3 \} = \{ -2, 4 \}$;
c) $\{ -2, 4 \} - \{ -2, 4, 5 \} = \varnothing$.

OPERAÇÃO 4: ***Diferença simétrica*** entre A e B:

$A \,\Delta\, B = \{ x \in S;\ x \in A \wedge x \notin B \} \cup \{ x \in S;\ x \in B \wedge x \notin A \} = (A - B) \cup (B - A) =$
$(A \cup B) - (A \cap B)$

EXEMPLOS:

a) $\{ -2, 2 \} \,\Delta\, \{ 2, 3 \} = \{ -2, 3 \}$;
b) $\{ -2, 4 \} \,\Delta\, \{ 2, 3 \} = \{ -2, 2, 3, 4 \}$

OPERAÇÃO 5: **Se $\mathbf{A \subset B}$**, a diferença $B - A$ é chamada de ***complementar*** de A em relação a B, em símbolos:

$\mathbf{C_B A = B - A} = \{ x \in S;\ x \in B \wedge x \notin A \} = \{ x \in B \wedge x \notin A \}$

OBSERVAÇÕES:
I) Se $B = S$, então $\mathbf{C_B A = C_S A = CA} = \{ x \in S \wedge x \notin A \}$, de uma maneira sucinta, costuma-se escrever $\mathbf{C_S A = CA} = \{ x \notin A \}$;
II) $\mathbf{CA \cup A = S}$ **e** $\mathbf{CA \cap A = \varnothing}$.

EXERCÍCIOS:

1) Se A = $\mathbb{Z}$ **= {... , -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... }** e B = $\mathbb{N}$ **= { 0, 1, 2, 3, 4, ... }, determine:**

a) $A \cup B$;
b) $A \cap B$;
c) $A - B$;
d) $B - A$;
e) $A \Delta B$;
f) $B \Delta A$;
g) $C_A B$;
h) $C_B A$.

2) Se A = [5, 7) e B = (6, 9]**, determine:**

a) $A \cup B$;
b) $A \cap B$;
c) $A - B$;
d) $B - A$;
e) $A \Delta B$;
f) $B \Delta A$;
g) $C_R B$;
h) $C_R A$.

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES $\cap$, $\cup$, e C_S:

Você lembra das propriedades que demonstramos, quando estudamos Lógica das Proposições?
Nós precisaremos de algumas delas para demonstrar algumas proposições da Teoria dos Conjuntos (não esqueça que as definições das operações entre conjuntos foram feitas usando os conceitos da lógica). Para facilitar nosso trabalho, listamos abaixo algumas propriedades que já conhecemos:

1) $\sim(\sim p) = p \quad \forall p$
2) $p \wedge \sim p = 0 \quad \forall p$
3) $p \vee \sim p = 1 \quad \forall p$
4) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \quad \forall p, q$
5) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \quad \forall p, q$
6) $p \wedge 1 = p \quad \forall p$
7) $p \vee 0 = p \quad \forall p$
8) $p \wedge 0 = 0 \quad \forall p$
9) $p \vee 1 = 1 \quad \forall p$
10) $p \wedge p = p \quad \forall p$
11) $p \vee p = p \quad \forall p$
12) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) \quad \forall p, q, r$
13) $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) \quad \forall p, q, r$

14) $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ $\quad \forall$ p, q, r
15) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ $\quad \forall$ p, q, r
16) $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$ $\quad \forall$ p, q
17) $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$ $\quad \forall$ p, q
18) $\sim (p \rightarrow q) = p \wedge \sim q$ $\quad \forall$ p, q
19) $\sim (p \leftrightarrow q) = \sim p \leftrightarrow q$ $\quad \forall$ p, q
20) $p \rightarrow q = \sim p \vee q$ $\quad \forall$ p, q

No que segue abaixo, A, B e C são conjuntos quaisquer, S representa o conjunto universo e $\varnothing$ indica o conjunto vazio.

1) Demonstre as propriedades da **INTERSEÇÃO**:

a) Idempotência: $A \cap A = A \quad \forall A$
b) Comutatividade: $A \cap B = B \cap A \quad \forall A, B$
c) Associatividade: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \forall A, B, C$
d) Elemento Neutro: $S \cap A = A \cap S = A \quad \forall A$
e) Elemento Absorvente: $\varnothing \cap A = A \cap \varnothing = \varnothing \quad \forall A$

2) Demonstre as propriedades da **UNIÃO**:

a) Idempotência: $A \cup A = A \quad \forall A$
b) Comutatividade: $A \cup B = B \cup A \quad \forall A, B$
c) Associatividade: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \forall A, B, C$
d) Elemento Neutro: $\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A \quad \forall A$
e) Elemento Absorvente: $S \cup A = A \cup S = S \quad \forall A$

3) Demonstre as propriedades:

a) Distributiva 1: : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $\quad \forall A, B, C$
b) Distributiva 2: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $\quad \forall A, B, C$
c) $\mathbf{CA \cup A = S}$; $\quad \forall A$
d) $\mathbf{CA \cap A = \varnothing}$; $\quad \forall A$
e) $\mathbf{C(CA) = A}$. $\quad \forall A$
f) $\mathbf{CS = \varnothing}$;
g) $\mathbf{C\varnothing = S}$.

4) Demonstre as segundas leis de Augustus De Morgan:

a) $\mathbf{C(A \cup B) = CA \cap CB}$; $\quad \forall A, B$
b) $\mathbf{C(A \cap B) = CA \cup CB}$. $\quad \forall A, B$

PRINCÍPIO DA DUALIDADE NA TEORIA DOS CONJUNTOS

Dada uma expressão *E*, contendo conjuntos e apenas os símbolos: "$\cup$", "$\cap$", "$\varnothing$", "S" e "$\complement$", define-se a expressão dual de *E*, como a expressão *E'*, obtida de *E*, trocando-se "$\cup$" por "$\cap$"; "$\cap$" por "$\cup$"; "$\varnothing$" por "S" e "S" por "$\varnothing$" conservando-se os demais elementos.
O mais importante resultado sobre a dualidade é que, se a expressão *E* for verdadeira, então sua expressão dual *E'*, também é verdadeira.

EXEMPLOS:

1) E: $A \cap B = B \cap A \quad \forall\, A, B$
   E': $A \cup B = B \cup A \quad \forall\, A, B$
2) E: $S \cap A = A \cap S = A \quad \forall\, A$
   E': $\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = \varnothing \quad \forall\, A$

3) E: $\complement(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \complement\mathbf{A} \cap \complement\mathbf{B} \quad \forall\, A, B$
   E': $\complement(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \complement\mathbf{A} \cup \complement\mathbf{B} \quad \forall\, A, B$

4) E: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad \forall\, A, B, C$
   E': $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \forall\, A, B, C$

<u>TAREFA</u>:

I) Demonstre as propriedades "EXTRAS":

1) $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B) \quad \forall\, A, B$;
2) $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B \quad \forall\, A, B$;
3) Se $X \subset Y$, então $X \cap Y = X$ e $X \cup Y = Y$.

Para resolver as questões da lista 1, citadas acima, você já pode usar as seguintes propriedades:

1) Idempotência: $A \cap A = A; \quad \forall\, A$
2) Comutatividade: $A \cap B = B \cap A; \quad \forall\, A, B$
3) Associatividade: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad \forall\, A, B, C$
4) Elemento Neutro: $S \cap A = A \cap S = A \quad \forall\, A$;
5) Elemento Absorvente: $\varnothing \cap A = A \cap \varnothing = \varnothing; \quad \forall\, A$
6) Idempotência: $A \cup A = A; \quad \forall\, A$
7) Comutatividade: $A \cup B = B \cup A; \quad \forall\, A, B$
8) Associatividade: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad \forall\, A, B, C$
9) Elemento Neutro: $\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A; \quad \forall\, A$
10) Elemento Absorvente: $S \cup A = A \cup S = S; \quad \forall\, A$
11) Distributiva 1: : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad \forall\, A, B, C$
12) Distributiva 2: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad \forall\, A, B, C$
13) $\complement\mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{S}; \quad \forall\, A$

14) $\complement A \cap A = \varnothing$; $\forall$ A

15) $\complement(\complement A) = A$; $\forall$ A

16) $\complement S = \varnothing$;

17) $\complement\varnothing = S$;

18) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$; $\forall$ A, B;

19) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$. $\forall$ A, B;

20) $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$ $\forall$ A, B;

21) $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$ $\forall$ A, B;

22) Se $X \subset Y$, então $X \cap Y = X$ e $X \cup Y = Y$.

23) $A - B = A \cap \complement B$

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Um conjunto ***A*** é ***finito*** se ***A*** = $\varnothing$ ou ***A*** possui ***n*** elementos, para algum ***n*** $\in \mathbb{N}^*$. O número natural ***n*** é dito número de elementos de ***A***.

EXEMPLOS:

a) ***A*** = $\{ x \in \mathbb{Z} ; x^2 - 4 = 0 \} = \{ -2, 2 \}$ logo, ***n*** = 2;
b) ***A*** = $\{ x \in \mathbb{N} ; x^2 - 4 = 0 \} = \{ 2 \}$ logo, ***n*** = 1;
c) ***A*** = $\{ x \in \mathbb{R} ; x^2 + 4 = 0 \} = \varnothing$ (Diz-se que o número de elementos de ***A*** é zero);
d) ***A*** = $\{ x \in \mathbb{Z} ; -1 \leq x < 5 \} = \{ -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$ logo, ***n*** = 6.

Um conjunto ***A*** é ***infinito*** se ***A*** não é finito.

EXEMPLOS:

a) $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito, e desde que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: então $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ são conjuntos infinitos;
b) Os intervalos reais, como, por exemplo: $]\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\, [$ com $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ e $[\, 2, +\infty\,)$, são conjuntos infinitos.

CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E NÃO ENUMERÁVEIS

Um conjunto ***A*** é enumerável se ***A*** é finito ou se ***A*** pode ser escrito como seqüência infinita $(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

EXEMPLOS:

a) ***A*** = $\varnothing$ é enumerável, por definição, pois é finito;
b) ***A*** = $\{ -2, 2 \}$ é enumerável pois é finito;

c) $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, ... \}$ é enumerável pois pode ser escrito como seqüência $\mathbb{N} = \{ x_1, x_2, ... , x_n, ... \}$ com $x_n = n - 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$;

d) $\boldsymbol{P}^+ = \{ 0, 2, 4, 6, ... \}$ é enumerável pois pode ser escrito como seqüência $\boldsymbol{P}^+ = \{ x_1, x_2, ... , x_n, ... \}$ com $x_n = 2n - 2$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

RESULTADOS IMPORTANTES:

1) Se $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{N}$, então $\boldsymbol{X}$ é enumerável;
2) Se $\boldsymbol{Y}$ é enumerável e $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{Y}$, então $\boldsymbol{X}$ é enumerável (Note que o item 1) é um caso particular);
3) Se $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ são enumeráveis então $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}$ é enumerável;
4) Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são enumeráveis, então $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ (isto é, o produto cartesiano de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$) é enumerável.

Conseqüentemente:

a) $\boldsymbol{I}^+ = \{ 1, 3, 5, 7, ... \} \subset \mathbb{N}$, então $\boldsymbol{I}^+$ é enumerável;
b) $5\mathbb{N} = \{ 0, 5, 10, ... \} \subset \mathbb{N}$, então $5\mathbb{N}$ é enumerável;
c) $\mathbb{Z} = - \mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ é enumerável;
d) $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável.

Um conjunto $\boldsymbol{A}$ é não enumerável se ele não é enumerável, isto é, se $\boldsymbol{A}$ é infinito e não pode ser escrito como seqüência infinita ($x_1, x_2, ... , x_n, ...$) com $n \in \mathbb{N}^*$.

EXEMPLOS:

a) $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais) é não enumerável;
b) Se $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, os intervalos reais $] \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} [$; $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$; $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} [$ são exemplos de conjuntos não enumeráveis.
c) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não enumerável;

RESULTADO IMPORTANTE:

Se $\boldsymbol{X}$ é um conjunto não enumerável e $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{Y}$, então $\boldsymbol{Y}$ é não enumerável.

RELAÇÕES BINÁRIAS

Seja $E \neq \varnothing$ um conjunto. Define-se ***relação binária*** de E em E (ou simplesmente ***relação binária*** **em** E) como **qualquer** subconjunto R, não vazio, de $E \times E$, isto é, $R \neq \varnothing$ e $R \subset E \times E$.

Vejamos alguns exemplos:

(1) Seja $E = \{1,2,3\}$ então: $E \times E = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$\mathbf{R_1}$ = $\{(1,2)\}$ é uma relação binária em E.

$\mathbf{R_2}$ = $\{(2,2),(2,3),(3,1),(3,3)\}$ é uma relação binária em E.

$\mathbf{R_3}$ = $E \times E$ é uma relação binária em E.

$\mathbf{R_4}$ = $\{(2,2),(2,5),(3,1)\}$ <u>**não é**</u> uma relação binária em E, pois $(2,5) \notin E \times E$

(2) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = 2x\}$ é uma relação binária de $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$, observe que R tem como representação gráfica, no plano cartesiano, uma reta (a própria reta $y = 2x$).

(3) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2\}$ é uma relação binária de $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$, note que R tem como representação gráfica, no plano cartesiano, uma parábola (a parábola $y = x^2$).

(4) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y \leq x\}$ é uma relação binária em $\mathbb{R}$.

(5) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y > 2x\}$ é uma relação binária em $\mathbb{R}$.

(6) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = -1\}$ <u>**não é**</u> uma relação binária em $\mathbb{R}$, pois $R = \varnothing$.

(7) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 0\}$ é uma relação binária em $\mathbb{R}$, note que $R = \{(0,0)\}$.

(8) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 1\}$ é uma relação binária em $\mathbb{R}$, observe que R tem como representação gráfica, no plano cartesiano, uma circunferência de centro na origem e raio 1.

DEFINIÇÕES E CONVENÇÕES:

Se R é uma relação binária em E, define-se:

I) Domínio da relação R como sendo: $D(R) = \{x \in E; \exists y \in E, com\ (x,y) \in R\} \subset E$;

II) Imagem da relação R como sendo: $Im(R) = \{y \in E; \exists x \in E, com\ (x, y) \in R\} \subset E$.

III) Se $(x, y) \in R$, diz-se que $x\, R\, y$, se $(x, y) \notin R$, diz-se que $x \not R\, y$.

EXEMPLO: Se $E = \{1,2,3\}$ e $R = \{(2,2),(2,1),(3,1)\}$ então: $D(R) = \{2,3\}$ e $Im(R) = \{1,2\}$, além disso: $2R2$; $2R1$; $3R1$; $1 \not R 3$ e $3 \not R 2$.

RELAÇÃO INVERSA

Se $R \subset E \times E$ é uma relação binária, ***a relação inversa de*** R, denotada por R^{-1}, é definida como:

$R^{-1} = \{\ (y,x) \in E \times E\,; (x,y) \in R\ \}$

EXEMPLO:

Sendo $E = \{1,2,3\}$ e $R = \{(2,2),(2,1),(3,1),(3,2)\}$ então $R^{-1} = \{(2,2),(1,2),(1,3),(2,3)\}$

$D(R^{-1}) = \{1,2\} = Im(R)$ e $Im(R^{-1}) = \{2,3\} = D(R)$

TIPOS DE RELAÇÃO BINÁRIA

No que segue o subconjunto não vazio R de $E \times E$ é uma relação binária.

(I) REFLEXIVA:

R é uma relação ***reflexiva*** se e somente se $(\forall x \in E)(x\, R\, x)$, ou seja, $(x,x) \in R, \forall x \in E$. (Todo elemento se relaciona com ele mesmo).

EXEMPLOS:

(1) A relação "**igual a**" no conjunto dos números reais: $x = x, \forall x \in \mathbb{R}$;

(2) A relação "**paralela a**" (||) entre retas pertencentes a um plano π: $r \parallel r, \forall r \in \pi$;

(3) A relação "**menor ou igual a**" no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$: $x \le x, \forall x \in \mathbb{R}$;

(4) A relação "**divide**" (|) em $\mathbb{N}^*$: $x | x, \forall x \in \mathbb{N}^*$. Não sei se você estudou alguma vez esta relação. A definição é a seguinte: Dizemos que ***x*** divide ***y*** em $\mathbb{N}^*$ (denota-se $x | y$) se e somente existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $y = k.x$. Portanto, temos alguns exemplos:

a) $3\mid 12$ (3 divide 12) pois $\exists 4 \in \mathbb{N}^* \; tal\ que\; 12 = 4.3$;

b) Observe que ***é falso que*** $12\mid 3$ (12 divide 3) pois $\nexists\, k \in \mathbb{N}^* \; tal\ que\; 3 = 12.k$, neste caso, dizemos que 12 ***não divide*** 3 (simbolicamente $12 \nmid 3$).

c) $x\mid x, \forall x \in \mathbb{N}^*$, pois $\exists 1 \in \mathbb{N}^* \; tal\ que\; x = 1.x$;

CONTRA – EXEMPLOS:

(1) A relação **maior** no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$: É falso que $x > x, \forall x \in \mathbb{R}$;

(2) A relação **diferente** no conjunto dos números reais: É falso que $x \neq x, \forall x \in R$.

(II) SIMÉTRICA:

R é uma relação ***simétrica*** se e somente se $(\forall x, y \in E\ )(x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x)$.

EXEMPLOS:

(1) A relação "**igual a**" no conjunto dos números reais: $(\forall x, y \in \mathbb{R}\ )(x = y \Rightarrow y = x)$;

(2) A relação "**diferente de**" no conjunto dos números reais: $(\forall x, y \in \mathbb{R}\ )(x \neq y \Rightarrow y \neq x)$;

(3) A relação "**paralela a**" (||) entre retas pertencentes a um plano π : $(\forall r, s \in \pi)(r \parallel s \Rightarrow s \parallel r)$;

(4) A relação "**perpendicular a**" entre retas pertencentes a um plano $\pi : (\forall r, s \in \pi)(r \perp s \Rightarrow s \perp r)$.

CONTRA – EXEMPLOS:

(1) A relação "**maior do que**" no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$: ***É falso que*** $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x > y \Rightarrow y > x)$. Verifique que $x = 3\ e\ y = 2$ é um contra exemplo;

(2) A relação "**divide**" (|) em $\mathbb{N}^*$: ***É falso que*** $(\forall x, y \in \mathbb{N}^*)(x|y \Rightarrow y|x)$. Verifique que $x = 2\ e\ y = 4$ é um contra exemplo.

(III) TRANSITIVA:

R é uma relação ***transitiva*** se e somente se $(\forall x, y, z \in E)(x\,R\,y \ e \ y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z)$.

EXEMPLOS:

(1) A relação "**igual a"** no conjunto dos números reais: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x = y \ e \ y = z \Rightarrow x = z)$;

(2) A relação "**menor ou igual a"** no conjunto dos números reais: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leq y \ e \ y \leq z \Rightarrow x \leq z)$;

(3) A relação "**divide"** (|) em $\mathbb{N}^*$: $(\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*)(x | y \ e \ y | z \Rightarrow x | z)$;

(4) A relação "**paralela a"** (||) entre retas em um plano π: $(\forall r, s, t \in \pi)(r \parallel s \ e \ s \parallel t \Rightarrow r \parallel t)$.

CONTRA – EXEMPLOS:

(1) A relação "**perpendicular a"** de retas pertencentes a um plano π. **É falso que** $(\forall r, s, t \in \pi)(r \perp s \ e \ s \perp t \Rightarrow r \perp t)$;

(2) A relação "**diferente de"** no conjunto dos números reais: **É falso que** $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \neq y \ e \ y \neq z \Rightarrow x \neq z)$. Neste caso, **dê um contra exemplo**!

(3) Se $E = \{a, b, c\}$, então a relação em E, dada por $R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,c)\}$ não é transitiva pois $a\,R\,b, b\,R\,c \ \ mas \ \ a \not{R}\, c$.

(IV) ANTI-SIMÉTRICA:

R é uma relação ***anti-simétrica*** se e somente se $(\forall x, y \in E)(x\,R\,y \ \ e \ \ y\,R\,x \Rightarrow x = y)$ ou, usando a contrapositiva, $(\forall x, y \in E)(x \neq y \Rightarrow x \not{R}\, y \ \ ou \ \ y \not{R}\, x)$.

EXEMPLOS:

(1) A relação "**menor ou igual a**" no conjunto dos reais: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leq y \ e \ y \leq x \Rightarrow x = y)$;
(2) Se $E = \{a, b, c\}$, então a relação em E, dada por $R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,c)\}$ é anti-simétrica.

PERGUNTAS:

a) O que você acha da relação **maior** no conjunto dos números reais, ela é anti-simétrica?
RESPOSTA: Sim

b) A relação “**divide”** (|) em $\mathbb{N}^*$ é anti-simétrica? **RESPOSTA: Sim**

c) A relação “**divide”** (|) em $\mathbb{Z}^*$ é anti-simétrica? **RESPOSTA: Não**

d) Será que existe alguma relação que seja, ao mesmo tempo, simétrica e anti-simétrica?
RESPOSTA: Sim. Por exemplo, a relação de igualdade no conjunto dos números reais.

CONTRA – EXEMPLOS:

(1) Se $E=\{a,b,c\}$, então a relação em E, dada por $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(c,c)\}$ não é anti-simétrica.

(2) A relação **paralelismo** (||) entre retas pertencentes a um plano π não é anti-simétrica.

CONJUNTOS FINITOS E AS PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES

Se E é finito e tem poucos elementos, podemos visualizar as propriedades estudadas em diagramas.

As ***regras*** são as seguintes:

REFLEXIVA: Todo ponto deve ter um laço (tente explicar!).

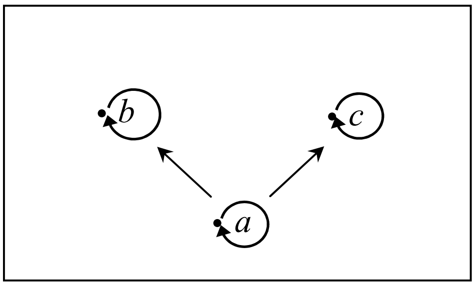
SIMÉTRICA: Se houver uma flecha ela deve ter duas pontas (tente explicar!).

TRANSITIVA: Para todo par de flechas consecutivas existe uma flecha cuja origem é a origem da primeira e cuja extremidade é a extremidade da segunda (tente explicar!).

ANTI-SIMÉTRICA: Não há flechas de duas pontas (tente explicar!).

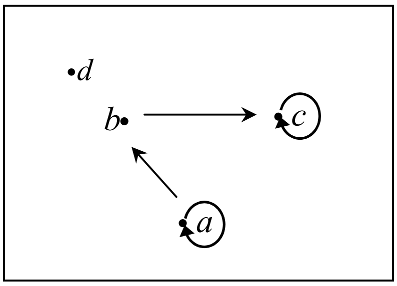
Nos exemplos abaixo **cada retângulo** representa o conjunto E :

1) E



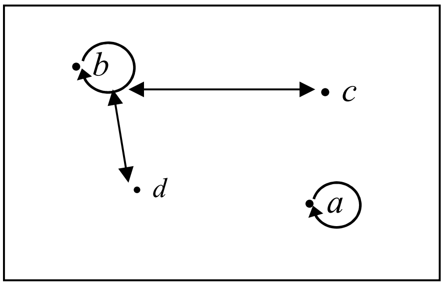
reflexiva; não simétrica; transitiva e anti-simétrica.

2) E



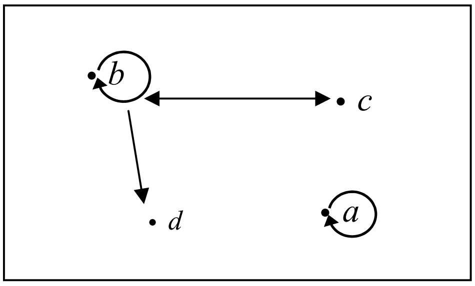
não reflexiva; não simétrica; não transitiva e anti-simétrica.

3) E



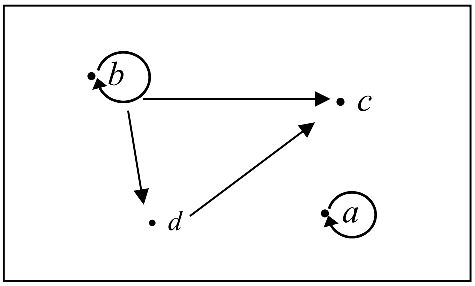
não reflexiva; simétrica; não transitiva e não anti-simétrica.

4) E



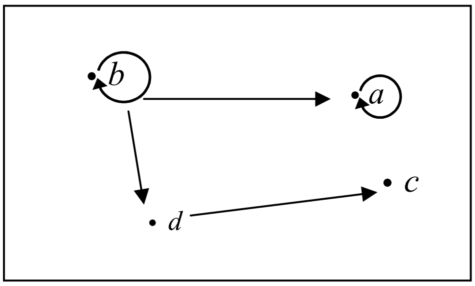
não reflexiva; não simétrica; não transitiva e não anti-simétrica.

5) E



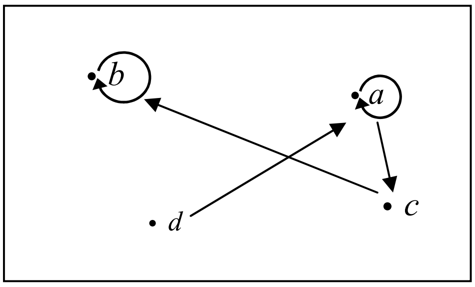
não reflexiva; não simétrica; transitiva e anti-simétrica.

6) E



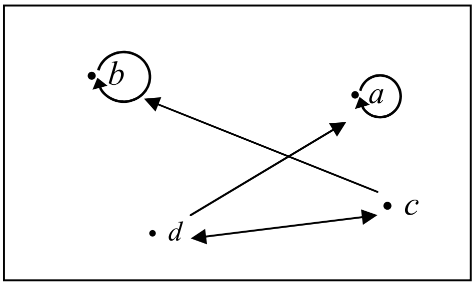
não reflexiva; não simétrica; não transitiva e anti-simétrica.

7) E



não reflexiva; não simétrica; não transitiva e anti-simétrica.

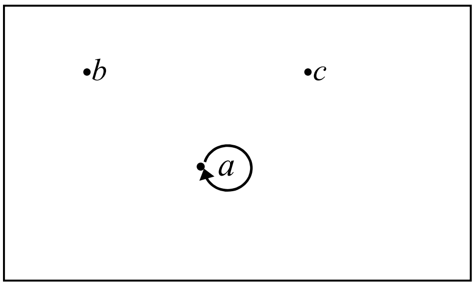
8) E



não reflexiva; não simétrica; não transitiva e não anti-simétrica.

9)

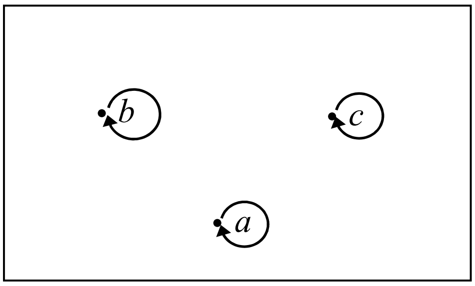
E



não reflexiva; simétrica; transitiva e anti-simétrica.

10)

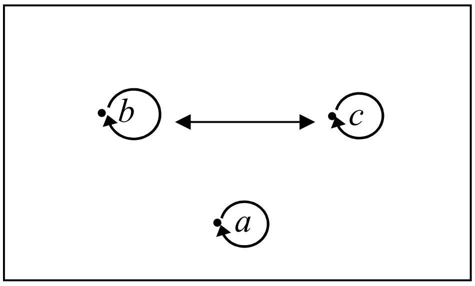
E



reflexiva; simétrica; transitiva e anti-simétrica.

11)

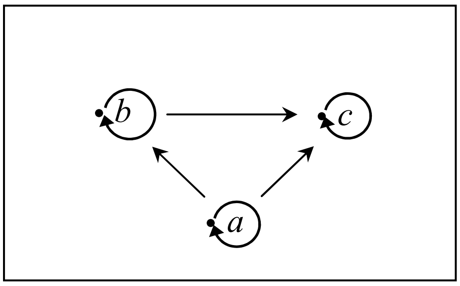
E



reflexiva; simétrica; transitiva e não anti-simétrica.

12)

E



reflexiva; não simétrica; transitiva e anti-simétrica.

CONGRUÊNCIA MÓDULO M

DEFINIÇÃO: Sejam ***x***, ***y*** e ***m*** números inteiros, $m \geq 2$, dizemos que $x \equiv y\left(\bmod m\right)$, lê-se: ***x*** é côngruo a **y** módulo ***m***, se e somente se $x - y = qm$, para algum $q \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLOS:

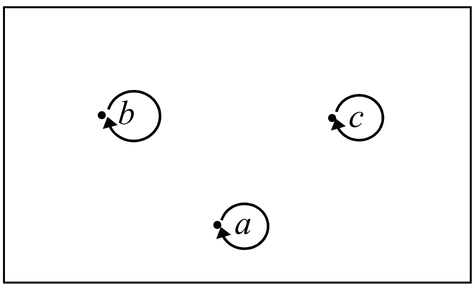
1) $15 \equiv 7\left(\bmod 4\right)$ pois $15 - 7 = 2.4$ (note que, neste caso, $q = 2 \in \mathbb{Z}$);
2) $25 \equiv -10\left(\bmod 5\right)$ pois $25 - \left(-10\right) = 35 = 7.5$ (note que, neste caso, $q = 7 \in \mathbb{Z}$);
3) $-12 \equiv -12\left(\bmod 9\right)$ pois $-12 - \left(-12\right) = 0 = 0.9$ (note que, neste caso, $q = 0 \in \mathbb{Z}$);
4) $13 \equiv 29\left(\bmod 8\right)$ pois $13 - 29 = -16 = \left(-2\right).8$ (note que, agora $q = -2 \in \mathbb{Z}$);
5) Se $n \in \mathbb{Z}$, então $2n + 5 \equiv 3\left(\bmod 2\right)$ pois $2n + 5 - 3 = 2n + 2 = 2\left(n + 1\right)$ (note que $q = n + 1 \in \mathbb{Z}$, desde que $n \in \mathbb{Z}$);
6) Se $n \in \mathbb{Z}$, então $17n - 8 \equiv 2n - 3\left(\bmod 5\right)$ pois $17n - 8 - \left(2n - 3\right) = 15n - 5 = 5\left(3n - 1\right)$ (note que $q = 3n - 1 \in \mathbb{Z}$).

RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

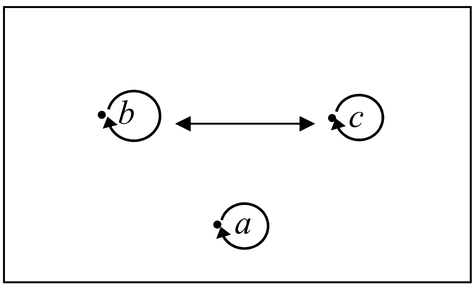
Uma relação R em $E \neq \varnothing$ é chamada relação de equivalência sobre E se e somente se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

EXEMPLOS:

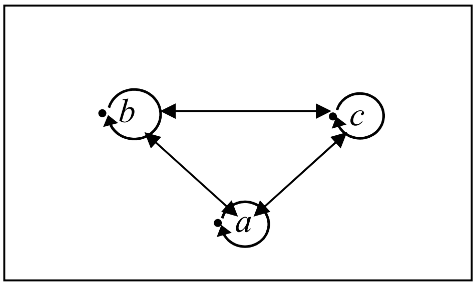
a) E



b) E



c)



d) A relação de igualdade sobre $\mathbb{R}$: $x\ R\ y \Leftrightarrow x = y$.

e) A relação de congruência módulo ***m*** em $\mathbb{Z}$: $x\ R\ y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{m}$ (demonstração em sala).

CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

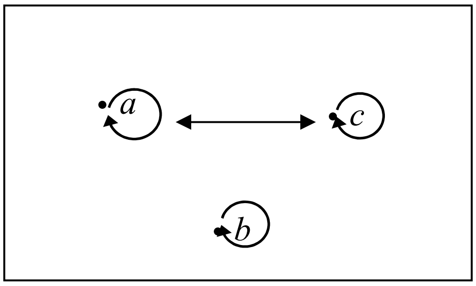
Seja R uma relação de equivalência sobre $E \neq \varnothing$. Dado $a \in E$, chama-se classe de equivalência determinada por a, módulo R, o subconjunto $\overline{a}$ de E formado pelos elementos x tais que $x\ R\ a$. Em símbolos: $\overline{a} = \{x \in E; x\ R\ a\}$.

CONVENÇÃO: O conjunto de todas as classes de equivalência, tendo como base uma determinada relação R em $E \neq \varnothing$, será indicada por E / R e chamado o ***conjunto quociente*** de E por R.

EXEMPLOS:

1)Seja $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$ em $E = \{a,b,c\}$. Temos: $\overline{a} = \{a,c\}$; $\overline{b} = \{b\}$ e $\overline{c} = \{a,c\}$.
Portanto o conjunto quociente é $E / R = \{\{a,c\},\{b\}\}$. O diagrama sagital de R (de "flechas e laços") é:

E



Observe que: $\begin{cases} \{a,c\} \cup \{b\} = E \\ \{a,c\} \cap \{b\} = \varnothing \end{cases}$.

2) Considere agora a relação R, dada por $x\ R\ y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{2}$ em $\mathbb{Z}$.
Quem será $\overline{0}$ (ou seja, a classe de equivalência do zero)? É, por definição, o conjunto dos números $x \in \mathbb{Z}$, tais que $x \equiv 0 \pmod{2}$, isto é, $x - 0 = 2q \therefore x = 2q,\ q \in \mathbb{Z}$, assim: $\overline{0} = \{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$ (ou seja, o conjunto dos números pares).

Quem será $\overline{1}$ (ou seja, a classe de equivalência do um)? É, por definição, o conjunto dos números $x \in \mathbb{Z}$, tais que $x \equiv 1(\bmod 2)$, isto é, $x-1=2q \therefore x=2q+1, q \in \mathbb{Z}$, assim: $\overline{1}=\{\ldots,-3,-1,1,3,\ldots\}$ (isto é, o conjunto dos números ímpares).
Deste modo o conjunto quociente é $\mathbb{Z}/R=\{\overline{0},\overline{1}\}$ que é denotado por $\mathbb{Z}_2$ (lê-se: "zê dois").

Note que: $\begin{cases} \overline{0} \cup \overline{1} = \mathbb{Z} \\ \overline{0} \cap \overline{1} = \varnothing \end{cases}$.

3) Consideremos agora a relação R, dada por: $x\ R\ y \Leftrightarrow x \equiv y(\bmod 3)$ em $\mathbb{Z}$.

Você imagina quem seja "zê três" (pois agora a congruência é módulo 3!)?

Vamos lá:
Quem será $\overline{0}$? O conjunto dos números $x \in \mathbb{Z}$, tais que $x \equiv 0(\bmod 3)$, isto é, $x-0=3q \therefore x=3q, q \in \mathbb{Z}$, assim: $\overline{0}=\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$ (ou seja, o conjunto dos múltiplos de 3).
Quem será $\overline{1}$? O conjunto dos números $x \in \mathbb{Z}$, tais que $x \equiv 1(\bmod 3)$, isto é, $x-1=3q \therefore x=3q+1, q \in \mathbb{Z}$, assim: $\overline{1}=\{\ldots,-5,-2,1,4,7,\ldots\}$ (isto é, o conjunto dos múltiplos de 3 **mais** um).
Quem será $\overline{2}$? O conjunto dos números $x \in \mathbb{Z}$, tais que $x \equiv 2(\bmod 3)$, isto é, $x-2=3q \therefore x=3q+2, q \in \mathbb{Z}$, assim: $\overline{2}=\{\ldots,-4,-1,2,5,8,\ldots\}$ (isto é, o conjunto dos múltiplos de 3 **mais** dois).

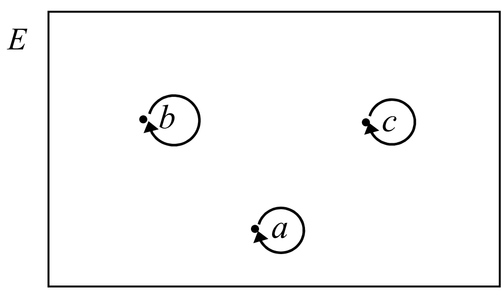
Portanto o conjunto quociente $\mathbb{Z}_3$ é $\mathbb{Z}_3=\mathbb{Z}/R=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$.

Note que: $\begin{cases} \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} = \mathbb{Z} \\ \overline{0} \cap \overline{1} = \overline{0} \cap \overline{2} = \overline{1} \cap \overline{2} = \varnothing \end{cases}$.

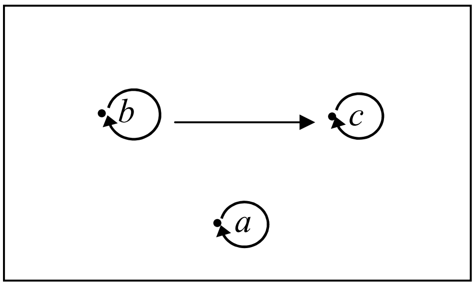
RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL

Uma relação R em $E \neq \varnothing$ é chamada relação de ordem parcial (abreviada por r.o.p) sobre E se e somente se R é **reflexiva, anti-simétrica e transitiva**.

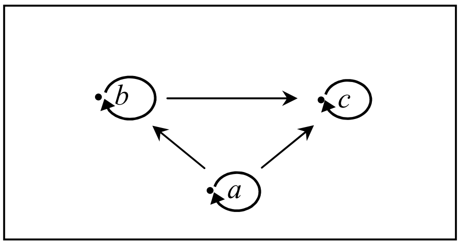
EXEMPLOS:
a)



b) E



c) E



d) A relação **menor ou igual** no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$: $x\ R\ y \Leftrightarrow x \leq y$;

e) A relação **divide** ($|$) em $\mathbb{N}^*$: $x\ R\ y \Leftrightarrow x \mid y$.

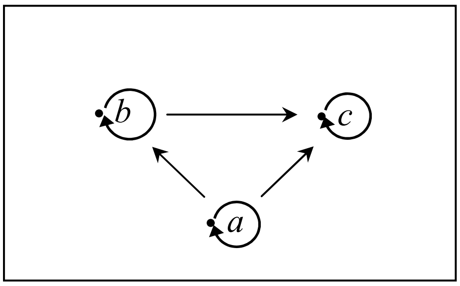
RELAÇÃO DE ORDEM TOTAL

Uma relação R em $E \neq \varnothing$ é chamada relação de ordem total (abreviada por r.o.t) sobre E se e somente se R é relação de ordem parcial e além disso, $\forall x, y \in R \quad tem-se \quad x\,R\,y \quad ou \quad y\,R\,x$.

EXEMPLOS:

a)

E



b) A relação **menor ou igual** no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$: $x\ R\ y \Leftrightarrow x \leq y$;

CONTRA – EXEMPLO:

A relação **divide** ($|$) em $\mathbb{N}^*$ é r.o.p mas não é r.o.t pois, por exemplo $2 \nmid 3$ e também $3 \nmid 2$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Se R é r.o.p e $x R y$ diz-se que "x precede y" e indica-se por $x \preceq y$.
Se R é r.o.p e $x \not R y$ diz-se que "x não precede y" e indica-se por $x \not\preceq y$.

EXEMPLOS:

a) Seja a relação **divide** ($\mid$) em $\mathbb{N}^*$:

$5 \mid 25$, logo $5 \preceq 25$.

$25 \nmid 5$, logo $25 \not\preceq 5$.

b) Considere a relação **menor ou igual** no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$: $x\ R\ y \Leftrightarrow x \leq y$:

$2 \leq 3$, logo $2 \preceq 3$.

$3 \leq 2$ é falso, logo $3 \not\preceq 2$.

LIMITES DE CONJUNTOS

Seja E um conjunto parcialmente ordenado (ou seja, um conjunto que admite uma ordem parcial) mediante a relação $\preceq$. Seja $A \neq \varnothing$ um subconjunto de E.

DEFINIÇÃO 1: Um elemento $L \in E$ é um limite superior de A se for verdadeira a proposição: $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \preceq L)$, isto é, quando todo elemento de A precede L. De agora em diante denotaremos o conjunto de todos os limites superiores de A como sendo $X = \{L \in E; L \text{ é limite superior de } A\}$.

DEFINIÇÃO 2: Um elemento $l \in E$ é um limite inferior de A se e somente se: $(\forall x)(x \in A \Rightarrow l \preceq x)$, isto é, quando l precede todo elemento de A. De agora em diante denotaremos o conjunto de todos os limites inferiores de A como sendo $Y = \{L \in E; L \text{ é limite inferior de } A\}$.

DEFINIÇÃO 3: Um elemento $M \in A$ é um máximo de A se e somente se: $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \preceq M)$, **isto é**, quando M é um limite superior de A e pertence a A.

DEFINIÇÃO 4: Um elemento $m \in A$ é um mínimo de A se e somente se: $(\forall x)(x \in A \Rightarrow m \preceq x)$, **isto é**, quando m é um limite inferior de A e pertence a A.

DEFINIÇÃO 5: Chama-se supremo (***S***) de A o mínimo (caso exista) do conjunto dos limites superiores de A.

DEFINIÇÃO 6: Chama-se ínfimo (***I***) de A o máximo (caso exista) do conjunto dos limites inferiores de A.

OBSERVAÇÃO

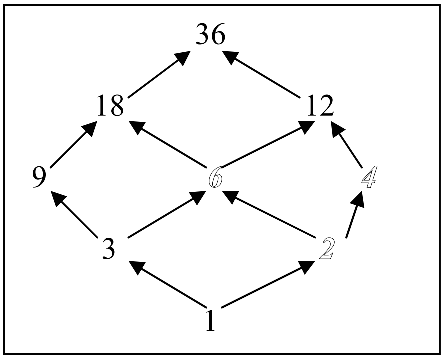
Quando existem **_m, M, I_** e **_S_** eles são únicos e, além disso: $\begin{cases} m = I \\ M = S \end{cases}$.

EXEMPLOS:

1) Se $E = \mathbb{R}$, $A =]0,1]$ e a ordem é a habitual ($\leq$), temos:

a) Limite superior $L \in \mathbb{R}$: $\forall L \geq 1$, ou seja, são limites superiores de A, quaisquer números maiores ou iguais a um.
b) Limite inferior $l \in \mathbb{R}$: $\forall l \leq 0$, ou seja, são limites inferiores de A, quaisquer números menores ou iguais a zero.
c) Máximo, $M \in A$: $M = 1$.
d) Mínimo, $m \in A$: **não existe**.
e) Supremo de A: $S = 1$.
f) Ínfimo de A: $I = 0$.

2) Faça o mesmo estudo para $E = \mathbb{R}$, $A =]-2,1[$;
3) Faça o mesmo estudo para $E = \mathbb{R}$, $A = [5,+\infty)$;
4) Faça o mesmo estudo para $E = \mathbb{R}$, $A = (-\infty,-2]$;
5) Seja $E = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ e $A = \{2,4,6\}$ e a ordem é a relação " | " (lembre que a relação "divide" é de ordem parcial, isto é reflexiva, anti-simétrica e transitiva em E). Usaremos o diagrama simplificado (omitindo as propriedades reflexiva e transitiva, para não sobrecarregar o esquema de flechas). Observe, no esquema abaixo, que os elementos de A (o 2, o 4 e o 6) estão realçados.



e) Limites superiores: 12 e 36.
f) Limites inferiores: 1 e 2.
g) Máximo: **não há**.
h) Mínimo: 2.
i) Supremo: 12.
j) Ínfimo: 2.

6) Faça o mesmo estudo para $A = \{2, 3\}$;
7) Faça o mesmo estudo para $A = \{2, 3, 6\}$;
8) Faça o mesmo estudo para $A = \{1\}$;
9) Faça o mesmo estudo para $A = \{3, 4, 6\}$.

OPERAÇÕES BINÁRIAS

Seja $E \neq \emptyset$ um conjunto. Uma operação binária em E é ***qualquer função*** $\begin{aligned} * : E \times E &\to E \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$

Isto é, a operação $*$ transforma qualquer par de elementos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ do conjunto $E \times E$ em um elemento do próprio conjunto $\boldsymbol{E}$.

Vejamos alguns exemplos:

(1) A operação de adição $\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$

(2) A operação $\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$

(3) A operação $\begin{aligned} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$ (Do mesmo modo podemos expressar a operação + em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$);

(4) A operação de multiplicação $\bullet$ em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$;

(5) A operação $\begin{aligned} \dagger : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* &\to \mathbb{N}^* \\ (x, y) &\mapsto x^y \end{aligned}$

(6) A operação $\begin{aligned} - : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (x, y) &\mapsto x - y \end{aligned}$

Responda as perguntas abaixo (justificando suas respostas!)

1) "– " é operação binária em $\mathbb{N}$? (quando perguntamos se "– " é operação binária em $\mathbb{N}$, queremos perguntar, naturalmente se, $- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função)

2) x^y é operação binária em $\mathbb{Z}$?

3) "+" é operação binária em $\mathbb{Q}$ ' (conjunto dos números irracionais)?

4) "$\bullet$" é operação binária em $\mathbb{Q}$ '?

Todas as respostas acima são iguais...

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

No que segue, o conjunto ***E*** é diferente do vazio.

(I) COMUTATIVA:

Dizemos que uma operação binária $*: E \times E \to E$ é comutativa em ***E*** (ou simplesmente, $*$ é comutativa em ***E***), se e somente se $x * y = y * x$ **para todos** ***x*** e ***y*** pertencentes a ***E***.

Responda as perguntas abaixo (justifique suas respostas!):

1. A operação de adição + em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$ é comutativa?
2. A operação de multiplicação $\bullet$ em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$ é comutativa?
3. A operação $+ \, em \; M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é comutativa?
4. A operação $*$ em $\mathbb{R}$, sendo $*$ dada por $x * y = x + y + xy$ é comutativa?
5. A operação $\square$ em $\mathbb{R}$, definida por $a \square b =$ mín$\{a, b\}$, (onde mín$\{a, b\}$ representa o mínimo, ou menor, dentre os números reais *a, b*) é comutativa ?
6. A operação $\bullet \, em \; M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ é comutativa?
7. A operação binária x^y em $\mathbb{N}^*$ é comutativa?
8. A operação "– "em $\mathbb{Z}$ é comutativa?
9. A operação ∇ em $\mathbb{Q}^*$, sendo ∇ dada por $x \nabla y = \dfrac{x}{y}$ é comutativa?

As respostas, do item 1 até o item 5, são "sim"; os outros itens...

(II) ASSOCIATIVA:

Dizemos que uma operação binária $*: E \times E \to E$ é associativa em ***E*** (ou simplesmente, $*$ é associativa em ***E***), se e somente se $(x * y) * z = x * (y * z)$ **para todos** ***x***, ***y*** e ***z*** pertencentes a ***E***.

Responda as perguntas abaixo:

1. A operação de adição + em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$ é associativa? É comutativa?
2. A operação de multiplicação $\bullet$ em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$ é associativa?
3. A operação $+ \, em \; M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é associativa?
4. A operação $\bullet \, em \; M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é associativa?
5. A operação $*$ em $\mathbb{R}$, sendo $*$ dada por $x * y = x + y + xy$ é associativa?
6. A operação "– "em $\mathbb{Z}$ é associativa?
7. A operação binária x^y em $\mathbb{N}^*$ é associativa?
8. A operação ∇ em $\mathbb{Q}^*$, sendo ∇ dada por $x \nabla y = \dfrac{x}{y}$ é associativa?

Do item 1 até o item 5 a resposta é "sim".

EXERCÍCIOS DE CLASSE:

1) A operação $*$ em $\mathbb{R}$, sendo $*$ dada por $a*b=a+2b$ é associativa?
2) Seja a operação $*$ em $\mathbb{Q}$, sendo $*$ dada por $x*y=x+y+xy$ Determine ***x*** na equação $2*x*3=17$.
3) Considere a operação Δ em A = {1, 2, 3 }, definida pela tabela: Verifique se a operação Δ é comutativa e se ela é associativa.

Δ	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

(III) ELEMENTO NEUTRO:

Dizemos que uma operação binária $*: E\times E\to E$ tem elemento neutro se e somente se existir um elemento ***e*** $\in E$ (ou simplesmente que ***e*** é elemento neutro da operação $*$) tal que $e*x=x*e=x$ **para todo** ***x*** $\in E$.

PROPOSIÇÃO 1:

Se $*$ é operação binária em ***E***, com neutro ***e***, então ***e*** é único.

Demonstração em sala.

Nos itens abaixo, **verifique se** cada operação possui elemento neutro. **Caso a operação tenha elemento neutro**, identifique-o, justificando sua resposta.

1. A operação de adição + em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.
2. A operação de multiplicação $\bullet$ em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.
3. A operação $+\ em\ M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
4. A operação $\bullet\ em\ M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
5. A operação $*$ em $\mathbb{R}$, sendo $*$ dada por $x*y=x+y+xy$.
6. A operação binária x^y em $\mathbb{N}^*$.
7. A operação ∇ em $\mathbb{R}$, sendo ∇ dada por $x\nabla y=\dfrac{x+y}{2}$. (verifique também se ∇ é comutativa e associativa).
8. A operação ∇ em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, sendo ∇ dada por $(a,b)\nabla(c,d)=(ac,ad+b)$.

(IV) ELEMENTOS SIMETRIZÁVEIS:

Seja $*: E\times E\to E$ uma operação binária com elemento neutro ***e***. Dizemos que ***x*** $\in E$ é simetrizável se e somente se existir um elemento ***x'*** $\in E$ tal que ***x*** $*$ ***x'*** = ***x'*** $*$ ***x*** = ***e***. Caso exista, o elemento ***x'***, ele é chamado o simétrico de ***x*** (e vice-versa).

Nos itens abaixo, **verifique quais elementos dos conjuntos dados (com relação às respectivas operações) possuem simétricos.**

1. A operação de adição + em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.
2. A operação de multiplicação $\bullet$ em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.
3. A operação $+\, em\ M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
4. A operação $\bullet\, em\ M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
5. A operação $*$ em $\mathbb{R}$, sendo $*$ dada por $x * y = x + y + xy$.

RESPOSTAS:

1. **Considerando a operação de adição:**

Em $\mathbb{N}$, apenas o zero possui simétrico;
Em $\mathbb{Z}$ todos os elementos são simetrizáveis;
Em $\mathbb{Q}$ todos os elementos são simetrizáveis;
Em $\mathbb{R}$ todos os elementos são simetrizáveis;
Em $\mathbb{C}$ todos os elementos são simetrizáveis.

2. **Considerando a operação de multiplicação:**

Em $\mathbb{N}$, apenas o número um possui simétrico;
Em $\mathbb{Z}$ apenas o número um e o número menos um possuem simétricos;
Em $\mathbb{Q}$ todos os elementos são simetrizáveis exceto o zero;
Em $\mathbb{R}$ todos os elementos são simetrizáveis exceto o zero;
Em $\mathbb{C}$ todos os elementos são simetrizáveis exceto o zero.

3. **Considerando a operação** $+\, em\ M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, todos os elementos são simetrizáveis, isto é, todas as matrizes de ordem 2 por 3 admitem um simétrico.

4. **Considerando a operação** $\bullet\, em\ M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, todas as matrizes de determinante diferente de zero admitem inversa.

5. **Considerando a operação** $*$ em $\mathbb{R}$, tal que $x * y = x + y + xy$ todo elemento diferente de menos um admite simétrico.

PROPOSIÇÃO 2:

Seja $*$ uma operação binária associativa em ***E***, com neutro ***e***. Se ***x'*** é o simétrico de ***x*** então ***x'*** é único.
Demonstração em sala.

PROPOSIÇÃO 3:

Seja $*$ uma operação binária associativa em ***E***, com neutro ***e***. Se ***x'*** é o simétrico de ***x*** então ***x'*** é simetrizável e ***(x')' = x***.

Demonstração em sala.

PROPOSIÇÃO 4:

Seja $*$ uma operação binária associativa em ***E***, com neutro ***e***. Se ***x*** e ***y*** são simetrizáveis com simétricos ***x'*** e ***y'***, respectivamente, então $x*y$ é o simetrizável e ($x*y$)' = y' $*$ x'.

Demonstração em sala.

(V) ELEMENTO ABSORVENTE:

Dizemos que um elemento ***a*** $\in E$ é absorvente em relação à operação binária $*: E \times E \to E$, se e somente se $a*x = x*a = a$ **para todo** ***x*** $\in E$.

Nos itens abaixo, **verifique se** cada operação possui elemento absorvente. **Caso a operação tenha elemento absorvente**, identifique-o, justificando suas respostas.

1. A operação de adição + em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.
2. A operação de multiplicação **.** em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.
3. A operação $\bullet$ *em* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
4. A operação binária máximo divisor comum em $\mathbb{N}^*$.

PROPOSIÇÃO 5:

Se $*$ é operação binária em ***E***, com elemento absorvente ***a***, então ***a*** é único.

Demonstração em sala.

(VI) DISTRIBUTIVA:

Sejam Δ e $*$ operações binárias em ***E***. Dizemos que Δ é distributiva em relação a $*$ se e somente se $x\Delta(y*z) = (x\Delta y)*(x\Delta z)$ **para todos** ***x***, ***y*** e ***z*** pertencentes a ***E***.

EXEMPLOS:

a) A multiplicação é distributiva em relação à adição em $\mathbb{R}$, pois $x.(y+z) = x.y + x.z$, **para todos** ***x***, ***y*** e ***z*** pertencentes a $\mathbb{R}$.

b) Sejam Δ e $*$ operações binárias em $\mathbb{Q}$, definidas por $x\Delta y = 0$ e $x*y = x+y$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$. Verifique que Δ é distributiva em relação a $*$. (será que $*$ é distributiva em relação a Δ?).

(VII) ELEMENTOS REGULARES:

Seja $*: E \times E \to E$ uma operação binária.

Dizemos que ***a*** $\in E$ é regular à esquerda em relação à operação $*$ se e somente se a ocorrência da igualdade $a*x = a*y$ implica que ***x = y*** para todos x e y pertencentes a ***E*** que satisfazem a igualdade citada.
Dizemos que ***a*** $\in E$ é regular à direita em relação à operação $*$ se e somente se a ocorrência da igualdade $x*a = y*a$ implica que ***x = y*** para todos x e y pertencentes a ***E*** que satisfazem a igualdade citada.
Finalmente, dizemos que ***a*** $\in E$ é regular em relação à operação $*$ se e somente se ***a*** é regular à direita e à esquerda.

RESUMINDO:

a $\in E$ é regular se e somente se $\begin{cases} a*x = a*y \\ x*a = y*a \end{cases} \Rightarrow x = y$, para todos x e y pertencentes a ***E*** e que satisfaçam as igualdades anteriores à implicação.

Nos itens abaixo, **verifique quais elementos dos conjuntos dados (com relação às respectivas operações) são regulares.**

1. A operação de adição + em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.
2. A operação de multiplicação $\bullet$ em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$.
3. A operação $\bullet$ *em* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
4. A operação $*$ em $\mathbb{R}$, sendo $*$ dada por $x*y = x+y+2$.

PROPOSIÇÃO 6:

Seja $*$ uma operação binária associativa em ***E***, com neutro ***e***. Se ***a*** é simetrizável em ***E***, então ***a*** é elemento regular.

Demonstração em sala.

EXERCÍCIOS:

1) A operação $\bigcirc$ em $\mathbb{N}^*$ dada por $x \bigcirc y = x^y$ possui elemento neutro?
2) Determine, caso exista, o elemento neutro da operação $*$ em $\mathbb{R}$, dada por $x*y = x+y+xy$.
3) Determine, caso exista, o elemento neutro da operação $*$ em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, dada por $(a,b)*(c,d) = (ac, ad+b)$.
4) Verifique se a operação $*$ em $\mathbb{R}$, dada por $x*y = \dfrac{x-y}{2}$ é comutativa ou associativa.
5) Estude todas as propriedades vistas acima, exceto a propriedade distributiva, para a operação $*$ em $\mathbb{R}$, dada por $x*y = x+y+3$.

TÁBUAS DE OPERAÇÕES E PROPRIEDADES

Se E = { $a_1, a_2, ..., a_n$ } pode-se estudar as propriedades de uma operação $* : E \times E \rightarrow E$, por meio de uma tabela matricial, chamada tábua da operação $*$:

$*$	a_1	a_2	...	a_i	...	a_n
a_1	$a_1 * a_1 = \mathbf{a_{11}}$	$a_1 * a_2 = \mathbf{a_{12}}$	...	$a_1 * a_i = \mathbf{a_{1i}}$	...	$a_1 * a_n = \mathbf{a_{1n}}$
a_2	$a_2 * a_1 = \mathbf{a_{21}}$	$a_2 * a_2 = \mathbf{a_{22}}$	...	$a_2 * a_i = \mathbf{a_{2i}}$	...	$a_2 * a_n = \mathbf{a_{2n}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	$a_i * a_1 = \mathbf{a_{i1}}$	$a_i * a_2 = \mathbf{a_{i2}}$	...	$a_i * a_i = \mathbf{a_{ii}}$	...	$a_i * a_n = \mathbf{a_{in}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	$a_n * a_1 = \mathbf{a_{n1}}$	$a_n * a_2 = \mathbf{a_{n2}}$	...	$a_n * a_i = \mathbf{a_{ni}}$	...	$a_n * a_n = \mathbf{a_{nn}}$

A primeira linha (exceto a operação $*$) é denominada ***linha fundamental***;
A primeira coluna (exceto a operação $*$) é denominada ***coluna fundamental***;
A matriz $\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ cujos elementos estão em negrito, chama-se ***matriz dos resultados***;
Os elementos $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ formam a ***diagonal*** da tábua de operações.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE AS PROPRIEDADES DE UMA OPERAÇÃO $*$, SOBRE UM CONJUNTO *E* NÃO VAZIO:

1) $*$ é **comutativa** em ***E*** se a matriz dos resultados for simétrica (isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, para todos i,j);

2) $*$ possui **elemento neutro** em ***E*** se existe algum elemento, tal que à direita dele a linha fundamental se repete e abaixo dele a coluna fundamental se repete.

3) Para saber se $*$ possui **elementos simetrizáveis** em ***E***, basta verificar, para cada elemento, na linha fundamental e também na coluna fundamental se ele operado com algum elemento dá como resultado o neutro.

4) Para saber se $*$ possui **elemento absorvente** em ***E***, basta verificar, para cada elemento, na linha e também na coluna desse elemento, se o resultado é ***<u>sempre</u>*** ele próprio.

5) Para saber se $*$ possui **elementos regulares** em ***E***, basta verificar, para cada elemento, na linha e também na coluna dele se ***<u>não há</u>*** elementos repetidos.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: Se a operação for comutativa, basta olhar ***<u>ou</u>*** a linha ***<u>ou</u>*** a coluna do elemento para verificar as propriedades 2) a 5).

<u>APLICAÇÃO</u>:

Verifique, usando as regras enunciadas acima, em relação à operação $*$, dada pela tabela abaixo, que

i) $*$ não é comutativa;
ii) $*$ possui neutro ***a***;

iii) ***a***, ***b***, ***f*** são simetrizáveis;
iv) $*$ ***não tem*** elemento absorvente;
v) ***a***, ***b*** são regulares

$*$	a	b	c	d	f
a	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**
b	**b**	**c**	**d**	**f**	**a**
c	**c**	**d**	**f**	**b**	**c**
d	**d**	**f**	**b**	**c**	**b**
f	**f**	**a**	**d**	**f**	**c**

Considere os seguintes exemplos:

1) Sejam E = D (15) = { 1, 3, 5, 15 } e a operação $*$, dada por $x * y = mdc(x, y)$. Faça a tábua de operações e verifique se $*$ é comutativa, possui elemento neutro, possui elementos simetrizáveis, possui elemento absorvente e possui elementos regulares.
2) Faça o mesmo estudo para a operação $*$, em E = D (14) = { 1, 2, 7, 14 }dada por $x * y = mmc(x, y)$.
3) Faça o mesmo estudo para a operação $*$, em E = { A, B, C, D }e $A \subset B \subset C \subset D$ dada por $X * Y = X \cup Y$.
4) O mesmo estudo para a operação $*$ tal que $x * y$ = resto da divisão de $x.y$ por 4 em E = { 0, 1, 2, 3 }.

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Sejam $E \neq \varnothing$ um conjunto e $*$ e Δ duas operações binárias em E.

I) Dizemos que o par $\langle E,* \rangle$ é um **semi-grupo** se a operação $*$ for associativa.

EXEMPLOS: $\langle \mathbb{N},+ \rangle$; $\langle \mathbb{N},\bullet \rangle$; $\langle M_{m\times n}(\mathbb{R}),+ \rangle$ e $\langle M_{n\times n}(\mathbb{R}),\bullet \rangle$.

II) O par $\langle E,* \rangle$ é um **monóide** se a operação $*$ for associativa e possuir elemento neutro.

EXEMPLOS: $\langle \mathbb{N},+ \rangle$; $\langle \mathbb{N},\bullet \rangle$; $\langle M_{m\times n}(\mathbb{R}),+ \rangle$ e $\langle M_{n\times n}(\mathbb{R}),\bullet \rangle$.

III) O par $\langle E,* \rangle$ é um **grupo** se a operação $*$ for associativa, possuir elemento neutro e se todo elemento de ***E*** for simetrizável em relação a $*$.

EXEMPLOS: $\langle \mathbb{Z},+ \rangle$; $\langle \mathbb{Q}^*,\bullet \rangle$ e $\langle M_{m\times n}(\mathbb{R}),+ \rangle$.

IV) O par $\langle E,* \rangle$ é um **grupo comutativo** se a operação $*$ for associativa, possuir elemento neutro, se todo elemento de ***E*** for simetrizável em relação a $*$ e se $*$ for comutativa.

EXEMPLOS: $\langle \mathbb{Z},+ \rangle$; $\langle \mathbb{Q}^*,\bullet \rangle$ e $\langle M_{m\times n}(\mathbb{R}),+ \rangle$.

V) O terno $\langle E,*,\Delta \rangle$ é um **anel** se o par $\langle E,* \rangle$ é um **grupo comutativo,** o par $\langle E,\Delta \rangle$ for um semi-grupo (isto é, Δ for associativa) e Δ for distributiva em relação a $*$.

EXEMPLOS: $\langle \mathbb{Z},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{Q},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{R},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{C},+,\bullet \rangle$; $\langle M_{n\times n}(\mathbb{R}),+,\bullet \rangle$ e $\langle \mathbb{Q},*,\Delta \rangle$, onde $\begin{cases} x*y = x+y-1 \\ x\Delta y = x+y-xy \end{cases}$.

VI) O terno $\langle E,*,\Delta \rangle$ é um **anel com unidade** se $\langle E,*,\Delta \rangle$ for um anel e se $\exists\, e_\Delta \in E$ tal que $x\,\Delta\, e_\Delta = e_\Delta \Delta\, x = x, \quad \forall x \in E$.

EXEMPLOS: $\langle \mathbb{Z},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{Q},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{R},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{C},+,\bullet \rangle$; $\langle M_{n\times n}(\mathbb{R}),+,\bullet \rangle$ e $\langle \mathbb{Q},*,\Delta \rangle$, onde $\begin{cases} x*y = x+y-1 \\ x\Delta y = x+y-xy \end{cases}$.

VII) O terno $\langle E,*,\Delta \rangle$ é um **anel comutativo**, se $\langle E,*,\Delta \rangle$ for um anel e se a operação Δ for comutativa.

EXEMPLOS: $\langle \mathbb{Z},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{Q},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{R},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{C},+,\bullet \rangle$ e $\langle \mathbb{Q},*,\Delta \rangle$, onde $\begin{cases} x*y = x+y-1 \\ x\Delta y = x+y-xy \end{cases}$.

VIII) O terno $\langle E,*,\Delta \rangle$ é um **corpo** se $\langle E,*,\Delta \rangle$ for um anel com unidade e se $\forall x \in E-\{e_*\}$ (isto é, $x \neq e_*$) é elemento simetrizável em relação à operação Δ.

EXEMPLOS: $\langle \mathbb{Q},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{R},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{C},+,\bullet \rangle$ e $\langle \mathbb{Q},*,\Delta \rangle$, onde $\begin{cases} x*y = x+y-1 \\ x\Delta y = x+y-xy \end{cases}$.

IX) O terno $\langle E,*,\Delta \rangle$ é um **corpo comutativo** se $\langle E,*,\Delta \rangle$ for um corpo e se a operação Δ for comutativa.

EXEMPLOS: $\langle \mathbb{Q},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{R},+,\bullet \rangle$; $\langle \mathbb{C},+,\bullet \rangle$ e $\langle \mathbb{Q},*,\Delta \rangle$, onde $\begin{cases} x*y = x+y-1 \\ x\Delta y = x+y-xy \end{cases}$.

HOMOMORFISMOS ENTRE GRUPOS

DEFINIÇÃO: Se $\langle G,* \rangle$ e $\langle J,\Delta \rangle$ são grupos uma função $f:\langle G,* \rangle \to \langle J,\Delta \rangle$ é um ***homomorfismo*** se e somente se $f(x*y) = f(x)\,\Delta\, f(y), \quad \forall x,y \in G$.

EXEMPLOS:

1) $f:\langle \mathbb{R}_+^*,\bullet \rangle \to \langle \mathbb{R},+ \rangle$ dada por $f(x) = \log x$

De fato: $f(x.y) = \log(x.y) = \log x + \log y = f(x) + f(y)$.

2) $f:\langle \mathbb{Z},+ \rangle \to \langle \mathbb{C}^*,\bullet \rangle$ dada por $f(m) = i^m$

Realmente, pois: $f(m+n) = i^{m+n} = i^m.i^n = f(m).f(n)$.

3) $f:\langle \mathbb{R},+ \rangle \to \langle \mathbb{R},+ \rangle$ dada por $f(x) = 5x$

De fato: $f(x+y) = 5(x+y) = 5x+5y = f(x)+f(y)$.

4) Observe que $f:\langle \mathbb{R},+ \rangle \to \langle \mathbb{R},+ \rangle$ dada por $f(x) = 5x+3$ ***não é*** um homomorfismo, pois

$$f(x+y) = 5(x+y)+3 = 5x+5y+3 \neq (5x+3)+(5y+3) = f(x)+f(y)$$

Núcleo de um homomorfismo

Se $f:\langle G,*\rangle \to \langle J,\Delta\rangle$ é um ***homomorfismo***, define-se o ***núcleo de f***, e denota-se $N(f)$, como sendo o conjunto: $N(f)=\{x\in G; f(x)=e_\Delta\}$, onde e_Δ representa o elemento neutro da operação Δ em J.

EXEMPLOS:

1) $f:\langle \mathbb{R}_+^*,\bullet\rangle \to \langle \mathbb{R},+\rangle$ dada por $f(x)=\log x$

$N(f)=\{x\in\mathbb{R}_+^*; f(x)=\log x=0=e_+\}=\{1\}=\{e_\bullet\}$ (neste caso, o núcleo é um conjunto finito).

2) $f:\langle \mathbb{Z},+\rangle \to \langle \mathbb{C}^*,\bullet\rangle$ dada por $f(m)=i^m$

$N(f)=\{m\in\mathbb{Z}; f(m)=i^m=e_\bullet=1\}=\{0,\pm4,\pm8,\pm12,\ldots\}=\{4k;k\in\mathbb{Z}\}$ (neste caso, o núcleo é um conjunto infinito).

3) $f:\langle \mathbb{R},+\rangle \to \langle \mathbb{R},+\rangle$ dada por $f(x)=5x$

$N(f)=\{x\in\mathbb{R}; f(x)=0=e_+\}=\{x\in\mathbb{R};5x=0\}=\{0\}=\{e_+\}$ (o núcleo é um conjunto finito).

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Pode-se demonstrar, que se $f:\langle G,*\rangle \to \langle J,\Delta\rangle$ é um homomorfismo de grupos, f é injetora se e somente se $N(f)=\{e_*\}$. Os exemplos 1) e 3) acima são homomorfismos injetores.

ISOMORFISMOS ENTRE GRUPOS

DEFINIÇÃO: Sejam $\langle G,*\rangle$ e $\langle J,\Delta\rangle$ dois grupos, uma função $f:\langle G,*\rangle\to\langle J,\Delta\rangle$ é um ***isomorfismo*** se e somente se f é um homomorfismo bijetor, isto é, se são satisfeitas as condições:

i) f é um homomorfismo, ou seja $f(x*y)=f(x)\,\Delta\, f(y), \quad \forall x,y\in G$;

ii) f é injetora: $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$ (pela observação anterior e usando o item i), $N(f)=\{e_*\}$);

iii) f é sobrejetora: $f(G)=J$ ou, $\forall y\in J, \exists x\in G; f(x)=y$.

EXEMPLOS:

1) $f:\langle \mathbb{R}_+^*,\bullet\rangle\to\langle\mathbb{R},+\rangle$ dada por $f(x)=\log x$;

2) $f:\langle\mathbb{R},+\rangle\to\langle\mathbb{R},+\rangle$ dada por $f(x)=5x$.

CONTRA EXEMPLOS:

1) $f:\langle\mathbb{Z},+\rangle\to\langle\mathbb{C}^*,\bullet\rangle$ dada por $f(m)=i^m$ não é injetora pois $N(f)\neq\{e_+\}=\{0\}$ nem sobrejetora, pois $f(\mathbb{Z})=\{-1,1,i,-i\}\neq\mathbb{C}^*$.

2) $f:\langle\mathbb{Z},+\rangle\to\langle\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+\rangle$ dada por $f(x)=(x,0)$ é homomorfismo injetor mas não é sobrejetor. (verifique!).